

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

סמסטר : 1א2026

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 10

מועד אחרון להגשה : 19.6.2026

מספר השאלות : 4

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי $R > 0$, תהי $\varphi : [0, R] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0, R]$ ותהי :

$$f : \bar{B}(0^{[k]}; R) \rightarrow \mathbb{R} \quad x \mapsto \varphi(|x|)$$

הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקבוצה $K = \bar{B}(0^{[k]}; R)$ ושמקיים :

$$\int_K f = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^1 \varphi(t) t^{k-1} dt$$

היעזרו בשאלה 10.ג.23 ובהגדרת האינטגרביליות ותוצאות שונות מפרק 9.

שאלה 2 (25 נקודות)

הראו שהקבוצה $C = \{(x, y, z) \mid x + 2y + 3z = 4, x^2 + y^2 = 2x\}$ היא יריעה חלקה חד-ממדית.

תהי $\varphi : [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^3$ לולאה פשוטה שתמונתה C , ושידוע עליה :

$$\varphi(0) = (0, 0, \frac{4}{3}), \varphi(2) = (2, 0, \frac{2}{3}), \varphi(3) = (1, 1, \frac{1}{3})$$

$$\oint_{\varphi} Pdx + Qdy + Rdz$$

חשבו את האינטגרל

$$P = x + 2y + 3z, \quad Q = y + 2z + 3x, \quad R = z + 2x + 3y$$

כאשר :

שאלה 3 (25 נקודות)

$$\iint_S xe^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz + e^z dx \wedge dy$$

חשבו את האינטגרל

$$S = \{(x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid xe^z + ye^{-z} + z = 1\}$$

כאשר

והאוריינטציה של משטח שמכיל את S מתאימה לנורמל יחידה רציף שכל רכיביו אי-שליליים.

המלצה : במקום לחשב את האינטגרל באופן ישיר, מומלץ לנצל את משפט הדיברגנץ באחת מגרסאותיו.

שאלה 4 (25 נקודות)

נתונות מטריצה הפיכה $A \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$ והפונקציה האפינית:

$$F: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$$

$$x \mapsto xA^T$$

נתון מספר חיובי ε והקבוצה:

$$S = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \mid |xA^T| = \varepsilon \right\}$$

הראו שמתקיים

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \frac{\operatorname{tr} A}{\det A} \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)} \cdot \varepsilon^k$$

כאשר N הוא נורמל היחידה הרציף למשטח על S שפונה החוצה מהקבוצה:

$$K = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \mid |xA^T| \leq \varepsilon \right\}$$

תזכורת: $\operatorname{tr} A$ זאת העקבה של המטריצה A : סכום איברי האלכסון הראשי של המטריצה.

►►► סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: וריאציה, בעיקר על הניסוח של 2022\2023\15.

זה מועתק משם (צריך להחליף $g \rightarrow f \rightarrow \varphi$ ו- $1 \rightarrow R$):

אפשר לחסום את f בין שתי פונקציות שקבועות על קטעי חלוקה, וכך לקבל הערכות

ל- g בעזרת הנוסחה משאלה 10.ג.23. בעיקרון צריך גם להפריד סביבה קטנה של

הראשית. נלך בדרך קצת אחרת:

לפי טענה 9.ה.26 מכפלת פונקציות אינטגרביליות בקטע היא אינטגרבילית. לכן

הפונקציה $h: t \mapsto t^{k-1} f(t)$ אינטגרבילית ב- $[0, 1]$.

ניקח חלוקה $T = (t_i)_{i=0}^r$ של $[0, 1]$ ונסמן $M_i = \sup h([t_{i-1}, t_i])$ ו- $m_i = \inf h([t_{i-1}, t_i])$.

לכל $t \in [t_{i-1}, t_i]$ מתקיים $m_i \leq h(t) \leq M_i$

ולכן (פרט ל- $t = 0$) מתקיים: $m_i t^{1-k} \leq f(t) \leq M_i t^{1-k}$

נסמן: $K_i = \bar{B}^k(0^{[k-1]}; t_i) \setminus \bar{B}^k(0^{[k-1]}; t_{i-1})$

(כאשר עבור $i = 1$ הכוונה ש- $\{0^{[k]}\} \setminus \bar{B}^k(0^{[k]}; t_1)$).

עבור $x \in K_i$ מתקיים $|x| \in [t_{i-1}, t_i]$ ו- $g(x) = f(|x|)$ ולכן: $m_i |x|^{1-k} \leq g(x) \leq M_i |x|^{1-k}$

לכן $m_i \int_{K_i} |x|^{1-k} dx_1 \cdots dx_k \leq \int_{K_i} g(x) dx_1 \cdots dx_k \leq M_i \int_{K_i} |x|^{1-k} dx_1 \cdots dx_k$

מהנוסחה משאלה 10.ג.23 נקבל: $\int_{K_i} |x|^{1-k} dx_1 \cdots dx_k = \int_{t_{i-1}}^{t_i} t^{1-k} \cdot t^{k-1} dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} (t_i - t_{i-1})$

ליתר דיוק: עבור $i > 1$ נקבל זאת כי הקבוצה $K_i \cup \partial K_i$ נבדלת מ- K_i בקבוצה בעלת

נפח אפס שהיא הספירה $S^{k-1}(0^{[k]}; t_{i-1})$. עבור $i = 1$ מדובר באינטגרל של פונקציה

שאינה חסומה, כלומר אינטגרל מוכלל (למעט המקרה). נוכל לקחת את הקבוצות

$A_n = K_1 \setminus B(0^{[k]}; \frac{1}{n})$ שמהוות סדרת קבוצות בעלות נפח שעולה לקבוצה K_1 ובכל

אחת מהן תקפה הנוסחה משאלה 10.ג.23, ולסדרת קירוב זאת יש גבול, ולפי טענה

9.ח.6 האינטגרל המוכלל הזה מתכנס ולפי הגדרה 9.ח.5 ערכו הוא אותו גבול (במקרה

$k = 1$ אותו טיעון עובד בעזרת חלק ב של מסקנה 9.ה.33, או לחילופין קל מאוד לבדוק

ישירות את השוויון).

כעת מאחר שהקבוצות K_i זרות זו לזו ומתקיים $\bar{B}(0^{[k]}; 1) = \{0^{[k]}\} \cup \bigcup_{i=1}^r K_i$ מתקיים

$$\int_{\bar{B}(0^{[k]}; 1)} g = \sum_{i=1}^r \int_{K_i} g_k$$

$$\frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \sum_{i=1}^r m_i(t_i - t_{i-1}) \leq \int_{\bar{B}(0^{[k]};1)} g \leq \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \sum_{i=1}^r M_i(t_i - t_{i-1}) \quad \text{ולכן}$$

$$\underline{S}_T(h) \leq \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{2\pi^{\frac{k}{2}}} \int_{\bar{B}(0^{[k]};1)} g \leq \bar{S}_T(h) \quad \text{כלומר:}$$

זה נכון לכל חלוקה T של הקטע $[0,1]$. אבל h אינטגרלית ב- $[0,1]$ ולפי הגדרת

$$\text{האינטגרל, המספר היחיד בעל התכונה הזאת הוא } \int_0^1 h(t) dt = \int_0^1 t^{k-1} f(t) dt. \text{ לכן}$$

$$\frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{2\pi^{\frac{k}{2}}} \int_{\bar{B}(0^{[k]};1)} g = \int_0^1 t^{k-1} f(t) dt$$

$$\int_{\bar{B}(0^{[k]};1)} g = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^1 t^{k-1} f(t) dt \quad \text{כלומר:}$$

לשאלה 2: $4 \setminus 15 \setminus 2021 = 6 \setminus 85$.

לשאלה 3: $4 \setminus 15 \setminus 2022 = 6 \setminus (93=53)$.

שאלה שהייתי בעבר פותר במפגשי הנחיה, בעזרת משפט הדיברגנץ על הקבוצה שתחומה על ידי המשטח ושלושת מישורי הצירים. כמוכותחום האינטגרציה הוא הקבוצה משאלה 4 בממ"ן 11.

$$K = \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid xe^z + ye^{-z} + z \leq 1 \right\} \quad \text{ביתר פירוט: לוקחים:}$$

$$S_1 = \left\{ (x, y, 0) \in [0, \infty)^3 \mid x + y \leq 1 \right\} \quad \text{אז } \partial K = S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3 \text{ עם:}$$

$$S_2 = \left\{ (x, 0, z) \in [0, \infty)^3 \mid xe^z + z \leq 1 \right\}$$

$$S_3 = \left\{ (0, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid ye^{-z} + z \leq 1 \right\}$$

האינטגרל המבוקש הוא $\iint_S \omega_F = \iint_S F \cdot N d\sigma_2$ עם התבנית

$$\omega_F = xe^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz + e^z dx \wedge dy$$

$$\text{ו-} F: (x, y, z) \mapsto (xe^y, -e^y, e^z) \text{ (ולכן הדיברגנץ הוא } \nabla \cdot F(x, y, z) = e^z \text{) וכאשר } N$$

הוא נורמל היחידה הרציף הפונה החוצה מ- K .

נרצה להשתמש במשפט הדיברגנץ בגרסתו שממוספרת 20.1.10, ולהסיק שמתקיים:

$$\iiint_K \nabla \cdot F = \iint_S \omega_F + \iint_{S_1} \omega_F + \iint_{S_2} \omega_F + \iint_{S_3} \omega_F$$

ואפשר להסיק זאת, אלא שצריך כמה שינויים עדינים כדי להתאים בדיוק לתנאי המשפט. אז קודם נחשב, ואחר כך ננסה לתקן את הטעון תיקון כדי שתנאי המשפט יתקיימו ככתבם וכלשונם.

חישוב האינטגרל המשולש בעזרת מסקנה 26.1.9 ממשפט פוביני :

$$\iiint_K \nabla \cdot F = \iiint_K e^z dx dy dz = \int_0^1 \left(\iint_{K_z} e^z dx dy \right) dz = \int_0^1 \left(e^z \text{vol}_2(K_z) \right) dz$$

הקבוצה K_z היא $K_z = \{ (x, y) \mid (x, y, z) \in K \} = \{ (x, y) \in [0, \infty)^2 \mid xe^z + ye^{-z} + z \leq 1 \}$

עבור $z \in [0, 1]$ (אחרת $K_z = \emptyset$). זה משולש ישר זווית שניצביו על שני הצירים,

וקודקודיו הנקודות $(0, 0)$, $(e^{-z}(1-z), 0)$ ו- $(0, e^z(1-z))$. שטחו הוא חצי מכפלת

אורכי ניצביו, כלומר: $\text{vol}_2(K) = \frac{1}{2} e^{-z}(1-z) e^z(1-z) = \frac{1}{2} (1-z)^2$

$$\iiint_K \nabla \cdot F = \int_0^1 \left(e^z \text{vol}_2(K_z) \right) dz = \frac{1}{2} \int_0^1 \left(e^z (1-z)^2 \right) dz = \dots = e - 2.5 \quad \text{לכן}$$

כאשר החישוב על ידי אינטגרציה בחלקים.

לחישוב האינטגרלים המשטחיים:

S_1 היא הגרף של הפונקציה הקבועה $(x, y) \mapsto 0$ שמצומצמת לקבוצה

$$\Gamma_1 = \{ (x, y) \in [0, \infty)^2 \mid x + y \leq 1 \}$$

שהיא משולש ישר זווית ששטחו $\frac{1}{2}$ (למעשה $\Gamma_1 = K_0$). נורמל יחידה למישור xy

שהוא משטח חלק שמכיל את S_1 הוא $\pm e_3 = (0, 0, \pm 1)$, וזה שפונה החוצה מ- K הוא

בבירור $(0, 0, -1)$, ולכן:

$$\begin{aligned} \iint_{S_1} \omega_F &= \iint_{S_1} F \cdot N d\sigma_2 = \iint_{S_1} (xe^y, -e^y, e^z) \cdot (0, 0, -1) d\sigma_2 = - \iint_{S_1} e^z d\sigma_2 \\ &= - \iint_{\Gamma_1} e^0 \sqrt{1+0^2+0^2} dx dy = - \iint_{\Gamma_1} 1 dx dy = - \text{vol}_2(\Gamma_1) = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

S_2 אינו גרפים שפונקציות קבועות, אבל תמורה של שיעורי הנקודות, שהיא העתקת

חפיפה, מחליפה אותו בגרף של הפונקציה הקבועה 0 בקבוצה:

$$\Gamma_2 = \{ (x, z) \in [0, \infty)^2 \mid xe^z + z \leq 1 \}$$

ברור גם שנורמל היחידה עבור מישור xz שמכיל את S_2 הפונה החוצה מ- K הוא

הוקטור $(0, -1, 0)$. לכן:

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} \omega_F &= \iint_{S_2} F \cdot N d\sigma_2 = \iint_{S_2} (xe^y, -e^y, e^z) \cdot (0, -1, 0) d\sigma_2 \\ &= \iint_{S_2} e^y d\sigma_2 = \iint_{\Gamma_2} e^0 \sqrt{1+0^2+0^2} dx dy = \iint_{\Gamma_2} 1 dx dy = \text{vol}_2(\Gamma_2) \end{aligned}$$

$$\Gamma_2 = \{ (x, z) \mid 0 \leq z \leq 1, 0 \leq x \leq e^{-z}(1-z) \} \quad \text{נציג:}$$

$$\iint_{S_2} \omega_F = \text{vol}_2(\Gamma_2) = \int_0^1 \left(\int_0^{e^{-z}(1-z)} 1 \, dz \right) = \int_0^1 e^{-z}(1-z) \, dz = \dots = e-2 \quad \text{אז:}$$

נורמל היחידה עבור מישור yz שמכיל את S_3 ופונה החוצה מ- K הוא $(-1, 0, 0)$, ולכל

לכל נקודה $(x, y, z) \in S_3$ מתקיים $x=0$ ולכן $F(x, y, z) = (0, -e^y, e^z)$ ולכן ב- S_3

$$\iint_{S_3} \omega_F = \iint_{S_3} F \cdot N \, d\sigma_2 = \iint_{S_3} 0 \, d\sigma_2 = 0 \quad \text{מתקיים } F \cdot N = 0 \text{ וקיבלנו:}$$

$$\iint_S \omega_F = \iiint_K \nabla \cdot F - \iint_{S_1} \omega_F - \iint_{S_2} \omega_F - \iint_{S_3} \omega_F = (e-2.5) - \left(-\frac{1}{2}\right) - (e-2) - 0 = 0 \quad \text{אז:}$$

יצא 0. מדהים!

מה שעוד נשאר זה להצדיק את השימוש במשפט 20.1.10, ולשם כך דרושים שינויים קלים. בפרט הקבוצה S והקבוצות S_i אינן משטחים חלקים כפי שנדרש במשפט, וכדי להתאים לתנאי המשפט צריך להסיר מהן את נקודות השוליים שלהן (ולאסוף אותן לתוך איחוד יריעות ממימד קטן יותר, כלומר 0 או 1). לשם כך אפשר לקחת:

$$S' = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid xe^z + ye^{-z} + z = 1 \right\}$$

$$S_1 = \left\{ (x, y, 0) \mid x + y < 1, (x, y) \in (0, \infty)^2 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (x, 0, z) \mid xe^z + z < 1, (x, z) \in (0, \infty)^2 \right\}$$

$$S_3 = \left\{ (0, y, z) \mid ye^{-z} + z < 1, (y, z) \in (0, \infty)^2 \right\}$$

עכשיו אפשר לבדוק ש- $\partial K \setminus (S' \cup S'_1 \cup S_2 \cup S'_3)$ מוכלת באיחוד של תמונות שש

מסילות חלקות (שהן חיתוכי כל שתיים מבין הקבוצות (S, S_1, S_2, S_3) , כלומר איחוד

יריעות שממדן 1.

להצדקת דרישות נוספות של משפט 20.1.10:

בעזרת הקבוצה $U = (0, \infty)^3$ והפונקציה $f: (x, y, z) \mapsto xe^z + ye^{-z} + z - 1$ מראים

$$\text{שמתקיימת הדרישה } S' \cap U = S' \text{ ו- } \{x \in U \mid f(x) = 0\} = S' \cap U = S'$$

$$\{x \in U \mid f(x) \leq 0\} = K \cap U$$

בעזרת $f: (x, y, z) \mapsto -z$ ו- $U = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^2 \times \mathbf{R} \mid x + y < 1\}$ מראים את

הדרישה הדומה עבור S'_1 . עבור S'_2 הטיעון דומה עם $f: (x, y, z) \mapsto -y$ ו- U

מתאימה, ועבור S'_3 לוקחים $f: (x, y, z) \mapsto -x$ ו- U מתאימה. את העובדה שכל אחד

מהמשטחים S', S'_1, S'_2, S'_3 הוא קבוצה בעלת שטח מוכלל אפשר לקבל מכך שהקבוצות

S, S_1, S_2, S_3 בעלות שטח בעזרת שאלה 28.1.10 וטיעון דומה לשאלה 25.1.10.

לשאלה 4: וריאציה קלה על 6\81\ב\2025 שכמעט זה ל-5\15\ב\2023 (עם $\varepsilon = 1$).

הפונקציה F היא פונקציה אפינית הפיכה. נסמן את ההופכית שלה ב- φ .

$$K = \{x \in \mathbf{R}^k \mid |F(x)| \leq \varepsilon\} = F^{-1}(\bar{B}^k(0; \varepsilon)) = \varphi(\bar{B}^k(0; \varepsilon)) \quad \text{רואים ש-}$$

$$S = \{x \in \mathbf{R}^k \mid |F(x)| = \varepsilon\} = F^{-1}(S^{k-1}(0; \varepsilon)) = \varphi(S^{k-1}(0; \varepsilon)) \quad \text{ו-}$$

מהידע שלנו על כדורים ושפותיהם, ועל כך שפונקציות אפיניות הפיכות הן

הומאומורפיזמים, נוכל מיד להסיק ש- S היא משטח על חלק ו- $S = \partial K = \partial(K \setminus \partial K)$,

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \int_K \nabla \cdot F \quad \text{ולכן: (12.1.10)} \quad \text{וכן שמתקיימים כל תנאי משפט הדיברגנץ}$$

לחישוב האינטגרל הימני נוכל להשתמש בהחלפת משתנים. אפשר ראשית:

$$\nabla \cdot F = \operatorname{tr} JF = \operatorname{tr} A$$

$$\det JF = \det A \Rightarrow \det J\varphi = \det(J\varphi)^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad \text{כמוכן:}$$

ועכשיו, בעזרת משפט 23.9.2 (החלפת משתנים באינטגרל) ודוגמה 31.9.1 (נפח כדור):

$$\int_K \nabla \cdot F = \int_{\varphi^{-1}(K)} ((\nabla \cdot F) \circ \varphi) |\det J\varphi| = \frac{\operatorname{tr} A}{\det A} \operatorname{vol}_k(\bar{B}^k(0; \varepsilon)) = \frac{\operatorname{tr} A}{\det A} \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \cdot \varepsilon^k$$