# מתווה לפתרון ממ"ן 16

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 סמסטר: 2026א1

חומר הלימוד למטלה: פרק 10 משקל המטלה: 4 נקודות

**שאלה 1** (25 נקודות)

יהי $R>0$, תהי $\varphi:[0,R]\to\mathbf{R}$ פונקציה אינטגרבילית בקטע $[0,R]$ ותהי: $f:\bar{B}\left(0^{[k]};R\right)\to\mathbf{R}$
$x\mapsto\varphi(|x|)$

הוכיחו ש־ $f$ אינטגרבילית בקבוצה $K=\bar{B}\left(0^{[k]};R\right)$ ושמתקיים: $\int_K f=\frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int_0^R\varphi(t)t^{k-1}dt$

היעזרו בשאלה 23.ג.10 ובהגדרת האינטגרביליות ותוצאות שונות מפרק 9.

**פתרון**

את העובדה ש־ $f$ אינטגרבילית ב־ $K$ אפשר להוכיח כמו בפתרון שאלה 1 מממ"ן 14 בשנת 2022.

נוכיח כאן בדרך אחרת. ראשית ניתן כמה סימנים שיחסכו כתיבה בהמשך. נסמן: $\gamma=\frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$

עבור קבוצה $I\subseteq[0,\infty)$ נסמן: $K_I=\left\{x\in\mathbf{R}^k\,\middle|\,|x|\in I\right\}$

אם $I\subseteq(0,\infty)$ אפשר לרשום גם: $K_i=\bigcup_{r\in I}S^{k-1}\left(0^{[k]};r\right)$

בפרט עבור $0<\alpha<\beta$ מתקיים $K_{[\alpha,\beta]}=\left\{x\in\mathbf{R}^k\,\middle|\,\alpha\le|x|\le\beta\right\}=\bar{B}\left(0^{[k]};\beta\right)\setminus B\left(0^{[k]};\alpha\right)$

ועבור $0=\alpha<\beta$ מתקיים: $K_{[\alpha,\beta]}=\left\{x\in\mathbf{R}^k\,\middle|\,0\le|x|\le\beta\right\}=\bar{B}\left(0^{[k]};\beta\right)$

בסימוני השאלה $K=K_{[0,R]}$.

יהיו פונקציה $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}$ ו־ $f:K_{[\alpha,\beta]}\to\mathbf{R}$ המוגדרת על ידי: $f:x\mapsto\varphi(|x|)$

שאלה 23.ג.10 בספר אומרת שאם $0<\alpha<\beta$ ו־$\varphi$ רציפה אז $f$ אינטגרבילית ב־ $K_{[\alpha,\beta]}$ ונכונה הנוסחה:

$$\int_{K_{[\alpha,\beta]}}f=\gamma\int_\alpha^\beta\varphi(t)t^{k-1}dt$$

בשאלה זאת התבקשתם להוכיח ש־ $f$ אינטגרבילית ב־ $K_{[\alpha,\beta]}$ ושנכונה אותה נוסחה גם אם $0=\alpha<\beta$ וגם אם במקום להניח ש־$\varphi$ רציפה מניחים רק שהיא אינטגרבילית ב־ $[\alpha,\beta]$.

**בשלב ראשון** נוכיח את מסקנות שאלה 23.ב.10 כאשר $0<\alpha<\beta$ והפונקציה $\varphi$ רציפה למקוטעין בקטע $[\alpha,\beta]$. פירוש הדבר הוא שיש חלוקה $T=(t_i)_{i=0}^r$ של הקטע $[\alpha,\beta]$ כך שבכל אחד מהקטעים הפתוחים $(t_{i-1},t_i)$ הפונקציה $\varphi$ רציפה, ובנוסף יש לה גבולות חד־צדדיים בקצות

הקטעים האלה. הנחה זאת שקולה לכך שעבור $i=1,\ldots,r$ יש פונקציה רציפה $\varphi_i:\left[t_{i-1},t_i\right]\to \mathbf{R}$ כך ש־ $\varphi(t)=\varphi_i(t)$ לכל $t\in\left(t_{i-1},t_i\right)$.

נסמן $K=K_{[\alpha,\beta]}$ ועבור $i=1,\ldots,r$ נסמן $K_i=K_{\left[t_{i-1},t_i\right]}$ ו־ $K_i'=K_{\left(t_{i-1},t_i\right)}$. נסמן $f_i:x\mapsto\varphi_i\left(|x|\right)$.

משאלה 23.ג.10 נובע שמתקיים: $$\int_{K_i} f_i=\gamma\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi_i(t)t^{k-1}dt$$

מאחר ש־ $\varphi|_{\left(t_{i-1},t_i\right)}=\varphi_i|_{\left(t_{i-1},t_i\right)}$ מתקיים גם $f|_{K_i'}=f_i|_{K_i'}$ ולכן: $$\int_{K_i'} f=\int_{K_i'} f_i$$

הקבוצה $K_i\setminus K_i'=S^{k-1}\left(0^{[k]};t_{i-1}\right)\cup S^{k-1}\left(0^{[k]};t_i\right)$ היא קבוצה בעלת נפח אפס, ולכן מאדיטיביות האינטגרל מתקיים:
$$\int_{K_i'} f_i=\int_{K_i'} f_i+0=\int_{K_i'} f_i+\int_{K_i\setminus K_i'} f_i=\int_{K_i} f_i=\gamma\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi_i(t)t^{k-1}dt$$

ומכאן: $$\int_{K_i'} f=\gamma\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi_i(t)t^{k-1}dt$$

הקבוצה $L=K\setminus\left(K_1'\cup\cdots\cup K_r'\right)=\bigcup_{i=0}^{r}S^{k-1}\left(0^{[k]};t_i\right)$ היא בעלת נפח אפס, ולכן שוב מאדיטיביות האינטגרל, הפונקציה $f$ אינטגרבילית ב־ $K=K_1'\cup\cdots\cup K_r'\cup L$ ומתקיים:

$$\int_K f=\int_{K_1'} f+\cdots+\int_{K_r'} f+\int_L f=\sum_{i=1}^{r}\gamma\int_{t_{i-1}}^{t_i}\varphi_i(t)t^{k-1}dt+0=\gamma\int_{\alpha}^{\beta}\varphi_i(t)t^{k-1}dt$$

זה כאמור הוכיח שהנוסחה משאלה 23.ג.10 תקפה גם אם $0<\alpha<\beta$ ו־ $\varphi$ רציפה למקוטעין.

**בשלב שני** נוכיח שהיא תקפה גם אם $0<\alpha<\beta$ ו־ $\varphi$ אינטגרבילית ב־ $[\alpha,\beta]$.

נסמן $\psi:t\mapsto\varphi(t)t^{k-1}$. לפי טענה 26.ה.9 זאת פונקציה אינטגרבילית ב־ $[a,\beta]$.

נסמן $s=\gamma\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)dt$. עלינו להוכיח ש־ $f$ אינטגרבילית ב־ $K=K_{[\alpha,\beta]}$ ושמתקיים: $$\int_K f=s$$

יהי $\varepsilon>0$ ונסמן $\delta=\dfrac{\varepsilon}{\gamma+1}$ (סוף סוף נראה כמו אינפי...).

מאחר ש־ $\psi$ אינטגרבילית ב־ $[\alpha,\beta]$ ו־ $\int_{\alpha}^{\beta}\psi(t)dt=\dfrac{s}{\gamma}$ יש חלוקה $T=\left(t_i\right)_{i=0}^{r}$ עבורה:

$$\frac{s}{\gamma}-\delta<\underline{S}_T(\psi)\le\overline{S}_T(\psi)<\frac{s}{\gamma}+\delta$$

נסמן: $$m_i=\inf\psi\left(\left[t_{i-1},t_i\right]\right)\qquad M_i=\sup\psi\left(\left[t_{i-1},t_i\right]\right)$$

אז: $$\underline{S}_T(\psi)=\sum_{i=1}^{r}m_i\left(t_i-t_{i-1}\right)\qquad\overline{S}_T(\psi)=\sum_{i=1}^{r}M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)$$

נגדיר שתי פונקציות רציפות למקוטעין בקטע $\left[\alpha,\beta\right]$ :

עבור $i=0,1,\ldots,r$ נגדיר $\underline{\varphi}\left(t_i\right)=\overline{\varphi}\left(t_i\right)=\varphi\left(t_i\right)$ . עבור $t\in\left(t_{i-1},t_i\right)$ נגדיר : $\underline{\varphi}\left(t\right)=m_i t^{1-k}$
$\overline{\varphi}\left(t\right)=M_i t^{1-k}$

עבור $t\in\left(t_{i-1},t_i\right)$ מ־ $m_i\le\psi\left(t\right)\le M_i$ נובע $m_i t^{1-k}\le\psi\left(t\right)t^{1-k}\le M_i t^{1-k}$ כלומר $\underline{\varphi}\left(t\right)\le\varphi\left(t\right)\le\overline{\varphi}\left(t\right)$

, ובסך הכל לכל $t\in\left[\alpha,\beta\right]$ מתקיים : $\underline{\varphi}\left(t\right)\le\varphi\left(t\right)\le\overline{\varphi}\left(t\right)$

נגדיר פונקציות $\underline{f},\overline{f}:K=K_{\left[\alpha,\beta\right]}\to\mathbf{R}$ על ידי $\underline{f}:x\mapsto\underline{\varphi}\left(\left|x\right|\right)$ ו־ $\overline{f}:x\mapsto\overline{\varphi}\left(\left|x\right|\right)$ .

אז $\underline{f}\left(x\right)\le f\left(x\right)\le\overline{f}\left(x\right)$ לכל $x\in K$ .

הפונקציות $\underline{\varphi}$ ו־ $\overline{\varphi}$ רציפות למקוטעין לפי הגדרתן, ולפי מה שהוכחנו בשלב הראשון מתקיים :

$$\int_K\underline{f}=\gamma\int_\alpha^\beta\underline{\varphi}\left(t\right)t^{k-1}dt=\gamma\sum_{i=1}^r\int_{t_{i-1}}^{t_i}\underline{\varphi}\left(t\right)t^{k-1}dt=\gamma\sum_{i=1}^r\int_{t_{i-1}}^{t_i}m_i t^{1-k}t^{k-1}dt$$
$$=\gamma\sum_{i=1}^r\int_{t_{i-1}}^{t_i}m_i dt=\gamma\sum_{i=1}^r m_i\left(t_i-t_{i-1}\right)=\gamma\underline{S}_T\left(\psi\right)$$

$$\int_K\overline{f}=\gamma\int_\alpha^\beta\overline{\varphi}\left(t\right)t^{k-1}dt=\gamma\sum_{i=1}^r\int_{t_{i-1}}^{t_i}\overline{\varphi}\left(t\right)t^{k-1}dt=\gamma\sum_{i=1}^r\int_{t_{i-1}}^{t_i}M_i t^{1-k}t^{k-1}dt$$
$$=\gamma\sum_{i=1}^r\int_{t_{i-1}}^{t_i}M_i dt=\gamma\sum_{i=1}^r M_i\left(t_i-t_{i-1}\right)=\gamma\overline{S}_T\left(\psi\right)$$

יחד עם מה שראינו קודם :
$$\int_K\underline{f}=\gamma\underline{S}_T\left(\psi\right)>\gamma\left(\frac{s}{\gamma}-\delta\right)=s-\gamma\delta$$
$$\int_K\overline{f}=\gamma\overline{S}_T\left(\psi\right)<\gamma\left(\frac{s}{\gamma}+\delta\right)=s+\gamma\delta$$

נסמן $B=\left[-\beta,\beta\right]^k$ . זאת תיבה סגורה מיושרת שמכילה את $K$ ולפי הגדרה 3.ג.9 כדי להוכיח ש־ $f$ אינטגרבילית ב־ $K$ עלינו להוכיח ש־ $f_K$ אינטגרבילית בתיבה $B$ , ואז $\int_K f=\int_B f_K$ .

הפונקציות $\underline{f}$ ו־ $\overline{f}$ אינטגרביליות ב־ $K$ ולכן הפונקציות $\underline{f}_K$ ו־ $\overline{f}_K$ אינטגרביליות ב־ $B$ .

אז יש פירוק $\underline{P}$ של התיבה $B$ עבורו $\underline{S}_{\underline{P}}\left(\underline{f}_K\right)>\int_F\underline{f}_K-\delta>s-\gamma\delta-\delta=s-\left(\gamma+1\right)\delta=s-\varepsilon$

ויש פירוק $\overline{P}$ של התיבה $B$ עבורו : $\overline{S}_{\overline{P}}\left(\overline{f}_K\right)<\int_F\overline{f}_K+\delta<s+\gamma\delta+\delta=s\left(\gamma+1\right)\delta=s+\varepsilon$

ראינו כבר ש־ $\underline{f}\left(x\right)\le f\left(x\right)\le\overline{f}\left(x\right)$ לכל $x\in K$ ולכן לכל $x\in B$ : $\underline{f}_K\left(x\right)\le f_K\left(x\right)\le\overline{f}_K\left(x\right)$

לכן $\underline{S}_{\underline{P}}\left(\underline{f}_K\right)\le\underline{S}_{\underline{P}}\left(f_K\right)\le\overline{S}_{\overline{P}}\left(f_K\right)\le\overline{S}_{\overline{P}}\left(\overline{f}_K\right)$ ומכאן : $s-\varepsilon<\underline{S}_{\underline{P}}\left(f_K\right)\le\overline{S}_{\overline{P}}\left(f_K\right)<s+\varepsilon$

לכן על־פי הגדרה 13.ב.9 $f_K$ אינטגרבילית ב־$B$ ו־ $\int\limits_B f_K = s$ ולפי הגדרה 3.ג.9 הפונקציה $f$

אינטגרבילית בקבוצה $K$ ומתקיים: $\int\limits_K f = \int\limits_B f_K = s = \gamma\int\limits_\alpha^\beta \varphi(t)t^{k-1}dt$

**כשלב שלישי ואחרון** נוכיח את הנדרש בשאלה (המקרה $\alpha = 0$ ו־ $\beta = R > 0$).

כעת נסמן כמו בשאלה $K = K_{[0,R]}$ ונניח ש־ $\varphi:[0,R]\to\mathbf{R}$ היא פונקציה אינטגרבילית ב־$[0,R]$.

נסמן $K_n = K_{\left[\frac{1}{n},R\right]}$ ו־ $Z = \left\{0^{[k]}\right\}$. אז $Z$ היא קבוצה צנומה ב־ $R^k$ ו־ $(K_n)_{n=1}^\infty$ היא סדרת קבוצות בעלות נפח שעולה לקבוצה $K \setminus Z$.

ידוע לנו כבר מהשלב השני ש־ $f$ אינטגרבילית ב־$K_n$ ושמתקיים: $\int\limits_{K_n} f = \gamma\int\limits_{\frac{1}{n}}^R \varphi(t)t^{k-1}dt$

בפרט לכל מספר טבעי $n$ הקבוצה $K_n \setminus \operatorname{cont}(f)$ היא קבוצה צנומה. אז $Z \cup \bigcup\limits_{n=1}^\infty K_n \setminus \operatorname{cont}(f)$ היא קבוצה צנומה שמכילה את $K \setminus \operatorname{cont}(f)$. אז $K \setminus \operatorname{cont}(f)$ היא צנומה. כמוכן $\varphi$ היא פונקציה אינטגרבילית ולכן חסומה בקטע $[0,R]$, ולכן הפונקציה $f$ חסומה ב־ $K$.

לפי מסקנה 28.ה.9 הפונקציה $f$ אינטגרבילית ב־ $K$. לפי טענה 32.ה.9 מתקיים:

$$\int\limits_{K_n} f \xrightarrow[n\to\infty]{} \int\limits_K f$$

מצד שני $\int\limits_{K_n} f = \gamma\int\limits_{\frac{1}{n}}^R \varphi(t)t^{k-1}dt \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma\int\limits_0^R \varphi(t)t^{k-1}dt$

ולכן: $\int\limits_K f = \gamma\int\limits_0^R \varphi(t)t^{k-1}dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}\int\limits_0^R \varphi(t)t^{k-1}dt$

## שאלה 2 (25 נקודות)

הראו שהקבוצה $C=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x+2y+3z=4, x^2+y^2=2x\right\}$ היא יריעה חלקה חד־ממדית.

תהי $\varphi:[0,4]\to\mathbf{R}^3$ לולאה פשוטה שתמונתה $C$, ושידוע עליה:

$$\varphi(0)=\left(0,0,\tfrac{4}{3}\right),\varphi(2)=\left(2,0,\tfrac{2}{3}\right),\varphi(3)=\left(1,1,\tfrac{1}{3}\right)$$

חשבו את האינטגרל $\oint_\varphi Pdx+Qdy+Rdz$

כאשר: $P=x+2y+3z,\quad Q=y+2z+3x,\quad R=z+2x+3y$

**פתרון**

הקבוצה $C$ מוכלת בקבוצה $H=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x+2y+3z=4\right\}$ שהיא מישור אפיני, ולכן טלאי חלק דו־ממדי במרחב האוקלידי התלת ממדי. היא הגרף של הפונקציה האפינית $f:(x,y)\mapsto\frac{4-x-2y}{3}$

ולכן, כמו בדוגמה 7.ג.7, היא תמונת המיפוי $(\Omega,h)$ עם $\Omega=\mathbf{R}^2$ ו־ $h:(x,y)\mapsto(x,y,f(x,y))$

נוכל אפוא להשתמש במשפט קלוין–סטוקס.

נשים לב ש־ $h^{-1}:H=h(\Omega)\to\Omega$ היא צמצום הפונקציה $(x,y,z)\mapsto(x,y)$.

נסמן $\psi=h^{-1}\circ\varphi$. מאחר ש־$h^{-1}$ הפיכה הפונקציה $\psi$ היא לולאה שתמונתה $h^{-1}(C)$.

כמוכן מאחר ש־$h^{-1}$ פונקציה הפיכה ו־$\varphi$ לולאה פשוטה בהכרח גם $\psi$ לולאה פשוטה.

מתקיים: $h^{-1}(C)=\left\{(x,y)\,\middle|\,(x,y,z)\in C\right\}=\left\{(x,y)\,\middle|\, x^2+y^2=2x\right\}$

$$=\left\{(x,y,z)\,\middle|\, x^2-2x+1+y^2=1\right\}=\left\{(x,y,z)\,\middle|\,(x-1)^2+y^2=1\right\}=S((1,0);1)$$

אם כך $\psi$ היא לולאה פשוטה שתמונתה היא המעגל ברדיוס 1 סביב הנקודה $(1,0)$ במישור.

ידוע גם: $\psi(0)=h^{-1}\circ\varphi(0)=(0,0),\quad \psi(2)=h^{-1}\circ\varphi(2)=(2,0),\quad \psi(3)=h^{-1}\circ\varphi(3)=(1,1)$

אפשר להציג את הלולאה $\psi$ כשרשור של מסילות פשוטות: $\psi=\psi|_{[0,2]}*\psi|_{[2,3]}*\psi|_{[3,4]}$

התמונות של שלוש המסילות האלה הן הקשתות של המעגל $S((1,0);1)$ שמופרדות על ידי שלוש הנקודות $\psi(0),\psi(2),\psi(3)$.

נתבונן בלולאה מוכרת שתמונתה היא אותו מעגל:

$$\gamma:[-\pi,\pi]\to\mathbf{R}^2$$
$$t\mapsto(1,0)+(\cos t.\sin t)$$

גם $\gamma$ היא לולאה פשוטה והיא גם לולאה סדירה.

בנוסף, בדומה לדוגמה 9.ט.9, העיגול $K=\overline{B}((1,0);1)$ שוכן לשמאלה של הלולאה הסדירה $\gamma$.

מתקיים $\gamma(-\pi)=(0,0)=\psi(0),\quad \gamma(0)=(2,0)=\psi(2),\quad \gamma\left(\frac{\pi}{2}\right)=(1,1)=\psi(3)$

ולכן $\gamma$ היא שרשור של שלוש מסילות פשוטות (וסדירות) שתמונותיהן אותן שלוש קשתות של המעגל: $\gamma=\gamma|_{[-\pi,0]}*\gamma|_{\left[0,\frac{\pi}{2}\right]}*\gamma|_{\left[\frac{\pi}{2},\pi\right]}$

לשלוש המסילות הפשוטות האלה יש אותן תמונות ואותם מוצא ויעד כמו שלוש המסילות הפשוטות שמרכיבות את $\psi$, ולפי טענה 13.א.8 הן שקולות זו לזו, בהתאמה.

לכן גם הלולאה $\gamma$ שקולה ללולאה $\psi$. אז גם הלולאה $h\circ\gamma$ שקולה ללולאה $\varphi = h\circ\psi$ ולפי טענה 15.ו.8 מתקיים השוויון:
$$\oint_\varphi Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{h\circ\gamma} Pdx + Qdy + Rdz$$

האמת היא שלא קשה לחשב את האינטגרל המסילתי באגף ימין של השוויון האחרון בעזרת משפט 24.ו.8, אבל אנחנו בכל זאת נשתמש במשפט קלוין–סטוקס.

הלולאה $\gamma$ יחד עם העיגול הסגור $K = \overline{B}\left((1,0);1\right)$ מקיימות יחד את הנחות משפט גרין.

המיפוי $h$ הוא פונקציה אפינית ולכן כמובן רכיביו הם פונקציות גזירות פעמיים ברציפות.
לכן לפי משפט 12.ה.10 מתקיים

$$\begin{aligned}\oint_{h\circ\gamma} Pdx + Qdy + Rdz &= \iint\limits_{h(K)} \left(\tfrac{\partial R}{\partial y} - \tfrac{\partial Q}{\partial z}\right) dy\wedge dz - \left(\tfrac{\partial P}{\partial z} - \tfrac{\partial R}{\partial x}\right) dx\wedge dz + \left(\tfrac{\partial Q}{\partial x} - \tfrac{\partial P}{\partial y}\right) dx\wedge dy \\ &= \iint\limits_{h(K)} (3-2)\,dy\wedge dz - (3-2)\,dx\wedge dz + (3-2)\,dx\wedge dy \\ &= \iint\limits_{h(K)} 1dy\wedge dz - 1dx\wedge dz + 1dx\wedge dy = \iint\limits_{h(K)} (1,1,1)\cdot N\, d\sigma_2\end{aligned}$$

כאשר $N$ הוא נורמל היחידה הרציף למשטח $H = h(\Omega)$ שמשרה המיפוי $(\Omega, h)$.

אפשר גם להיעזר בדוגמה 10.ה.10 ולקבל

$$\oint_{h\circ\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \iint\limits_{h(K)} 1dy\wedge dz - 1dx\wedge dz + 1dx\wedge dy = \iint\limits_{K} (1,1,1)\cdot \nu_h$$

כאשר לפי הגדרה 20.ד.10:

$$\begin{aligned}\nu_h(x,y) &= \left(\tfrac{\partial [h]_1}{\partial x}, \tfrac{\partial [h]_2}{\partial x}, \tfrac{\partial [h]_3}{\partial x}\right) \times \left(\tfrac{\partial [h]_1}{\partial y}, \tfrac{\partial [h]_2}{\partial y}, \tfrac{\partial [h]_3}{\partial y}\right) \\ &= \left(1,0,\tfrac{\partial f}{\partial x}\right)\times\left(0,1,\tfrac{\partial f}{\partial y}\right) = \left(1.0,-\tfrac{1}{3}\right)\times\left(0,1,-\tfrac{2}{3}\right) = \left(\tfrac{1}{3},\tfrac{2}{3},1\right) = \tfrac{1}{3}(1,2,3)\end{aligned}$$

אז:
$$\oint_\varphi Pdx + Qdy + Rdz = \oint_{h\circ\gamma} Pdx + Qdy + Rdz = \tfrac{1}{3}\iint\limits_K (1,1,1)\cdot(1,2,3) = \tfrac{1}{3}\iint\limits_K 6 = \tfrac{6}{3}\operatorname{vol}_2 K = 2\pi$$

## שאלה 3 (25 נקודות)

חשבו את האינטגרל $\iint_S xe^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz + e^z dx \wedge dy$

כאשר $S = \left\{ (x,y,z) \in [0,\infty)^3 \,\middle|\, xe^z + ye^{-z} + z = 1 \right\}$

והאוריינטציה של משטח שמכיל את $S$ מתאימה לנורמל יחידה רציף שכל רכיביו אי־שליליים.

המלצה: במקום לחשב את האינטגרל באופן ישיר, מומלץ לנצל את משפט הדיברגנץ באחת מגרסאותיו.

**פתרון**

שימו לב שהקבוצה $S$ היא גרף הפונקציה משאלה 4 בממ״ן 11.

רעיון הפתרון הוא להשתמש במשפט הדיברגנץ (בגרסה שבמשפט 20.ו.10) על הקבוצה $K$ שתחומה על ידי $S$ ושלושת מישורי הצירים.

ביתר פירוט, נסמן: $K = \left\{ (x,y,z) \in [0,\infty)^3 \,\middle|\, xe^z + ye^{-z} + z \le 1 \right\}$

אז $\partial K = S \cup S_1 \cup S_2 \cup S_3$ עם:

$$S_1 = \left\{ (x,y,0) \in [0,\infty)^3 \,\middle|\, x + y \le 1 \right\}$$

$$S_2 = \left\{ (x,0,z) \in [0,\infty)^3 \,\middle|\, xe^z + z \le 1 \right\}$$

$$S_3 = \left\{ (0,y,z) \in [0,\infty)^3 \,\middle|\, ye^{-z} + z \le 1 \right\}$$

האינטגרל המבוקש הוא $\iint_S \omega_F = \iint_S F \cdot N \, d\sigma_2$

עם התבנית $\omega_F = xe^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz + e^z dx \wedge dy$

והפונקציה $F : (x,y,z) \mapsto \left( xe^y, -e^y, e^z \right)$

הדיברגנץ הוא $\nabla \cdot F(x,y,z) = e^y - e^y + e^z = e^z$

ו־ $N$ הוא נורמל היחידה הרציף הפונה החוצה מ־ $K$.

נרצה להשתמש במשפט הדיברגנץ בגרסתו שממוספרת 20.ו.10, ולהסיק שמתקיים:

$$\iiint_K \nabla \cdot F = \iint_S \omega_F + \iint_{S_1} \omega_F + \iint_{S_2} \omega_F + \iint_{S_3} \omega_F$$

ואפשר להסיק זאת, אלא שצריך כמה שינויים עדינים כדי להתאים בדיוק לתנאי המשפט. אז קודם נחשב, ואחר־כך ננסה לתקן את הטעון תיקון כדי שתנאי המשפט יתקיימו ככתבם וכלשונם.

חישוב האינטגרל המשולש בעזרת מסקנה 26.ו.9 ממשפט פוביני:

$$\iiint_K \nabla \cdot F = \iiint_K e^z dxdydz = \int_0^1 \left( \iint_{K_z} e^z dxdy \right) dz = \int_0^1 \left( e^z \operatorname{vol}_2 (K_z) \right) dz$$

הקבוצה $K_z$ היא $K_z = \left\{ (x,y) \,\middle|\, (x,y,z) \in K \right\} = \left\{ (x,y) \in [0,\infty)^2 \,\middle|\, xe^z + ye^{-z} + z \le 1 \right\}$

עבור $z \in [0,1]$ (אחרת $K_z = \varnothing$). זה משולש ישר זווית שניצביו על שני הצירים, וקודקודיו הנקודות $(0,0)$, $\left( e^{-z}(1-z), 0 \right)$ ו־ $\left( 0, e^z \right)(1-z)$. שטחו הוא חצי מכפלת אורכי ניצביו, כלומר:

$$\operatorname{vol}_2(K)=\tfrac{1}{2}e^{-z}(1-z)e^{z}(1-z)=\tfrac{1}{2}(1-z)^2$$

לכן $$\iiint_K \nabla\cdot F=\int_0^1\left(e^z\operatorname{vol}_2(K_z)\right)dz=\tfrac{1}{2}\int_0^1\left(e^z(1-z)^2\right)dz=\cdots=e-2.5$$

כאשר החישוב על ידי אינטגרציה בחלקים.[1]

לחישוב האינטגרלים המשטחיים:

הקבוצה $S_1$ היא הגרף של הפונקציה הקבועה $(x,y)\mapsto 0$ שמצומצמת לקבוצה

$$\Gamma_1=\left\{(x,y)\in[0,\infty)^2 \,\middle|\, x+y\le 1\right\}$$

שהיא משולש ישר זווית ששטחו $\frac{1}{2}$ (למעשה $\Gamma_1=K_0$). נוכל אם כן להשתמש בשאלה 6.ג.10 לחישוב האינטגרל המשטחי הזה. נורמל יחידה למישור $xy$ שהוא משטח חלק שמכיל את $S_1$ הוא $\pm e_3=(0,0,\pm1)$, וזה שפונה החוצה מ־$K$ הוא בבירור $(0,0,-1)$, ולכן:

$$\iint_{S_1}\omega_F=\iint_{S_1}F\cdot N\,d\sigma_2=\iint_{S_1}\left(xe^y,-e^y,e^z\right)\cdot(0,0,-1)\,d\sigma_2=-\iint_{S_1}e^z\,d\sigma_2$$
$$=-\iint_{\Gamma_1}e^0\sqrt{0^2+0^2+1}\,dxdy=-\iint_{\Gamma_1}1\,dxdy=-\operatorname{vol}_2(\Gamma_1)=-\tfrac{1}{2}$$

הקבוצה $S_2$ אינה גרף של פונקציה, אבל תמורה של שיעורי הנקודות, שהיא העתקת חפיפה, מחליפה אותו בגרף של הפונקציה הקבועה 0 בקבוצה: $$\Gamma_2=\left\{(x,z)\in[0,\infty)^2 \,\middle|\, xe^z+z\le 1\right\}$$

ברור גם שנורמל היחידה עבור מישור $xz$ שמכיל את $S_2$ הפונה החוצה מ־$K$ הוא הוקטור $(0,-1,0)$. לכן:

$$\iint_{S_2}\omega_F=\iint_{S_2}F\cdot N\,d\sigma_2=\iint_{S_1}\left(xe^y,-e^y,e^z\right)\cdot(0,-1,0)\,d\sigma_2$$
$$=\iint_{S_2}e^y\,d\sigma_2=\iint_{\Gamma_2}e^0\sqrt{0^2+0^2+1}\,dxdy=\iint_{\Gamma_2}1\,dxdy=\operatorname{vol}_2(\Gamma_2)$$

נציג: $$\Gamma_2=\left\{(x,z)\,\middle|\, 0\le z\le 1, 0\le x\le e^{-z}(1-z)\right\}$$

אז: $$\iint_{S_2}\omega_F=\operatorname{vol}_2(\Gamma_2)=\int_0^1\left(\int_0^{e^{-z}(1-z)}1\right)dz=\int_0^1 e^{-z}(1-z)\,dz=\left[e^{-z}(z-1)\right]_0^1-\int_0^1 e^{-z}dz$$
$$=\left[e^{-z}(z-1)\right]_0^1+\left[e^{-z}\right]_0^1=e^{-1}(1-1)-e^0(0-1)+e^{-1}-e^0=e^{-1}$$

נורמל היחידה עבור מישור $yz$ שמכיל את $S_3$ ופונה החוצה מ־$K$ הוא $(-1,0,0)$, ולכל לכל נקודה

---

[1]
$$\int_0^1 e^z dz=\left[e^z\right]_0^1=e^1-e^0=e-1$$
$$\int_0^1 e^z(1-z)\,dz=\left[e^z(1-z)\right]_0^1+\int_0^1 e^z dz=e^1(1-1)-e^0(1-0)+(e-1)=e-2$$
$$\int_0^1 e^z(1-z)^2\,dz=\left[e^z(1-z)^2\right]_0^1+2\int_0^1 e^z(1-z)\,dz=e^1(1-1)^2-e^0(1-0)^2+2(e-2)=2e-5$$

$(x,y,z)\in S_3$ מתקיים $x=0$ ולכן $F(x,y,z)=\left(0,-e^y,e^z\right)$ ולכן ב־ $S_3$ מתקיים $F\cdot N=0$

וקיבלנו: $\iint\limits_{S_3}\omega_F=\iint\limits_{S_3}F\cdot N\,d\sigma_2=\iint\limits_{S_3}0\,d\sigma_2=0$

אז: $\iint\limits_{S}\omega_F=\iiint\limits_{K}\nabla\cdot F-\iint\limits_{S_1}\omega_F-\iint\limits_{S_2}\omega_F-\iint\limits_{S_3}\omega_F=(e-2.5)-\left(-\frac{1}{2}\right)-e^{-1}-0=e-2-e^{-1}$

מה שעוד נשאר זה להצדיק את השימוש במשפט 20.ו.10, ולשם כך דרושים שינויים קלים. בפרט הקבוצה $S$ והקבוצות $S_i$ אינן משטחים חלקים כפי שנדרש במשפט, וכדי להתאים לתנאי המשפט צריך להסיר מהן את נקודות השוליים שלהן (ולאסוף את הנקודות שהוסרו לתוך איחוד יריעות ממימד קטן יותר, כלומר 0 או 1). לשם כך אפשר לקחת:

$$S'=\left\{(x,y,z)\in(0,\infty)^3\,\middle|\,xe^z+ye^{-z}+z=1\right\}$$

$$S_1=\left\{(x,y,0)\,\middle|\,x+y<1,(x,y)\in(0,\infty)^2\right\}$$

$$S_2=\left\{(x,0,z)\,\middle|\,xe^z+z<1,(x,z)\in(0,\infty)^2\right\}$$

$$S_3=\left\{(0,y,z)\,\middle|\,ye^{-z}+z<1,(y,z)\in(0,\infty)^2\right\}$$

עכשיו אפשר לבדוק ש־ $\partial K\setminus\left(S'\cup S_1'\cup S_2\cup S_3'\right)$ מוכלת באיחוד של תמונות שש מסילות סדירות (שהן חיתוכי כל שתיים מבין הקבוצות $S,S_1,S_2,S_3$), וכל אחת מאלה מוכלת ביריעה חלקה שממדה 1.

להצדקת דרישות נוספות של משפט 20.ו.10:

בעזרת הקבוצה $U=(0,\infty)^3$ והפונקציה $f:(x,y,z)\mapsto xe^z+ye^{-z}+z-1$ מראים שמתקיימות

הדרישה $\left\{x\in U\,\middle|\,f(x)=0\right\}=S'\cap U=S'$

והדרישה: $\left\{x\in U\,\middle|\,f(x)\le 0\right\}=K\cap U$

בעזרת $f:(x,y,z)\mapsto -z$ והקבוצה הפתוחה $U=\left\{(x,y,z)\in(0.\infty)^2\times\mathbf{R}\,\middle|\,xe^z+ye^{-z}+z<1\right\}$

מראים את הדרישה הדומה עבור $S_1'$.

עבור $S_2'$ הטיעון דומה עם $f:(x,y,z)\mapsto -y$ ו־ $U$ מתאימה.

עבור $S_3'$ לוקחים $f:(x,y,z)\mapsto -x$ ו־ $U$ מתאימה.

את העובדה שכל אחד מהמשטחים $S',S_1',S_2',S_3'$ הוא קבוצה בעלת שטח מוכלל אפשר לקבל מכך שהקבוצות $S,S_1,S_2,S_3$ בעלות שטח בעזרת שאלה 28.ב.10 וטיעון דומה לשאלה 25.ב.10.

למשל עבור $S'$: הקבוצות $S$ ו־ $S'$ מוכלות בקבוצה: $H=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3\,\middle|\,xe^z+ye^{-z}+z=1\right\}$

הקבוצה $H$ היא משטח חלק ואפשר לראות זאת למשל לפי זה שהעתקת חפיפה שמוגדרת על ידי תמורה של שיעורי הנקודות מחליפה בינה לבין גרף הפונקציה $(x,z)\mapsto e^z(1-z)-xe^{2z}$

שהיא פונקציה גזירה ברציפות. כמוכן $\left(\mathbf{R}^2,h\right)$ עם $h:(x,z)\mapsto\left(x,e^z(1-z)-xe^{2z},z\right)$

היא מיפוי מלא ל־ $H$. נגדיר $K_n = H \cap \left[\frac{1}{n}, \infty\right)^3$. כמוכן $S = H \cap [0,\infty)^3$ ו־ $S' = H \cap (0,\infty)^3$.

הקבוצות $K_n$ ו־$S'$ הן תת־קבוצות סגורות וחסומות ובעלות שטח של המשטח החלק $H$.

כמוכן $S' = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$. לכל $n$ טבעי $K_n \subseteq S$ ולכן $\sigma_2(K_n) \le \sigma_2(S)$ ולכן הסדרה $\left(\sigma_2(K_n)\right)_{n=1}^{\infty}$

חסומה, ולפי שאלה 28.ב.10 הקבוצה $S'$ היא בעלת שטח מוכלל וכן: $\sigma_2(K_n) \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma_2(S')$

בנוסף, מכך שהקבוצה $S \setminus S'$ היא השוליים של $S$ (וגם של $S'$) במשטח החלק $H$, אפשר להסיק

ש־ $\sigma_2(S') = \sigma_2(S)$, וכן ש־ $\iint_{S'} F \cdot N \, d\sigma_2 = \iint_{S} F \cdot N \, d\sigma_2$. ביתר פירוט:

$$\iint_{K_n} F \cdot N \, d\sigma_2 = \iint_{h^{-1}(K_n)} (F \cdot N) \circ h \sqrt{\det\left(Jh^{\mathrm{T}} Jh\right)}$$

$$\xrightarrow[n\to\infty]{} \iint_{h^{-1}(S)} (F \cdot N) \circ h \sqrt{\det\left(Jh^{\mathrm{T}} Jh\right)} = \iint_{S} F \cdot N \, d\sigma_2$$

על פי טענה 32.ה.9, כי $h^{-1}(K_n)$ היא סדרת קבוצות בעלות שטח ב־$\mathbf{R}^2$ שעולה לקבוצה $h^{-1}(S')$,

וכן $h^{-1}(S') = h^{-1}(S) \setminus Z$, כאשר הקבוצה $Z = h^{-1}(S \setminus S')$ היא קבוצה צנומה, למשל כי היא

מוכלת בקבוצה $\{(x,z) \mid xz = 0\}$. גם

$$\iint_{K_n} F \cdot N \, d\sigma_2 = \xrightarrow[n\to\infty]{} \iint_{S'} F \cdot N \, d\sigma_2$$

ולכן:

$$\iint_{S'} F \cdot N \, d\sigma_2 = \iint_{S} F \cdot N \, d\sigma_2$$

טיעון דומה עם הפונקציה הקבועה $1$ במקום הפונקציה $F \cdot N$ מראה ש־ $\sigma_2(S') = \sigma_2(S)$.

באופן דומה אפשר לראות עבור $i \in \{1,2,3\}$ שהקבוצה $S_i$ היא בעלת שטח מוכלל ושמתקיים:

$$\iint_{S_i'} F \cdot N \, d\sigma_2 = \iint_{S_i} F \cdot N \, d\sigma_2$$

## שאלה 4 (25 נקודות)

נתונות מטריצה הפיכה $A \in M_{k\times k}(\mathbf{R})$ והפונקציה האפינית:

$$F:\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}^k$$
$$x \mapsto xA^{\mathrm{T}}$$

נתון מספר חיובי $\varepsilon$ והקבוצה:

$$S=\left\{\, x\in\mathbf{R}^k \;\middle|\; |xA^{\mathrm{T}}|=\varepsilon \,\right\}$$

הראו שמתקיים

$$\int_S F\cdot N\,d\sigma_{k-1}=\frac{\operatorname{tr} A}{|\det A|}\cdot\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\cdot\varepsilon^k$$

כאשר $N$ הוא נורמל היחידה הרציף למשטח־על $S$ שפונה החוצה מהקבוצה:

$$K=\left\{\, x\in\mathbf{R}^k \;\middle|\; |xA^{\mathrm{T}}|\le\varepsilon \,\right\}$$

תזכורת: $\operatorname{tr} A$ זאת העִקְבָּה של המטריצה $A$: סכום איברי האלכסון הראשי של המטריצה.

**פתרון**

הפונקציה $F$ היא פונקציה אפינית הפיכה. נסמן את ההופכית שלה ב־$\varphi$.

מתקיים

$$K=\left\{\, x\in\mathbf{R}^k \;\middle|\; \left|F(x)\right|\le\varepsilon \,\right\}=F^{-1}\left(\overline{B}^k(0;\varepsilon)\right)=\varphi\left(\overline{B}^k(0;\varepsilon)\right)$$

וגם:

$$S=\left\{\, x\in\mathbf{R}^k \;\middle|\; \left|F(x)\right|=\varepsilon \,\right\}=F^{-1}\left(S^{k-1}(0;\varepsilon)\right)=\varphi\left(S^{k-1}(0;\varepsilon)\right)$$

מהידע שלנו על כדורים ושפותיהם, ועל כך שפונקציות אפיניות הפיכות הן דיפאומורפיזמים, נוכל מיד להסיק ש־$S$ היא משטח־על חלק ו־$S=\partial K=\partial\left(K\setminus\partial K\right)$, וכן שמתקיימים כל תנאי משפט הדיברגנץ (12.ו.10) ולכן:

$$\int_S F\cdot N\,d\sigma_{k-1}=\int_K \nabla\cdot F$$

לחישוב האינטגרל המרובה באגף ימין נוכל להשתמש בהחלפת משתנים. נבדוק שמתקיים:

$$\nabla\cdot F=\operatorname{tr} JF=\operatorname{tr} A$$

כמוכן:

$$\det JF=\det A \quad\Rightarrow\quad \det J\varphi=\det\left(Jf\right)^{-1}=\frac{1}{\det A}$$

ועכשיו, בעזרת משפט 23.ז.9 (החלפת משתנים באינטגרל) ודוגמה 31.ו.9 (נפח כדור):

$$\int_K \nabla\cdot F=\int_{\varphi^{-1}(K)}\left(\left(\nabla\cdot F\right)\circ\varphi\right)\left|\det J\varphi\right|=\frac{\operatorname{tr} A}{|\det A|}\operatorname{vol}_k\left(\overline{B}^k(0;\varepsilon)\right)=\frac{\operatorname{tr} A}{|\det A|}\cdot\frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\cdot\varepsilon^k$$