

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

סמסטר : 2026

הקורס : 2024 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 8

מועד אחרון להגשה : 5.4.2026

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ו- $\mu: [\alpha, \beta] \rightarrow M_{k \times l}(\mathbb{R})$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^l$
 $t \mapsto \varphi(t)\mu(t)$

א. הוכיחו כי ψ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).

ב. אם φ ו- μ הן מסילות סדירות, האם גם ψ היא מסילה סדירה?

מרחב המטריצות $M_{k \times l}(\mathbb{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^{kl}$. ראו הערה 1.א.ג.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילה שאורכה סופי, ושהיא מסילה פשוטה, לולאה פשוטה או מסילה סדירה.

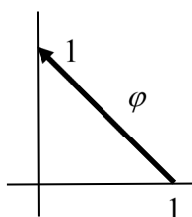
א. הראו שיש מספר חיובי γ ומסילה יחידה $\psi: [0, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ששקולה ל- φ ובעלת התכונה:

$$L(\psi|_{[0,s]}) = s \quad \text{לכל } s \in (0, \gamma]$$

ב. הוכיחו כי אם $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה בתמונת המסילה φ אז:

$$\int_{\varphi} f(x) |dx| = \int_0^{\gamma} f(\psi(s)) ds$$

שאלה 3 (20 נקודות)



$$\frac{x^3}{(x^2 + y^2)^3} dx + \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^3} dy$$

על המסילה הפשוטה φ שבאיור:

(מומלץ להיעזר בשאלה 21.ו.8 ועובדות נוספות שמוכחות בספר הלימוד.)

שאלה 4 (20 נקודות)

$$F: (x, y) \mapsto \left(\frac{-2xy^3}{x^4 + y^6}, \frac{3x^2y^2}{x^4 + y^6} \right)$$

נתונה הפונקציה

$$U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

הראו ש- F גזירה ברציפות ב- U ושלכל $a \in U$ מטריצת היעקוביאן JF_a סימטרית.

האם F היא שדה משמר ב- U ? נמקו!

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ מסילה שתמונתה היא הקבוצה A . תהי $F: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה גזירה

ברציפות כך שלכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ המטריצה JF_x היא מטריצה סימטרית.

נגדיר פונקציה חלקית G מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}^k$ עלידי: $G: x \mapsto F(x - \varphi(0)) - F(x - \varphi(1))$

הוכיחו ש- G היא שדה משמר בקבוצה $\mathbb{R}^k \setminus A$.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 1\13\2022. וריאציה על 1\13\2021. אפשר להוכיח ישירות מההגדרה. אפשר להשתמש באפיון של זיורדן להשתנות חסומה של רכיבי המסילה. וכמובן שהמכפלה אינה בהכרח סדירה, למשל אם $[\alpha, \beta] = [-1, 1]$, $\varphi(t) = \mu(t) = t$ אז נגזרת המכפלה היא 0 ב- $t = 0$.

לשאלה 2: 2\13\2021 = 2\13\2020.

אורך מסילה פשוטה או לולאה פשוטה או מסילה סדירה הוא חיובי. מזה אפשר להסיק שהפונקציה Λ_φ מטענה 30.ב.8 (ושאלה 29.ב.8) עולה במובן הצר. כמובן היא רציפה, ותמונתה $[0, \gamma]$ עבור $\gamma = L(\varphi) > 0$. אפשר עכשיו לבדוק שהמסילה $\psi = \varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}$ היא בעלת התכונות המבוקשות. כמובן אם $\varphi = \psi \circ \tau$ בעלת התכונות המבוקשות, כאשר $\tau: [\alpha, \beta] \rightarrow [0, \gamma]$ פונקציה רציפה ועולה במובן הצר, אז אפשר להסיק ש- $\tau = \Lambda_\varphi$, ומכאן יחידות ψ .
לסעיף ב, מקבלים ממשפט 32.ב.8 נוסחה ל- Λ_φ שאותה גוזרים ומקבלים שהנגזרת היא $|\dot{\varphi}|$. מכלל השרשרת מקבלים $|\dot{\psi}| = 1$, ומשתמשים בטענה 9.ה.8 ומשפט 21.ה.8. טענת סעיף ב כנראה נכונה גם למסילה או לולאה פשוטה שאינה סדירה (ואורכה סופי).

לשאלה 3: 3\13\2020. לפי ממ"ח 10\03\2019. הרעיון הוא שמסימטריה האינטגרל הוא 0 (היפוך

מגמת המסילה נותן אותו אינטגרל, לפי שאלה 21.ו.8 עם $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ (החלפת תפקידים בין שני המשתנים). אפשר גם לקחת $\mathbf{R}^2: [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbf{R}^2$ שמוגדרת כך:
 $\varphi(t) = (\frac{1}{2} - t, \frac{1}{2} + t)$ ולקבל ממשפט 24.ו.8 אינטגרל של פונקציה איזוגית על קטע סימטרי.

לשאלה 4: 4\93\2025 בשינוי נוסח. במקור זאת היתה חלק ב של שאלה 24 במקובץ שאלות בחינה לדוגמה.
מגוון דרכים לענות על השאלה.

דרך אחת היא להראות במפורש פוטנציאל:

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\pi}{2} & x = 0, y > 0 \\ \arctan \frac{y^3}{x^3} & x \neq 0 \\ -\frac{\pi}{2} & x = 0, y < 0 \end{cases}$$

זה מחייב לחשב במפורש את הנגזרות החלקיות בנקודות $(0, y)$.

הדרכים האחרות מתבססות על קיום לולאה פשוטה שהביטוי $x^4 + y^6$ קבוע עליה.

אפשר לנסות להציג במפורש אחת כזאת ולחשב עליה את האינטגרל.

לאחר לימוד פרק 9 אפשר להשתמש במשפט גרין עם הקבוצה

$$K = \{(x, y) \mid x^4 + y^6 \leq 1\} \text{ והפונקציה } G: (x, y) \mapsto (-2xy^3, 3x^2y^2) \text{ מתקיים}$$

$f(x, y) = G(x, y)$ לכל $(x, y) \in \partial K$ ו- ∂K היא תמונת לולאה פשוטה φ שאורכה סופי

וש- K שוכנת לשמאלה, ולכן ממשפט גרין מקבלים:

$$\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \oint_{\varphi} G \cdot d(x, y) = \iint_K 12xy^3 dx dy = 0$$

את העובדה שהאינטגרל הוא 0 מקבלים משיקולי סימטריה (השיקוף $(x, y) \mapsto (-x, y)$

מעביר את K לעצמה והופך את סימן האינטגרל). אז עכשיו יש לנו לולאה פשוטה

שמספר הליפוף שלה הוא 1 לפי שאלה 22.ט.9 שהאינטגרל של התבנית $F \cdot d(x, y)$

עליה הוא אפס, ומחלק ב(ii) של שאלה 10.ח.8 הפונקציה F היא שדה משמר במישור הנקוב בראשית.

אפשר גם לחשב את האינטגרל על הלולאה $t \mapsto (\cos t, \sin t)$. עדיף שהתחום יהיה

$[-\pi, \pi]$, ואז רואים שזה אינטגרל של פונקציה איזוגית ורציפה על קטע סימטרי.

אפשר גם להשתמש בהומוטופיה, אבל צריך להיזהר בעניין הסימנים ברביעים השונים.

לשאלה 5: 4\89\2025. הרעיון דומה לשאלה שהיתה בממ"ן קודם (4\13\2021) ובבחינה קודמת (4\72\2020).

אם $\psi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^k \setminus A$ לולאה שאורכה סופי, אז $H: [a, b] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^k$
 $(t, \lambda) \mapsto \psi(t) - \varphi(\lambda)$

היא הומוטופיה של לולאות, שתמונתה אינה מכילה את $0^{[k]}$ (כי תמונות φ ו- ψ זרות).

מתקיים $\int_{H_\lambda} F(x) \cdot dx = \int_{\psi} F(x - \varphi(\lambda)) \cdot dx$ (למשל כי לשני האינטגרלים בדיוק אותם

סכומי רימן לכל חלוקה של $[a, b]$ וכן לפי טענה 13.ח.8 $\int_{H_0} F(x) \cdot dx = \int_{H_1} F(x) \cdot dx$

ולכן $\int_{\psi} G(x) \cdot dx = \int_{\psi} F(x - \varphi(0)) \cdot dx - \int_{\psi} F(x - \varphi(1)) \cdot dx = \int_{H_0} F(x) \cdot dx - \int_{H_1} F(x) \cdot dx = 0$

ולפי שאלה 3.ז.8 G היא שדה משמר ב- $\mathbb{R}^k \setminus A$.