

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

סמסטר : 2026א1

הקורס : 2024 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 9

מועד אחרון להגשה : 17.5.2026

מספר השאלות : 6

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $1 < k$. הוכיחו שכל משטח על חלק ב- $\mathbb{R}^k$ הוא קבוצה צנומה.
הערה: אפשר להיעזר למשל בכך שאוסף הקבוצות מהצורה $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_k, b_k)$ עם a_i ו- b_i מספרים רציונליים כך ש- $a_i < b_i$ הוא אוסף ברמנייה של תיבות פתוחות ב- $\mathbb{R}^k$ כך שלכל נקודה $a \in \mathbb{R}^k$ ולכל סביבה U של a יש תיבה B באוסף כך ש- $a \in B \subseteq U$.

שאלה 2 (15 נקודות)

חשבו את האינטגרל המרובה:
$$\int_{[0,1]^k} \max\{x_1, \dots, x_k\} dx_1 \cdots dx_k$$

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$ ויהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפאומורפיזם. הוכיחו ש- $|\det J\varphi_x| = 1$ לכל $x \in U$ אם ורק אם $\text{vol}_k(\varphi(K)) = \text{vol}_k(K)$ לכל $K \subseteq U$ שהיא סגורה, חסומה ובעלת נפח.

שאלה 4 (15 נקודות)

חשבו את הנפח והמרכז הגיאומטרי של הקבוצה:
$$\{(x, y, z) \mid x^2 e^{-2z} + y^2 e^{2z} \leq \sin z, 0 \leq z \leq \pi\}$$

שאלה 5 (15 נקודות)

הוכיחו שלקבוצה $A = \{(x, y, z) \mid x^2 y^2 + y^2 z^2 + z^2 x^2 \leq 1\}$ יש נפח מוכלל, דהיינו האינטגרל המוכלל של הפונקציה הקבועה $1 \mapsto (x, y, z)$ בקבוצה A מתכנס. (עצה: אל תנסו לחשב את הנפח).

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $D = \{(x, y) \mid x^2 + xy + y^2 \leq 1\}$. תהי φ לולאה פשוטה סדירה שתמונתה היא השפה של קבוצה סגורה וחסומה A השוכנת לשמאל הלולאה φ , כך שראשית הצירים היא נקודה פנימית של A . הוכיחו כי:
$$\text{vol}_2(D) = \frac{1}{2} \oint_{\varphi} \frac{xdy - ydx}{x^2 + xy + y^2}$$

רמז: ראשית הראו שהנוסחה נכונה בהנחה ש- $A = D$. אחרי כן הראו שהיא נכונה גם ללא הנחה זאת.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: נסמן את המשטח על ב' H . לפי מסקנה 12.ג.7 לכל נקודה $a \in H$ יש סביבה $\tilde{U}$ כך שמתקיים

$$H \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid F(x) = F(a)\}$$

עם פונקציה $F: \tilde{U} \rightarrow \mathbb{R}$ שהיא גזירה ברציפות ו- $\nabla F(a) \neq 0$.

ממשפט 3.ב.7 (משפט ההגדרה הסתומה) והערה 7.ב.7 המשוואה $F(x) = F(a)$ מגדירה את אחד מבין המשתנים כפונקציות גזירות ברציפות של $k-1$ המשתנים הנותרים בסביבת הנקודה a . ליתר דיוק יש קבוצה פתוחה U ב- $\mathbb{R}^{k-1}$ ו- W ב- $\mathbb{R}$ ופונקציה $f: U \rightarrow W$ ותמורה σ של המספרים $1, 2, \dots, k$ כך ש-

$$\varphi: (x_1, x_2, \dots, x_k) \mapsto (x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}, \dots, x_{\sigma(k)}) \text{ כאשר } \varphi(H \cap \tilde{U}) \cap (U \times W) = G(f)$$

היא פונקציה אפינית הפיכה.

אפשר גם ללא הגבלת הכלליות להניח ש- $U \times W = (a_1, b_1) \times \dots \times (a_k, b_k)$ עם a_i ו- b_i מספרים רציונליים. בעזרת טענה 11.ד.9 מקבלים ש- $G(f)$ קבוצה בעלת נפח אפס (לא בדיוק: יש לפרט). בעזרת חלק ב של שאלה 25.ד.9 (או בדרך פשוטה וישירה יותר) הקבוצה $H \cap \tilde{U} \cap \varphi^{-1}(U \times W)$ בעלת נפח אפס. בסך הכל אפשר להסיק שלכל נקודה $a \in H$ יש סביבה פתוחה U_a שהיא מהצורה $(a_1, b_1) \times \dots \times (a_k, b_k)$ עם a_i ו- b_i מספרים רציונליים כך ש- $H \cap U_a$ היא קבוצה בעלת נפח אפס, ובפרט היא קבוצה צנומה, וכיוון שיש רק מספר בן-מנייה של סביבות מצורה זאת, קיבלנו ש- H היא איחוד בן-מנייה של קבוצות צנומות, ולכן היא קבוצה צנומה.

לשאלה 2: $2 \setminus 14 \setminus 2021 = 2 \setminus 14 \setminus 2020$ עם שינוי קל מ- $\min$ ל- $\max$.

לשאלה 3: $5 \setminus 72 \setminus 2020 = 3 \setminus 14 \setminus 2021$

לשאלה 4: $5 \setminus 16 \setminus 2013 = 3 \setminus 14 \setminus 2020$

לשאלה 5: $5 \setminus 85 \setminus 2020 = 4 \setminus 14 \setminus 2021$

לשאלה 6: $5 \setminus 14 \setminus 2020 = 5 \setminus 14 \setminus 2020$. הניסוח בכוונה עוקב מילה במילה אחרי שאלה 22.ט.9 בספר.