

האוניברסיטה הפתוחה

20224

חשבון אינפיניטסימלי 3

חוברת הקורס - 1/א2026

כתב: ד"ר עופר הדס

אוקטובר 2025 - סמסטר סתיו - תשפ"ו

משך זמן כפול

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	שלום וברכה - הנחיות כלליות
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	מטלות אופל
2	ממ"ן 11
3	ממ"ן 12
4	ממ"ן 13
5	ממ"ן 14
7	ממ"ן 15
8	ממ"ן 16

שלום וברכה,

חוברת זאת כוללת פרטים שיש להכיר, כדי לבצע את הנדרש ולסיים בהצלחה את לימוד הקורס חשובון אינפיניטסימלי 3. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.¹

עם קבלת חומר הלימוד בקורס יש להתחיל בלימוד עצמי, בקצב המותאם ללוח הזמנים שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד כל פרק כלול גם הזמן הנדרש לפתרון המטלה הקשורה אליו ולהגשתה. חשוב לתכנן לוח זמנים אישי שיאפשר את לימוד החומר ופתרון והגשת המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים וחשוב לעיין בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

הקורס נלמד במתכונת שנתית, מתחילת סמסטר א ועד תום סמסטר ב. הסיבה העיקרית לכך היא שמנסיונו דרוש זמן ארוך מסמסטר אחד כדי להתרגל ולהפנים את הרעיונות והמושגים הנלמדים בקורס, ולתרגל את יישומם. התקופה שבין שני הסמסטרים כלולה בזמן לימוד הקורס. עם זאת, בתכנון לוח הזמנים נלקח בחשבון שחלק מתקופה זאת, אך לא כולה, יוקדש לבחינות בקורסים אחרים. יש אפשרות לבקש להבחן בקורס בתום סמסטר א. אפשרות זאת אינה מומלצת. למידע על התנאים למימוש אפשרות זאת יש לפנות למרכז ההוראה במהלך השבועיים הראשונים של סמסטר א.

לקורס **אתר אינטרנט**. חלק מהמטלות להגשה יש לפתור באתר הקורס באינטרנט ("מטלות אופל"). יש מטלת אופל אחת לכל פרק בספר הלימוד, והיא מיועדת לפתרון במקביל ללימוד הפרק המתאים בספר. מטלות המנחה (הממ"נים) נמצאות בחוברת זאת (שעותק שלה נמצא גם באתר הקורס). באתר גם חומרי תרגול נוספים, כגון מטלות ובחינות משנים קודמות.

אתר הקורס מהווה ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטיות וסטודנטים אחרים בקורס. זה המקום המתאים להעלות בו לדיון כל רעיון או שאלה בנושאי הלימוד. **הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.**

צוות הקורס מעוניין לעזור לך בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, חשוב לא להסס ולפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותך דרכי ההתקשרות הבאות:

- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת oferh@openu.ac.il.
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ד בין השעות 12:00–14:00.
- טלפון למנחה בשעת ההנחיה הטלפונית המפורטת יחד עם לוח המפגשים ובדף צוות הקורס באתר.
- פניה למנחה בדואר אלקטרוני.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.
- **שאלתא** – לפניית בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאלתא (לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים < משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות).

נאחל לכולנו סמסטר מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

¹ פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס יש באתר שה"ם שכתובתו: <http://www.openu.ac.il/shoham>

מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותך יש באתר הספרייה שכתובתו:

<http://www.openu.ac.il/Library>

לוח זמנים ופעילויות (2024 \ 2026) – משך זמן כפול

מפגשי הנחיה*	הערות	מועדי משלוח המטלות	תאריכים	שבועות הלימוד	פרקי הלימוד
	תחילת סמסטר א : 29.10 15.12 : חנוכה סיום סמסטר א : 30.1	מטלה 01 : עד 7.11.2025	7.11.2025–26.10.2025	2–1	פרק 1
		מטלה 02 : עד 21.11.2025 ממ"ן 11 : עד 23.11.2025	21.11.2025–9.11.2025	4–3	פרק 2
		מטלה 03 : עד 5.12.2025	5.12.2025–23.11.2025	6–5	פרק 3
		מטלה 04 : עד 12.12.2025	12.12.2025–4.12.2025	7	פרק 4
		מטלה 05 : עד 19.12.2025	19.12.2025–14.12.2025	8	פרק 5
		מטלה 06 : עד 2.1.2026 ממ"ן 12 : עד 4.1.2026	2.1.2026–21.12.2025	10–9	פרק 6
		את מטלות 07 ו-13 מומלץ להקדים לפתור ולהגיש לפני תקופת הבחינות שבין הסמסטרים. תאריכי ההגשה המאוחרים נקבעו להן כדי לאפשר למאחרים להשלים פערים בלימוד הקורס לקראת תחילת סמסטר ב.	30.1.2026–4.1.2026	14–11	פרק 7
	את התקופה שבין הסמסטרים נצלו לחזרה על מה שלמדתם בסמסטר הראשון וחיוזוק נושאים חשובים. השתדלו גם להתחיל ללמוד מהספר את תכני סמסטר ב. פורים : 3.3	מטלה 07 : עד 6.3.2026 ממ"ן 13 : עד 8.3.2026	6.3.2026–1.2.2026	19–15	אתנחתא
	תחילת סמסטר ב : 8.3		3.4.2026–8.3.2026	23–20	פרק 8
	פסח : 1.4–8.4	מטלה 08 : עד 3.4.2026 ממ"ן 14 : עד 5.4.2026			
	יום הזכרון לשואה : 13.4 יום הזכרון : 21.4 יום העצמאות : 22.4 ל"ג בעומר : 5.5		15.5.2026–5.4.2026	29–24	פרק 9
	שבועות : 21.5–22.5	מטלה 09 : עד 15.5.2026 ממ"ן 15 : עד 17.5.2026			
	סיום סמסטר ב : 19.6		19.6.2026–17.5.2026	34–30	פרק 10
		מטלה 10 : עד 19.6.2026 ממ"ן 16 : עד 19.6.2026			

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים". אנא שבצו אותם בכתב ידכם.

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לעבור את הקורס ולקבל נקודות זכות יש לעמוד בכל התנאים האלה :

- א. להגיש מטלות בהיקף של 15 נקודות לפחות (אפשר עד 30).
- חובה להגיש לפחות ממ"ן אחד מבין הממ"נים 11, 12 ו-13.
- חובה להגיש לפחות ממ"ן אחד מבין הממ"נים 14, 15 ו-16.
- ב. לקבל בבחינת הגמר ציון לפחות 60.
- ג. לקבל בציון הסופי לפחות 60.

פירוט המטלות ומשקליהן

סך הכל משקל המטלות 30 נקודות. מהן :

- עשר מטלות אופל, משקל כל אחת נקודה אחת, בסה"כ 10 נקודות.
- שישה ממ"נים, להלן משקליהם :

משקל	ממ"ן
2	11
2	12
4	13
4	14
4	15
4	16
20	סה"כ

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**

מטלות אופל

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס. כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו
אחר ההוראות בגוף המטלה.

יש עשר מטלות אופל, אחת לכל פרק. משקל כל מטלת אופל: נקודה אחת.

מטלות אלה מיועדות לפתרון תוך כדי לימוד הפרק מהספר, דהיינו במקביל לקריאת חומרי
הלימוד. תוכלו לעזוב את המטלה ולחזור אליה באתר הקורס ולהמשיך לפתור אותה, כל עוד לא
הגשם אותה באמצעות כפתור ההגשה שבסוף המטלה. תשובותיכם נשמרות באתר הקורס.

המשוב על כל מטלת אופל פתוח רק למי שהגישו את המטלה.

מומלץ מאוד להגיש את כל המטלות האלה, גם כאלה שפתרתם חלקית בלבד, כדי שתהיה לכם
גישה למשוב, הכולל פתרונות לשאלות רבות.

לפני המועד האחרון להגשת כל מטלת אופל, יש להגיש אותה בעזרת כפתור ההגשה.

אחרי הגשת המטלה לא ניתן לשנות עוד את התשובות.

אחרי המועד האחרון לא ניתן להגיש את המטלה.

המועדים המדויקים לפתרון כל מטלת אופל נמצאים בגוף המטלה באתר הקורס.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

סמסטר : 1א2026

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 1–2

מועד אחרון להגשה : 23.11.2025

מספר השאלות : 4

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. תהי B איחוד כל הקטעים הסגורים ששני קצותיהם ב- A דהיינו:

$$B = \{ta + (1-t)b \mid a, b \in A, 0 \leq t \leq 1\}$$

הוכיחו או הפריכו :

- הקבוצה B היא קבוצה קמורה.
- אם A היא קבוצה פתוחה אז B היא קבוצה פתוחה.
- אם A היא קבוצה סגורה אז B היא קבוצה סגורה.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה אינסופית חסומה.

- הוכיחו כי אם $k \geq 2$ אז ∂A היא קבוצה אינסופית.
- עבור $k=1$ הראו, עלידי דוגמאות מתאימות, שיתכן ש- ∂A היא קבוצה סופית ויתכן גם ש- ∂A היא קבוצה אינסופית.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ בעלת התכונה שהגרף $G(f)$ הוא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^{k+1}$.

- הביאו דוגמה של פונקציה בעלת תכונה זאת שאינה רציפה בקבוצה $\mathbb{R}^k$.
 - הוכיחו שאם f היא פונקציה חסומה אז f היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}^k$.
- המלצה: חשבו על הצמצום של f לקבוצה קומפקטית.

שאלה 4 (25 נקודות)

א. הוכיחו שהמשוואה $xe^z + ye^{-z} + z = 1$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$ את z

כפונקציה של (x, y) , כאשר: $A = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \mid x + y \leq 1\}$

ב. תהי $f: A \rightarrow [0, \infty)$ הפונקציה שלפי סעיף א מוגדרת באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$.
 הוכיחו כי:
$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow 0^{[2]}} 1$$

ג. הראו שהגרף של $f|_{A \setminus \partial A}$ הוא טלאי דו-ממדי (ובפרט, הוא משטח).

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

סמסטר : 1א2026

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 3–6

מועד אחרון להגשה : 4.1.2026

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ תהי המוגדרת על ידי: } f(x, y) \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{y^2}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

מצאו באילו נקודות f גזירה ובאילו נקודות היא אינה גזירה (והוכיחו!)

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שהיא הומוגנית חיובית ממעלה 1 ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

הוכיחו ש- f גזירה ב- $0^{[k]}$ אם ורק אם f היא פונקציה לינארית.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות והומוגנית חיובית ממעלה 0. הוכיחו:

א. לכל $a \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מטריצת ההסיאן Hf_a אינה חיובית לחלוטין ואינה שלילית לחלוטין.

ב. יש ל- f מקסימום ומינימום ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי f פונקציה שרציפה ב- $\bar{B}^k(0^{[k]}; 1)$ וגזירה ב- $B^k(0^{[k]}; 1)$ וכן $|f(x)| \leq 1$ לכל $x \in B^k(0^{[k]}; 1)$.

הוכיחו שיש נקודה $a \in B^k(0^{[k]}; 1)$ כך ש- $|\nabla f(a)| < 4$.

רמז: תוכלו להיעזר בפונקציה $g(x) = f(x) + 2|x|^2$,

שאלה 5 (20 נקודות)

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx$$

היו $-1 < \alpha < \beta$. חשבו את ערכו של האינטגרל המוכלל:

הצדיקו את כל שלבי החישוב.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
חומר הלימוד למטלה: פרק 7
מספר השאלות: 4
סמסטר: 1א2026
משקל המטלה: 4 נקודות
מועד אחרון להגשה: 8.3.2026

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה זוגית וגזירה ברציפות בסביבה של 0. נניח גם ש $\varphi(0) = 2$.
הוכיחו שהמשוואה $x + y = \varphi(x - y)$ מגדירה באופן סתום בסביבת $(1,1)$ את y כפונקציה גזירה של x , שנשמנה ב' f .
חשבו את $f'(1)$ והוכיחו שיש סביבה V של 1 כך שלכל $x \in V$ מתקיים $f(f(x)) = x$.
תזכורת: פונקציה זוגית דהיינו $\varphi(-t) = \varphi(t)$ לכל t .

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי U קבוצה פתוחה ב' $\mathbb{R}^3$. תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ פונקציה שגזירה ברציפות בקבוצה U .
נתון שיש $a \in U$ כך שדרגת המטריצה Jf_a היא 2. הוכיחו ש' f אינה פונקציה חד-חד-ערכית.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ותהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות והומוגנית-חיובית ממעלה α .
לפי דוגמה 7.ג.7 הגרף $G(f)$ הוא משטח-על חלק. הראו שאם יש נקודה שמשותפת לכל מישורי העל המשיקים למשטח-על $G(f)$ אז f קבועה או $\alpha = 1$.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי α מספר ממשי ותהי:
$$A = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y + z = \alpha \right\}$$

הוכיחו כי לפונקציה $f: (x, y, z) \mapsto xy + yz + xz - 2xyz$ יש ערך מזערי ב' A אם ורק אם $\alpha \geq 4.5$.
(עצה: כדאי לחשוב גם על ערכי f ב' ∂A).

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

סמסטר : 1א2026

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 8

מועד אחרון להגשה : 5.4.2026

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ו- $\mu: [\alpha, \beta] \rightarrow M_{k \times l}(\mathbb{R})$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^l$
 $t \mapsto \varphi(t)\mu(t)$

א. הוכיחו כי ψ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).

ב. אם φ ו- μ הן מסילות סדירות, האם גם ψ היא מסילה סדירה?

מרחב המטריצות $M_{k \times l}(\mathbb{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^{kl}$. ראו הערה 1.א.ג.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילה שאורכה סופי, ושהיא מסילה פשוטה, לולאה פשוטה או מסילה סדירה.

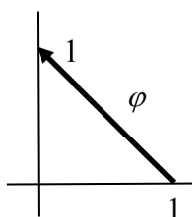
א. הראו שיש מספר חיובי γ ומסילה יחידה $\psi: [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ששקולה ל- φ ובעלת התכונה:

$$L(\psi|_{[0,s]}) = s \quad \text{לכל } s \in (0, \gamma]$$

ב. הוכיחו כי אם $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בתמונת המסילה φ אז:

$$\int_{\varphi} f(x) |dx| = \int_0^{\gamma} f(\psi(s)) ds$$

שאלה 3 (20 נקודות)



$$\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^3} dx + \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^3} dy$$

על המסילה הפשוטה φ שבאיור:

(מומלץ להיעזר בשאלה 21.ו.8 ועובדות נוספות שמוכחות בספר הלימוד).

שאלה 4 (20 נקודות)

$$F: (x, y) \mapsto \left(\frac{-2xy^3}{x^4 + y^6}, \frac{3x^2y^2}{x^4 + y^6} \right)$$

נתונה הפונקציה

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

הראו ש- F גזירה ברציפות ב- U ושלכל $a \in U$ מטריצת היעקוביאן JF_a סימטרית.

האם F היא שדה משמר ב- U ? נמקו!

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ מסילה שתמונתה היא הקבוצה A . תהי $F: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה גזירה

ברציפות כך שלכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ המטריצה JF_x היא מטריצה סימטרית.

נגדיר פונקציה חלקית G מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}^k$ עלידי:

$$G: x \mapsto F(x - \varphi(0)) - F(x - \varphi(1))$$

הוכיחו ש- G היא שדה משמר בקבוצה $\mathbb{R}^k \setminus A$.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

סמסטר : 2026א1

הקורס : 2024 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 9

מועד אחרון להגשה : 17.5.2026

מספר השאלות : 6

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $1 < k$. הוכיחו שכל משטח על חלק ב- $\mathbb{R}^k$ הוא קבוצה צנומה.
הערה: אפשר להיעזר למשל בכך שאוסף הקבוצות מהצורה $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_k, b_k)$ עם a_i ו- b_i מספרים רציונליים כך ש- $a_i < b_i$ הוא אוסף ברמנייה של תיבות פתוחות ב- $\mathbb{R}^k$ כך שלכל נקודה $a \in \mathbb{R}^k$ ולכל סביבה U של a יש תיבה B באוסף כך ש- $a \in B \subseteq U$.

שאלה 2 (15 נקודות)

חשבו את האינטגרל המרובה:
$$\int_{[0,1]^k} \max\{x_1, \dots, x_k\} dx_1 \dots dx_k$$

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$ ויהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפאומורפיזם. הוכיחו ש- $|\det J\varphi_x| = 1$ לכל $x \in U$ אם ורק אם $\text{vol}_k(\varphi(K)) = \text{vol}_k(K)$ לכל $K \subseteq U$ שהיא סגורה, חסומה ובעלת נפח.

שאלה 4 (15 נקודות)

חשבו את הנפח והמרכז הגיאומטרי של הקבוצה:
$$\{(x, y, z) \mid x^2 e^{-2z} + y^2 e^{2z} \leq \sin z, 0 \leq z \leq \pi\}$$

שאלה 5 (15 נקודות)

הוכיחו שלקבוצה $A = \{(x, y, z) \mid x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \leq 1\}$ יש נפח מוכלל, דהיינו האינטגרל המוכלל של הפונקציה הקבועה $1 \mapsto (x, y, z)$ בקבוצה A מתכנס. (עצה: אל תנסו לחשב את הנפח).

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $D = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$. תהי φ לולאה פשוטה סדירה שתמונתה היא השפה של קבוצה סגורה וחסומה A השוכנת לשמאל הלולאה φ , כך שראשית הצירים היא נקודה פנימית של A . הוכיחו כי:
$$\text{vol}_2(D) = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$$

רמז: ראשית הראו שהנוסחה נכונה בהנחה ש- $A = D$. אחרי כן הראו שהיא נכונה גם ללא הנחה זאת.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

סמסטר : 1א2026

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 10

מועד אחרון להגשה : 19.6.2026

מספר השאלות : 4

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי $R > 0$, תהי $\varphi : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0, R]$ ותהי :

$$f : \bar{B}(0^{[k]}; R) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \varphi(|x|)$$

הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקבוצה $K = \bar{B}(0^{[k]}; R)$ ושמקיים :

$$\int_K f = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^1 \varphi(t) t^{k-1} dt$$

היעזרו בשאלה 10.ג.23 ובהגדרת האינטגרביליות ותוצאות שונות מפרק 9.

שאלה 2 (25 נקודות)

הראו שהקבוצה $C = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 4, x^2 + y^2 = 2x\}$ היא יריעה חלקה חד-ממדית.

תהי $\varphi : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3$ לולאה פשוטה שתמונתה C , ושידוע עליה :

$$\varphi(0) = (0, 0, \frac{4}{3}), \varphi(2) = (2, 0, \frac{2}{3}), \varphi(3) = (1, 1, \frac{1}{3})$$

$$\oint_{\varphi} Pdx + Qdy + Rdz$$

חשבו את האינטגרל

$$P = x + 2y + 3z, \quad Q = y + 2z + 3x, \quad R = z + 2x + 3y$$

כאשר :

שאלה 3 (25 נקודות)

$$\iint_S xe^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz + e^z dx \wedge dy$$

חשבו את האינטגרל

$$S = \{(x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid xe^z + ye^{-z} + z = 1\}$$

כאשר

והאוריינטציה של משטח שמכיל את S מתאימה לנורמל יחידה רציף שכל רכיביו אי-שליליים.

המלצה : במקום לחשב את האינטגרל באופן ישיר, מומלץ לנצל את משפט הדיברגנץ באחת מגרסאותיו.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונות מטריצה הפיכה $A \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$ והפונקציה האפינית:

$$F: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$$

$$x \mapsto xA^T$$

נתון מספר חיובי ε והקבוצה:

$$S = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \mid |xA^T| = \varepsilon \right\}$$

הראו שמתקיים

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \frac{\operatorname{tr} A}{\det A} \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \cdot \varepsilon^k$$

כאשר N הוא נורמל היחידה הרציף למשטח על S שפונה החוצה מהקבוצה:

$$K = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \mid |xA^T| \leq \varepsilon \right\}$$

תזכורת: $\operatorname{tr} A$ זאת העקבה של המטריצה A : סכום איברי האלכסון הראשי של המטריצה.

►►► סוף המטלה