מטלת קובץ 12

חומר הלימוד למטלה: פרקים 3–6 משקל המטלה: 2 נקודות

שאלה 1 (20 נקודות)

תהיינה $A,B\subseteq\mathbf{R}^k$ ותהי $U=\left(A\cup B\right)\setminus\partial\left(A\cup B\right)$.

תהיינה f,g,h פונקציות חלקיות מ־$\mathbf{R}^k$ ל־$\mathbf{R}$.

נתון ש־f גזירה בכל נקודה ב־A ו־g גזירה בכל נקודה ב־B.

נתון שלכל $x\in A\cap B$ מתקיים $f\left(x\right)=g\left(x\right)$ וגם $\nabla f\left(x\right)=\nabla g\left(x\right)$.

הפונקציה h מוגדרת על ידי $h\left(x\right)=f\left(x\right)$ אם $x\in A$ ו־$h\left(x\right)=g\left(x\right)$ אם $x\in B$.

א. הפריכו על ידי דוגמה מתאימה את הטענה: "אם h רציפה ב־U אז h גזירה ב־U".

ב. הוכיחו כי אם A ו־B הן קבוצות סגורות אז h גזירה ב־U.

שאלה 2 (20 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו משפט ידוע מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 בהקשר גיאומטרי.

יהי k מספר טבעי ותהי $\varphi:\left[a,b\right]\to\mathbf{R}^k$ מסילה, כך ש־φ גזירה בכל $t\in\left(a,b\right)$.

טענה: יש $c\in\left(a,b\right)$ ו־$\lambda\in\mathbf{R}$ כך ש־$\varphi\left(b\right)-\varphi\left(a\right)=\lambda\dot{\varphi}\left(c\right)$.

א. עבור $k=2$ הפריכו את הטענה.

ב. הוכיחו את הטענה בהנחה ש־$k=2$ ושלכל $t\in\left(a,b\right)$ מתקיים $\dot{\varphi}\left(t\right)\neq0$.

המלצה: העזרו בפונקציה שמוגדרת על ידי $t\mapsto\varphi(t)\cdot u$ עם וקטור מתאים $u\in\mathbf{R}^2$.

ג. עבור כל $k\geq3$ וההנחה הנוספת שלכל $t\in\left(a,b\right)$ מתקיים $\dot{\varphi}\left(t\right)\neq0$ – הפריכו את הטענה.

ד. בעזרת סעיף ב והמסילה המוגדרת על ידי $\varphi\left(t\right)=\left(f\left(t\right),g\left(t\right)\right)$ (ולא בדרך אחרת) הוכיחו את

משפט קושי: אם f ו־g הן פונקציות רציפות בקטע $\left[a,b\right]$ וגזירות בקטע $\left(a,b\right)$, ואם

$g'\left(t\right)\neq0$ לכל $t\in\left(a,b\right)$ אז יש $c\in\left(a,b\right)$ כך שמתקיים: $\dfrac{f\left(b\right)-f\left(a\right)}{g\left(b\right)-g\left(a\right)}=\dfrac{f'\left(c\right)}{g'\left(c\right)}$

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ־$\mathbf{R}^k$ ל־$\mathbf{R}$ שגזירה ברציפות בנקודה $a\in\mathbf{R}^k$.

תהי φ פונקציה חלקית מ־$\mathbf{R}$ ל־$\mathbf{R}$ שגזירה פעמיים ב־$f\left(a\right)$ ותהי $g=\varphi\circ f$.

נתון ש־$f\left(a\right)$ היא נקודה קריטית של φ.

הוכיחו ש־g גזירה פעמיים בנקודה a ומצאו את ההֶסְיָאן Hg_a. שימו לב: לא נתון ש־f גזירה פעמיים!

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי $k \geq 2$. תהי f פונקציה חלקית מ־$\mathbf{R}^k$ ל־$\mathbf{R}$ שרציפה בסביבה של נקודה a ויהי $\gamma \in \mathbf{R}$.

הוכיחו שאם a היא נקודה מבודדת של הקבוצה $\left\{ x \middle| f(x) = \gamma \right\}$ אז a היא נקודת קיצון מקומי של f. האם גם הטענה ההפוכה נכונה?

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $A \in M_{k\times k}(\mathbf{R})$ מטריצה ממשית סימטרית הפיכה. נניח של־A יש k ערכים עצמיים שונים שנמספר בסדר יורד $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_k$ ונסמן ב־v_i וקטור יחידה שהוא וקטור עצמי ששייך ל־λ_i.

נגדיר פונקציה $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ על־ידי: $f : x \mapsto |x|^4 - 2xAx^{\mathrm{T}}$

א. חשבו את הגרדיאנט $\nabla f(x)$ ואת מטריצת ההסיאן Hf_x עבור כל $x \in \mathbf{R}^k$.

ב. מִצאו את כל הנקודות הקריטיות של f.

ג. לכל אחת מהנקודות הקריטיות של f קבעו בעזרת מטריצת ההסיאן אם היא נקודת מינימום מקומי, נקודת מקסימום מקומי או נקודת אוכף.

חלקו למקרים בהתאם לסימני הערכים העצמיים. תוכלו להיעזר בעובדה שהווקטורים העצמיים $v_1,\ldots,v_k$ מהווים בסיס אורתונורמלי של $\mathbf{R}^k$. שימו לב שבסימוני ספר הלימוד $v_i A = v_i A^{\mathrm{T}} = \lambda_i v_i$.

ד. האם יש ל־f נקודת מקסימום ב־$\mathbf{R}^k$? אם לא, הוכיחו שאין. אם כן, מצאו אותה.

ה. האם יש ל־f נקודת מינימום ב־$\mathbf{R}^k$? אם לא, הוכיחו שאין. אם כן, מצאו אותה.

סוף המטלה ◄◄◄