מתווה לפתרון ממ"ן 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3   סמסטר: 2026א1

חומר הלימוד למטלה: פרק 9   משקל המטלה: 4 נקודות

שאלה 1 **(20 נקודות)**

יהי $1<k$. הוכיחו שכל משטח־על חלק ב־ $\mathbf{R}^k$ הוא קבוצה צנומה.

הערה: אפשר להיעזר למשל בכך שאוסף הקבוצות מהצורה $(a_1,b_1)\times\cdots\times(a_k,b_k)$ עם a_i ו־ b_i מספרים רציונליים כך ש־ $a_i<b_i$ הוא אוסף בן־מנייה של תיבות פתוחות ב־ $\mathbf{R}^k$ כך שלכל נקודה $a\in\mathbf{R}^k$ ולכל סביבה U של a יש תיבה B באוסף כך ש־ $a\in B\subseteq U$.

פתרון

נסתמך על טענה דומה לזאת שבהערה בגוף השאלה:

טענת עזר 1:

תהי U סביבה של $a=(a_1,,\dots,a_k)\in\mathbf{R}^k$. יש מספרים רציונליים $\alpha_1,\beta_1,\dots,\alpha_k,\beta_k$ כך שמתקיים: $a\in(\alpha_1\times\beta_1)\times\cdots\times(\alpha_k,\beta_k)\subseteq[\alpha_1\times\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_k,\beta_k]\subseteq U$

יהי H משטח־על נסמן את אוסף התיבות הסגורות המתואר בטענת עזר 1 כך:

$\mathscr{B}=\{[\alpha_1\times\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_k,\beta_k]\mid\alpha_i,\beta_i\in\mathbf{Q},\alpha_i<\beta_i,i=1,\dots,k\}$

טענת עזר 2:

לכל $a\in H$ יש $B_a\in\mathscr{B}$ כל ש־ $a\in B_a$ וכך ש־ $H\cap B_a$ היא קבוצה בעלת נפח אפס.

לפני שנוכיח את טענות העזר נראה איך נובעת מהן הטענה שבשאלה:

נסמן $\mathscr{C}=\{B_a\mid a\in H\}$. אז $\mathscr{C}$ היא קבוצה בת מניה, כי היא תת־קבוצה של $\mathscr{B}$ שהיא קבוצה בת־מניה, ולכל $B\in\mathscr{C}$ יש $a\in H$ כך ש־ $B=B_a$ ולכן $H\cap B=H\cap B_a$ היא קבוצה בעלת נפח אפס, ולפי אבחנה 9.ה.7 היא קבוצה צנומה. מתקיים בבירור: $H=\bigcup_{a\in H}H\cap B_a=\bigcup_{B\in\mathscr{C}}H\cap B$

לכן H היא איחוד של אוסף בן־מניה של קבוצות צנומות, ולפי חלק ב של טענה 9.ה.16 הקבוצה H עצמה היא קבוצה צנומה.

הוכחת טענת עזר 2:

לפי מסקנה 7.ג.12 יש סביבה $\tilde{U}$ של a כך שמתקיים $H\cap\tilde{U}=\{x\in\tilde{U}\mid F(x)=F(a)\}$ עם פונקציה $F:\tilde{U}\to\mathbf{R}$ שהיא גזירה ברציפות ו־ $\nabla F(a)\neq0$.

ממשפט 7.ב.3 (משפט ההגדרה הסתומה) והערה 7.ב.7 המשוואה $F(x)=F(a)$ מגדירה את אחד מבין המשתנים כפונקציה גזירה ברציפות של $k-1$ המשתנים הנותרים בסביבת הנקודה a. ליתר דיוק: יש קבוצות פתוחות U ב־ $\mathbf{R}^{k-1}$ ו־ W ב־ $\mathbf{R}$ ופונקציה $f:U\to W$ שהיא גזירה ברציפות ב־ U ותמורה σ של המספרים $1,2,\dots,k$ כך שמתקיים $\varphi(H\cap\tilde{U})\cap(U\times W)=G(f)$

כאשר $\varphi:(x_1,x_2,\dots,x_k)\mapsto\left(x_{\sigma(1)},x_{\sigma(2)},\dots,x_{\sigma(k)}\right)$

היא פונקציה אפינית הפיכה, ו־ $\varphi(a)\in U\times W$. נסמן: $\varphi(a)=(u,w)$

עם $u\in U$ ו־ $w\in W$. מטענת עזר 1 (עם $k=1$) יש מספרים רציונליים $\alpha_k,\beta_k\in\mathbf{Q}$ כך שמתקיים $w\in(\alpha_k,\beta_k)\subseteq[\alpha_k,\beta_k]\subseteq W$. הפונקציה f גזירה ברציפות ב־ U ולכן היא רציפה ב־ U ובפרט היא רציפה בנקודה u, ולפי חלק ג של אבחנה 2.ד.2 יש סביבה V של u כך שמתקיים $f(V)\subseteq(\alpha_k,\beta_k)$. מטענת עזר 1 נובע שעבור $i=1,\dots,k-1$ יש מספרים רציונליים $\alpha_i,\beta_i\in\mathbf{Q}$ כך שמתקיים: $u\in(\alpha_1,\beta_1)\times\cdots\times(\alpha_{k-1},\beta_{k-1})\subseteq[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_{k-1},\beta_{k-1}]\subseteq V$

נסמן: $B=[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_k,\beta_k]$

אז $B\cap G(f)=G\left(f|_{[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_{k-1},\beta_{k-1}]}\right)$

מתקיים $[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_{k-1},\beta_{k-1}]\subseteq U$ ולכן הפונקציה $f|_{[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_{k-1},\beta_{k-1}]}$ היא פונקציה רציפה בתיבה סגורה ומיושרת, ולפי טענה 30.ב.9 היא פונקציה אינטגרבילית בתיבה זאת.

לכן מטענה 11.ד.9 נובע ש־ $B\cap G(f)=G\left(f|_{[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_{k-1},\beta_{k-1}]}\right)$ היא קבוצה בעלת נפח אפס.

מתקיים $\varphi(a)=(u,v)\in B$. נסמן: $B_a=\varphi^{-1}(B)$

אז $a\in B_a$. בנוסף מתקיים $B\in\mathscr{B}$ וגם $B_a\in\mathscr{B}$ ומתקיים $B_a\cap H=\varphi^{-1}(B\cap G(f))$

ולפי שאלה 25.ד.9 הקבוצה $B_a\cap H$ היא בעלת נפח אפס.

הוכחת טענת עזר 1:

לפי הגדרה 14.א.2 יש $r>0$ כך ש־ $B(a;r)\subseteq U$.

כידוע בכל קטע פתוח ב־ $\mathbf{R}$ יש מספר רציונלי (משפט 1.66 מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1).

לכן יש מספרים רציונליים $\alpha_i,\beta_i\in\mathbf{Q}$ כך שמתקיים: $a_i-\frac{r}{\sqrt{k}}<\alpha_i<a_i<\beta_i<a_i+\frac{r}{\sqrt{k}}$

נסמן: $B=[\alpha_1,\beta_1]\times\cdots\times[\alpha_k,\beta_k]$ $\qquad A=(\alpha_1,\beta_1)\times\cdots\times(\alpha_k,\beta_k)$

אז בבירור $a\in A$.

אם $x=(x_1,\dots,x_k)\in B$ אז לכל $i\in\{1,\dots,k\}$ מתקיים $x_i\in[\alpha_i,\beta_i]\subseteq\left(a_i-\frac{r}{\sqrt{k}},a_i+\frac{r}{\sqrt{k}}\right)$

ולכן $|x_i-a_i|<\frac{r}{\sqrt{k}}$ ולפי טענה 1 .ד.10 $|x-a|\le\sqrt{k}\max_{1\le i\le k}|x_i-a_i|<\sqrt{k}\frac{r}{\sqrt{k}}=r$

ואם כך $x\in B(a;r)\subseteq U$, ולכן $B\subseteq U$.

שאלה 2 (15 נקודות)

חשבו את האינטגרל המרובה: $\displaystyle\int_{[0,1]^k} \max\{x_1,\dots,x_k\}\,dx_1\cdots dx_k$

פתרון

נסמן $B=[0,1]^k$. נסמן $x=(x_1,,\dots,x_k)$ ונסמן: $f:x\mapsto \max\{x_1,\dots,x_k\}$

עבור $j=1,\dots,k$ נסמן: $K_j=\{x\in B \mid x_i\le x_j, i=1,\dots,k\}$

אז מתקיים $f(x)=x_j$ לכל $x\in K_j$.

נסמן גם: $U_j=\{x\in B \mid x_i< x_j, i=1,\dots,k\}$

עבור $i,j\in\{1,\dots,k\}$ כך ש־ $i\ne j$ נסמן $L_{i,j}=\{x\in B \mid x_i=x_j\}$

ונסמן: $\displaystyle L=\bigcup_{1\le i<j\le k} L_{ij}$

הקבוצות L_{ij} הן בעלות נפח אפס לפי חלק א של שאלה 9.ד.18, ולפי אבחנה 9.ד.2 גם L בעלת נפח אפס. גם ∂B היא בעלת נפח אפס (כי כתיבה סגורה ומיושרת B היא בעלת נפח). בעזרת 2.א.27, 2.ד.23 ו־2.ד.25 אפשר לראות ש־ $\partial K_j\subseteq L\cup\partial B$ ו־ $\partial U_j\subseteq L\cup\partial B$ ולכן K_j ו־ U_j בעלות נפח.

הפונקציה f היא רציפה ב־ $\mathbf{R}^k$ ולכן היא אינטגרבילית בכל קבוצה בעלת נפח.

ברור ש־ $K_j\setminus U_j\subseteq L$ ולכן $K_j\setminus U_j$ היא בעלת נפח אפס, ולכן:

$$\int_{K_j} f=\int_{U_j} f+\int_{K_j\setminus U_j} f=\int_{U_j} f+0=\int_{U_j} f$$

כמוכן $\displaystyle B=L\cup\bigcup_{j=1}^{k}U_k$ איחוד של קבוצות זרות ולכן: $\displaystyle\int_B f=\int_L f+\sum_{j=1}^{k}\int_{U_j} f=0+\sum_{j=1}^{k}\int_{K_j} f=\sum_{j=1}^{k}\int_{K_j} f$

תהי σ תמורה של $\{1,\cdots,k\}$. תהי: $\varphi:(x_1,\dots,x_k)\mapsto\left(x_{\sigma(1)},\dots,x_{\sigma(k)}\right)$

אז $f\circ\varphi^{-1}(x)=f\left(x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(k)}\right)=\max\left\{x_{\sigma^{-1}(1)},\dots,x_{\sigma^{-1}(k)}\right\}=\max\{x_1,\dots,x_k\}=f(x)$

כלומר $f\circ\varphi^{-1}=f$. כמוכן: $\varphi(K_j)=\left\{x\in B \mid x_{\sigma^{-1}(i)}\le x_{\sigma^{-1}(j)}, i=1,\dots,k\right\}=K_{\sigma^{-1}(j)}$

אז לפי שאלה 9.ג.9 מתקיים: $\displaystyle\int_{K_{\sigma^{-1}(j)}} f=\int_{\varphi(K_j)} f\circ\varphi^{-1}=\int_{K_j} f$

לכל $i,j\in\{1,\dots,k\}$ יש תמורה σ כך ש־ $\sigma(i)=j$ ולכן: $\displaystyle\int_{K_i} f=\int_{K_j} f$

לכן: $\displaystyle\int_B f=\sum_{j=1}^{k}\int_{K_j} f=\sum_{j=1}^{k}\int_{K_k} f=k\int_{K_k} f=k\int_{K_k} x_k\,dx_1\cdots dx_k$

את האינטגרל האחרון נחשב בעזרת מסקנה 9.ו.26.

בסימוני מסקנה 26.ו.9 נסמן $A=K_k$ ו־$\Lambda=[0,1]$ ואז עבור $y\in\Lambda$ מתקיים:

$$\begin{aligned}A_y &= \left\{(x_1,\dots,x_{k-1}) \mid (x_1,\dots,x_{k-1},y)\in A\right\}\\ &= \left\{(x_1,\dots,x_{k-1})\in[0,1]^{k-1} \;\middle|\; x_i\le y, i=1,\dots,k-1\right\}=[0,y]^{k-1}\end{aligned}$$

אז ממסקנה 26.ו.9:

$$\begin{aligned}\int_{K_k} x_k dx_1\cdots dx_k &= \int_{\Lambda}\left(\int_{A_y} y\,dx_1\cdots dx_{k-1}\right)dy=\int_{\Lambda}\left(y\,\mathrm{vol}_{k-1}A_y\right)dy\\ &= \int_0^1 y\,\mathrm{vol}_{k-1}[0,y]^{k-1}dy=\int_0^1 y\cdot y^{k-1}dy=\int_0^1 y^k dy=\left[\frac{1}{k+1}y^{k+1}\right]_0^1=\frac{1}{k+1}\end{aligned}$$

לכן:

$$\int_B f = k\int_{K_k} x_k dx_1\cdots dx_k = k\cdot\frac{1}{k+1}=\frac{k}{k+1}$$

שאלה 3 (15 נקודות)

תהי U קבוצה פתוחה ב־ $\mathbf{R}^k$ ויהי $\varphi: U \to \mathbf{R}^k$ דיפאומורפיזם. הוכיחו ש־ $\left|\det J\varphi_x\right| = 1$ לכל $x \in U$ אם ורק אם $\operatorname{vol}_k\left(\varphi(K)\right) = \operatorname{vol}_k(K)$ לכל $K \subseteq U$ שהיא סגורה, חסומה ובעלת נפח.

פתרון

כיוון אחד הוא תוצאה מידית של מסקנה 26.ז.9 עם $f \equiv 1$:

אם $\left|\det J\varphi_x\right| = 1$ לכל $x \in U$ ו־ $K \subseteq U$ היא סגורה, חסומה ובעלת נפח אז :

$$\operatorname{vol}_k\left(\varphi(K)\right) = \int_{\varphi(K)} 1 = \int_{\varphi(K)} f = \int_K \left(f \circ \varphi^{-1}\right)\left|\det J\varphi\right| = \int_K \left|\det J\varphi\right| = \int_K 1 = \operatorname{vol}_k(K)$$

להוכחת הכיוון השני, נראה שאם יש נקודה $a \in U$ כך ש־ $\left|\det J\varphi_a\right| \neq 1$ אז יש קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח K כך ש־ $K \subseteq U$ ו־ $\operatorname{vol}_k\left(\varphi(K)\right) \neq \operatorname{vol}_k(K)$.

אם יש נקודה $a \in U$ כך ש־ $\left|\det J\varphi_a\right| > 1$ אז מאחר שהפונקציה $x \mapsto J\varphi_x$ רציפה ב־ U (כי φ גזירה ברציפות) גם הפונקציה $x \mapsto \left|\det J\varphi_x\right|$ רציפה ב־ U (כהרכבת פונקציות רציפות) ולכן יש סביבה $K = \overline{B}(a;r) \subseteq U$ כך שלכל $x \in K$ מתקיים $\left|\det J\varphi_x\right| > 1$. הסביבה K היא כדור סגור ולכן היא קבוצה סגורה וחסומה ובעלת נפח. נסמן $\mu = \min\left\{\left|\det J\varphi_x\right| \;\middle|\; x \in K\right\}$.

אז $\mu > 1$ ומתקיים :

$$\operatorname{vol}_k\left(\varphi(K)\right) = \int_K \left|\det J\varphi\right| \geq \int_K \mu = \mu \operatorname{vol}_k(K) > \operatorname{vol}_k(K)$$

אחרת יש נקודה $a \in U$ כך ש־ $\left|\det J\varphi_a\right| < 1$. אפשר לטעון באופן דומה (עם היפוך אי־שוויונות) ואפשר גם כך : נסמן $\tilde{a} = \varphi(a)$, נסמן $\tilde{U} = \varphi(U)$ ונסמן $\tilde{\varphi} = \varphi^{-1}$. אז $\tilde{\varphi}$ היא דיפאומורפיזם מ־ $\tilde{U}$ ל־ U. ההרכבה $\tilde{\varphi} \circ \varphi$ היא פונקציה הזהות של U ולכן מטריצת היעקוביאן שלה היא מטריצת היחידה. מכלל השרשרת נקבל:

$$I_{k\times k} = J\left(\tilde{\varphi} \circ \varphi\right)_a = J\tilde{\varphi}_{\varphi(a)} J\varphi_a = J\tilde{\varphi}_{\tilde{a}} J\varphi_a$$

אז

$$1 = \left|\det I_{k\times k}\right| = \left|\det\left(J\tilde{\varphi}_{\tilde{a}} J\varphi_a\right)\right| = \left|\det J\tilde{\varphi}_{\tilde{a}} \det J\varphi_a\right| = \left|\det J\tilde{\varphi}_{\tilde{a}}\right| \cdot \left|\det J\varphi_a\right|$$

ולכן :

$$\left|\det J\tilde{\varphi}_{\tilde{a}}\right| = \frac{1}{\left|\det J\varphi_a\right|} > 1$$

אז מהטיעון הקודם עם $\tilde{\varphi}$ ו־ $\tilde{a}$ במקום φ ו־ a יש $\tilde{K} \subseteq \tilde{U}$ שהיא סגורה, חסומה ובעלת נפח עם $\operatorname{vol}_k\left(\tilde{\varphi}\left(\tilde{K}\right)\right) > \operatorname{vol}_k \tilde{K}$ ואם נסמן $K = \tilde{\varphi}\left(\tilde{K}\right)$ אז $K \subseteq U$ היא קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח ומתקיים כמובן $\tilde{K} = \varphi(K)$ ולכן :

$$\operatorname{vol}_k(K) > \operatorname{vol}_k\left(\varphi(K)\right)$$

שאלה 4 (15 נקודות)

חשבו את הנפח והמרכז הגיאומטרי של הקבוצה: $\left\{ (x,y,z) \middle| x^2e^{-2z}+y^2e^{2z} \le \sin z, 0 \le z \le \pi \right\}$

פתרון

נסמן: $A=\left\{ (x,y,z) \middle| x^2e^{-2z}+y^2e^{2z} \le \sin z, 0 \le z \le \pi \right\}$

נסמן את המרכז הגיאומטרי של A ב־(a,b,c). תהי: $\varphi:(x,y,z)\mapsto(-x,-y,z)$

זאת העתקה אפינית ולפי שאלה 6.ז.9 המרכז הגיאומטרי של $\varphi(A)$ הוא $\varphi(a,b,c)$.

אבל בבירור מתקיים $\varphi(A)=A$ ולכן $\varphi(a,b,c)=(a,b,c)$ כלומר $(-a,-b,c)=(a,b,c)$.

אז $-a=a$ ו־$-b=b$ כלומר $a=0$ וגם $b=0$. נחשב את $\mathrm{vol}_3 A$ ואת $\iiint\limits_A z\,dxdydz$ ואז לפי הגדרה 33.ו.9 נקבל $c=\frac{1}{\mathrm{vol}_3 A}\iiint\limits_A z\,dxdydz$. לחישוב האינטגרל נשתמש בהחלפת משתנים על־ידי

הפונקציה: $\varphi:(x,y,z)\mapsto\left(xe^{-z},ye^{z},z\right)$

זאת פונקציה הפיכה וההופכית שלה היא: $\varphi^{-1}:(x,y,z)\mapsto\left(xe^{z},ye^{-z},z\right)$

(בדקו שההרכבות $\varphi^{-1}\circ\varphi$ ו־$\varphi\circ\varphi^{-1}$ שתיהן פונקציית הזהות של $\mathbf{R}^3$).

הפונקציה גזירה ברציפות ומתקיים: $J\varphi_{(x,y,z)}=\begin{pmatrix} e^{-z} & 0 & -xe^{-z} \\ 0 & e^{z} & ye^{z} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

ולכן: $\left|\det J\varphi_{(x,y,z)}\right|=\left|e^{-z}\cdot e^{z}\cdot 1\right|=1$

מתקיים:

$$\begin{aligned}\varphi(A)&=\left\{\varphi(x,y,z) \;\middle|\; x^2e^{-2z}+y^2e^{2z}\le \sin z, 0\le z\le\pi\right\}\\ &=\left\{\left(xe^{-z},ye^{z},z\right) \;\middle|\; \left(xe^{-z}\right)^2+\left(ye^{z}\right)^2\le \sin z, 0\le z\le\pi\right\}\\ &=\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times[0,\pi] \;\middle|\; x^2+y^2\le \sin z\right\}\end{aligned}$$

הקבוצה הזאת סגורה לפי מסקנה 25.ד.2, והיא מוכלת ב־$[-1,1]\times[-1,1]\times[0,\pi]$ ולכן היא חסומה.

שפתה מוכלת בקבוצה $\left\{(x,y,z)\in\mathbf{R}\times\mathbf{R}\times(0,\pi) \;\middle|\; x^2+y^2=\sin z\right\}\cup\left\{(0,0,0),(0,0,\pi)\right\}$

שהיא קבוצה צנומה (למשל לפי שאלה 1 בממ"ן זה) ולכן היא בעלת נפח.

לפי מסקנה 26.ז.9 לכל f רציפה ב־$\mathbf{R}^3$ מתקיים: $\int\limits_{\varphi(A)} f=\int\limits_A f\circ\varphi\left|\det J\varphi\right|=\int\limits_A f\circ\varphi$

גם הפונקציה הקבועה $f:(x,y,z)\mapsto 1$ וגם הפונקציה $f:(x,y,z)\mapsto z$ הן רציפות ומקיימות $f\circ\varphi=f$. נסמן $K=\varphi(A)$. אז לשתי הפונקציות האלה מתקיים $\int\limits_A f=\int\limits_K f$.

נשתמש במסקנה 26.ו.9 כדי לחשב את $\int_K f$. נסמן $\Lambda=[0,\pi]$ ולכל $z\in\Lambda$ נסמן:

$$K_z=\{(x,y)\mid(x,y,z)\in K\}=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le\sin z\}=\overline{B}\left((0,0);\sqrt{\sin z}\right)$$

אז:
$$\int_K f=\int_\Lambda\left(\int_{K_z}f(x,y,z)\,dxdy\right)dz=\int_0^\pi\left(\int_{\overline{B}\left((0,0);\sqrt{\sin z}\right)}f(x,y,z)\,dxdy\right)dz$$

עבור $f:(x,y,z)\mapsto 1$ נקבל:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_3\,K&=\int_K 1=\int_0^\pi\left(\int_{\overline{B}\left((0,0);\sqrt{\sin z}\right)}1\,dxdy\right)dz=\int_0^\pi\left(\mathrm{vol}_3\,\overline{B}\left((0,0);\sqrt{\sin z}\right)\right)dz\\&=\int_0^\pi\pi\sin z\,dz=\left[-\pi\cos z\right]_0^\pi=-\pi\cos\pi+\pi\cos 0=\pi+\pi=2\pi\end{aligned}$$

(אפשר היה לנמק חישוב זה גם בעזרת מסקנה 28.ו.9).

עבור $f:(x,y,z)\mapsto z$ נקבל:

$$\begin{aligned}\int_K z\,dxdydz&=\int_0^\pi\left(\int_{\overline{B}\left((0,0);\sqrt{\sin z}\right)}z\,dxdy\right)dz=\int_0^\pi\left(z\cdot\mathrm{vol}_3\,\overline{B}\left((0,0);\sqrt{\sin z}\right)\right)dz\\&=\int_0^\pi\pi z\sin z\,dz=\pi\left[\sin z-z\cos z\right]_0^\pi=\pi^2\end{aligned}$$

אז
$$\mathrm{vol}_3\,A=\int_A 1=\int_K 1=2\pi$$

וכן
$$\int_A z\,dxdydz=\int_K z\,dxdydz=\pi^2$$

ולכן
$$c=\frac{1}{\mathrm{vol}_3\,A}\int_A z\,dxdydz=\frac{\pi^2}{2\pi}=\tfrac{1}{2}\pi$$

והמרכז הגיאומטרי של A הוא $\left(0,0,\tfrac{1}{2}\pi\right)$.

שאלה 5 **(15 נקודות)**

הוכיחו שלקבוצה $A=\left\{ (x,y,z) \middle| x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \le 1 \right\}$ יש נפח מוכלל, דהיינו האינטגרל המוכלל של הפונקציה הקבועה $(x,y,z)\mapsto 1$ בקבוצה A מתכנס. (עצה: אל תנסו לחשב את הנפח.)

פתרון

הקבוצה A היא קבוצה סגורה לפי מסקנה 23.ד.2 או 25.ד.2, וכן:

$$\partial A \subseteq \left\{ (x,y,z) \middle| x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 1 \right\}$$

נסמן: $A_n = A\cap[-n,n]^3$

בבירור הסדרה $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קבוצות שעולה לקבוצה A: $A=\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$

לכל n הקבוצה A_n סגורה כחיתוך של קבוצות סגורות, וחסומה כי היא מוכלת בתיבה.

כמוכן: $\partial A_n \subseteq [-n,n]^3 \cap \left(\partial A \cup \partial[-n,n]^3\right) = \left([-n,n]^3\cap \partial A\right)\cup \partial[-n,n]^3$

התיבה $[-n,n]^3$ בעלת נפח ולכן שפתה בעלת נפח אפס. הקבוצה $[-n,n]^3\cap\partial A$ מוכלת בקבוצה

$$\begin{aligned}
&\left\{ (x,y,z=)\in[-n,n]^3 \middle| x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 = 1 \right\}\\
&=\left\{ (x,y,z)\in[-n,n]^3 \middle| z^2\left(x^2+y^2\right) = 1-x^2y^2 \right\}\\
&=\left\{ (x,y,z)\in[-n,n]^3 \middle| z^2 = \frac{1-x^2y^2}{x^2+y^2} \right\}\\
&=\left\{ (x,y,z)\in[-n,n]^3 \middle| z = \pm\frac{\sqrt{1-x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}\\
&\subseteq\left\{ \left(x,y,\pm\frac{\sqrt{1-x^2y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) \middle| (x,y)\in\left\{(x,y)\in[-n,n]^2 \mid x^2y^2\le 1\right\} \right\}
\end{aligned}$$

ולכן היא מוכלת באיחוד של הגרפים של שתי פונקציות רציפות בקבוצה סגורה, חסומה ובעלת שטח, שהוא קבוצה בעלת נפח אפס. אז השפה של A_n בעלת נפח אפס ולכן A_n בעלת נפח.

הפונקציה הקבועה $(x,y,z)\mapsto 1$ רציפה ואי־שלילית ולפי מסקנה 7.ח.9 כדי להסיק שהאינטגרל המוכלל $\iiint_A 1$ מתכנס די להראות שסדרת הקירוב $\left(\iiint_{A_n} 1\right)_{n=1}^{\infty}$ חסומה, כלומר למצוא מספר קבוע C כך שלכל $n\in\mathbf{N}$ מתקיים: $\mathrm{vol}_3\, A_n = \iiint_{A_n} 1 \le C$

אם $(x,y,z)\in A$ אז $\left(x^2+y^2\right)z^2 = x^2z^2+y^2z^2 \le x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2 \le 1$

ובאופן דומה $\left(x^2+z^2\right)y^2 \le 1$ וגם $\left(y^2+z^2\right)x^2 \le 1$. נסמן:

$$K_z^+ = \left\{(x,y,z) \in [-n,n]\times[-n,n]\times[1,n] \;\middle|\; \left(x^2+y^2\right)z^2 \le 1\right\}$$

$$K_z^- = \left\{(x,y,z) \in [-n,n]\times[-n,n]\times[-n,-1] \;\middle|\; \left(x^2+y^2\right)z^2 \le 1\right\}$$

$$K_y^+ = \left\{(x,y,z) \in [-n,n]\times[1,n]\times[-n,n] \;\middle|\; \left(x^2+z^2\right)y^2 \le 1\right\}$$

$$K_y^- = \left\{(x,y,z) \in [-n,n]\times[-n,-1]\times[-n,n] \;\middle|\; \left(x^2+z^2\right)y^2 \le 1\right\}$$

$$K_x^+ = \left\{(x,y,z) \in [1,n]\times[-n,n]\times[-n,n] \;\middle|\; \left(y^2+z^2\right)x^2 \le 1\right\}$$

$$K_x^- = \left\{(x,y,z) \in [-n,-1]\times[-n,n]\times[-n,n] \;\middle|\; \left(y^2+z^2\right)x^2 \le 1\right\}$$

מהשיקולים לעיל נקבל: $A_n \subseteq [-1,1]^3 \cup K_z^+ \cup K_z^- \cup K_y^+ \cup K_y^- \cup K_x^+ \cup K_x^-$

השפה של הקבוצה K_z^+ מוכלת באיחוד של שפת התיבה $[-n,n]\times[-n,n]\times[1,n]$, שהיא בעלת נפח אפס, ושל הגרף של צמצום הפונקציה $(x,y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ לקבוצה $\overline{B}\left((0,0);1\right) \setminus B\left((0,0);\frac{1}{n}\right)$. זה גרף של פונקציה רציפה בקבוצה סגורה וחסומה ובעלת שטח, ולכן זאת קבוצה בעלת נפח אפס.

לכן K_z^+ היא קבוצה בעלת נפח. העתקת החפיפה $\varphi:(x,y,z) \mapsto (x,y,-z)$ מקיימת $\varphi\left(K_z^+\right) = K_z^-$ ולכן לפי טענה 9.ד.27 גם K_z^- בעלת נפח ומתקיים: $\operatorname{vol}_3 K_z^- = \operatorname{vol}_3 K_z^+$

באופן דומה עם העתקת החפיפה $\varphi:(x,y,z) \mapsto (x,z,y)$ מקבלים $\varphi\left(K_z^+\right) = K_y^+$ ו־$\varphi\left(K_z^-\right) = K_y^-$

ועם העתקת החפיפה $\varphi:(x,y,z) \mapsto (z,y,x)$ מקבלים $\varphi\left(K_z^+\right) = K_x^+$ ו־$\varphi\left(K_z^-\right) = K_x^-$ ומכאן[1] מקבלים שכל שש הקבוצות לעיל בעלות נפח וכולן בעלות אותו נפח, דהיינו:

$$\operatorname{vol}_3 K_z^+ = \operatorname{vol}_3 K_z^- = \operatorname{vol}_3 K_y^+ = \operatorname{vol}_3 K_y^- = \operatorname{vol}_3 K_x^+ = \operatorname{vol}_3 K_x^-$$

אז: $\operatorname{vol}_3 A_n \le \operatorname{vol}_3 [-1,1]^3 + 6\operatorname{vol}_3 K_z^+ = 8 + 6\operatorname{vol}_3 K_z^+$

לבסוף אפשר לחשב את $\operatorname{vol}_3 K_z^+$ בעזרת מסקנה 9.ו.28. עבור $z \in [1,n]$ מתקיים:

$$\left\{(x,y) \;\middle|\; (x,y,z) \in K_z^+\right\} = \left\{(x,y) \;\middle|\; x^2+y^2 \le \frac{1}{z^2}\right\} = \overline{B}\left((0,0);\frac{1}{z}\right)$$

ולכן:

$$\operatorname{vol}_3 K_z^+ = \int_1^n \operatorname{vol}_2 \overline{B}\left((0,0);\frac{1}{z}\right)dz = \int_1^n \pi\left(\frac{1}{z}\right)^2 dz = \left[-\pi\frac{1}{z}\right]_1^n = \pi - \pi\cdot\frac{1}{n} < \pi$$

אז

$$\operatorname{vol}_3 A_n \le 8 + 6\operatorname{vol}_3 K_z^+ < 8 + 6\pi$$

וסיימנו להראות שיש ל־$\iiint_A 1$ סדרת קירוב חסומה, ולפי מסקנה 9.ח.7 האינטגרל המוכלל $\iiint_A 1$ מתכנס.

---

[1] אפשר להסתפק גם בהעתקת חפיפה אחת: $\varphi:(x,y,z) \mapsto (y,z,-x)$. תוכלו לבדוק שהיא מקיימת:

$$\varphi\left(K_z^+\right) = K_y^+,\quad \varphi\left(K_y^+\right) = K_x^+,\quad \varphi\left(K_x^+\right) = K_z^-,\quad \varphi\left(K_z^-\right) = K_y^-,\quad \varphi\left(K_y^-\right) = K_x^-$$

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $D=\left\{(x,y)\,\middle|\,x^2+xy+y^2\le 1\right\}$. תהי φ לולאה פשוטה סדירה שתמונתה היא השפה של קבוצה סגורה וחסומה A השוכנת לשמאל הלולאה φ, כך שראשית הצירים היא נקודה פנימית של A. הוכיחו כי: $\operatorname{vol}_2(D)=\frac{1}{2}\oint_{\varphi}\frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$

רמז: ראשית הראו שהנוסחה נכונה בהנחה ש־ $A=D$. אחרי כן הראו שהיא נכונה גם ללא הנחה זאת.

פתרון

אם נניח ש־ $A=D$ אז לפי שאלה 9.ט.8 לכל $(x,y)\in\operatorname{Im}\varphi$ מתקיים $(x,y)\in\partial D$ ולפי מסקנה 2.ד.25 מתקיים $x^2+xy+y^2=1$, ולכן $\oint_{\varphi}\frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}=\oint_{\varphi}xdy-ydx=\oint_{\varphi}Pdx+Qdy$

עם $P(x,y)=-y$ ו־ $Q(x,y)=x$. מההנחות נובע שהלולאה φ והקבוצה D מקיימות יחד את הנחות משפט גרין, וממשפט גרין (9.ט.17, או ממסקנה 9.ט.19) נובע

$$\oint_{\varphi}Pdx+Qdy=\iint_D\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}=\iint_D 1+1=2\operatorname{vol}_2 D$$

ולכן מנתוני השאלה בתוספת ההנחה $A=D$ נובע: $\operatorname{vol}_2(D)=\frac{1}{2}\oint_{\varphi}Pdx+Qdy=\frac{1}{2}\oint_{\varphi}\frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$

נראה בהמשך שיש לולאה פשטה וסדירה ψ שתמונתה היא השפה של D ו־ש D שוכנת לשמאלה.

מזה יוצא על־פי מה שראינו עד כה שמתקיים: $\operatorname{vol}_2(D)=\frac{1}{2}\oint_{\psi}\frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$

נסמן: $F:(x,y)\mapsto\left(\frac{-y}{x^2+xy+y^2},\frac{x}{x^2+xy+y^2}\right)$

מתקיים

$$JF_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{\partial[F]_1}{\partial x} & \frac{\partial[F]_1}{\partial y}\\ \frac{\partial[F]_2}{\partial x} & \frac{\partial[F]_2}{\partial y}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{2xy+y^2}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2} & \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}\\ \frac{y^2-x^2}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2} & \frac{-x^2-2xy}{\left(x^2+xy+y^2\right)^2}\end{pmatrix}$$

ולכן F גזירה ברציפות ב־ $\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ו־ $JF_{(x,y)}$ מטריצה סימטרית בכל $(x,y)\in\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

לפי שאלה 9.ט.10 מספר הליפוף של φ סביב ראשית הצירים הוא 1 וגם מספר הליפוף של ψ סביב ראשית הצירים הוא 1. אז לפי שאלה 8.ח.10 מתקיים $\oint_{\psi}F\cdot d(x,y)=\oint_{\varphi}F\cdot d(x,y)$

ולכן: $\operatorname{vol}_2(D)=\frac{1}{2}\oint_{\psi}\frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}=\frac{1}{2}\oint_{\varphi}\frac{xdy-ydx}{x^2+xy+y^2}$

נותר להוכיח שיש לולאה פשוטה וסדירה ψ שתמונתה היא השפה של D ו־ש D שוכנת לשמאלה.

נעשה זאת בעזרת הצגת כל נקודה $(x,y)\in\partial D$ בשיעורים קוטביים: $(x,y)=(r\cos\theta,r\sin\theta)$

ראינו קודם שמתקיים $x^2+xy+y^2=1$ ולכן:

$$r^2\cos^2\theta+r^2\cos\theta\sin\theta+r^2\sin^2\theta=1$$
$$r^2\left(1+\cos\theta\sin\theta\right)=1$$
$$r=\frac{1}{\sqrt{1+\cos\theta\sin\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta}}$$

אז:

$$\left(x,y\right)=\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin 2\theta}}\left(\cos\theta,\sin\theta\right)$$

נגדיר מסילה $\psi:\left[0,2\pi\right]\to\mathbf{R}^2$ על ידי:

$$\psi:t\mapsto\frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{2}\sin 2t}}\left(\cos t,\sin t\right)$$

זאת לולאה כי $\psi\left(0\right)=\psi\left(2\pi\right)=\left(1,0\right)$. הגדרנו אותה כך שתמונתה מוכלת ב־∂D.

אפשר לבדוק גם שעל כל קרן שקודקודה בראשית הצירים יש נקודת שפה יחידה של D והיא בתמונת ψ, ולכן תמונת ψ שווה ל־∂D.

זאת לולאה פשוטה כי על כל קרן שקודקודה בראשית הצירים ($\left\{r\left(\cos\theta,\sin\theta\right)\mid r>0\right\}$ עם $\left(\theta\in\left[0,2\pi\right)\right.$ יש בדיוק $t\in\left[0,2\pi\right)$ יחיד כך ש־$\psi\left(t\right)$ על אותה קרן.

היא גזירה ברציפות:

$$\dot{\psi}\left(t\right)=\left(1+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)^{-\frac{1}{2}}\left(-\sin t,\cos t\right)-\tfrac{1}{2}\left(1+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)^{-\frac{3}{2}}\cos 2t\left(\cos t,\sin t\right)$$

אפשר לבדוק שלכל t מתקיים $\dot{\psi}\left(t\right)\neq 0$ וכן $\dot{\psi}\left(0\right)=\dot{\psi}\left(2\pi\right)$ ולכן זאת לולאה סדירה.

אפשר לבדוק ישירות מההגדרה ש־D שוכנת לשמאלהּ של הלולאה ψ. בדקו את כל אלה.

אפשר גם להסיק את כל אלה מפתרון שאלה 4 בממ״ן 15 משנת 2024, שתוכלו למצוא באתר הקורס, בעזרת הפונקציה $f:\left(x,y\right)\mapsto x^2+xy+y^2$. למעשה אפשר להסיק ממה שהוכח שם את כל מה שמבוקש בשאלה זאת. חלק ממה שדרוש כאן אפשר להסיק גם משאלה 1 בממ״ן 14 משנת 2025.