מטלת קובץ 11

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–2 משקל המטלה: 2 נקודות

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי A קבוצה ב־$\mathbf{R}^k$. הוכיחו שהקבוצה $A' = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \,\middle|\, x \in \partial\left(A \setminus \{x\}\right) \right\}$ היא קבוצה סגורה.

שאלה 2 (15 נקודות)

יהי $k \geq 2$ ותהי $f : \mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ פונקציה שרציפה בסביבה נקובה של נקודה $a \in \mathbf{R}^k$.

הוכיחו ש־f אינה חד־חד־ערכית.

שאלה 3 (20 נקודות)

מצאו קבוצה פתוחה U ב־$\mathbf{R}^2$ כך ש־$(0,0) \in \partial U$ וכך שלפונקציה $f : (x,y) \mapsto \dfrac{\sin(x+y)}{x}$

יש גבול בנקודה $(0,0)$ דרך U, דהיינו יש $b \in \mathbf{R}$ עבורו: $f(x,y) \xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,0)\\(x,y)\in U}]{} b$

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $A = \left\{ \left(x, \sin\frac{1}{x}\right) \,\middle|\, x \in (0,\infty) \right\}$.

הוכיחו שהקבוצה A קשורה־מסילתית ואילו הקבוצה $A \cup \partial A$ אינה קשורה מסילתית.

שאלה 5 (30 נקודות)

א. הוכיחו שהקבוצה $A = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 \leq 1 \right\}$ אינה קמורה.

ב. הוכיחו שהקבוצה $S = \left\{ (x,y,z) \,\middle|\, x^2y^2 + y^2z^2 + z^2x^2 = 1 \right\}$ היא משטח.

הערה: אפשר להוכיח גם ש־S היא טלאי דו־ממדי).

►►► סוף המטלה