# מתווה לפתרון ממ"ן 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 סמסטר: 2026א1
חומר הלימוד למטלה: פרק 8 משקל המטלה: 4 נקודות

## שאלה 1 (20 נקודות)

תהיינה $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^k$ ו־ $\mu:[\alpha,\beta]\to M_{k\times l}(\mathbf{R})$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\psi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^l$
$t\mapsto\varphi(t)\mu(t)$

א. הוכיחו כי $\psi$ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים.)

ב. אם $\varphi$ ו־ $\mu$ הן מסילות סדירות, האם גם $\psi$ היא מסילה סדירה?

מרחב המטריצות $M_{k\times l}(\mathbf{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{kl}$. ראו הערה 1.א.1ג.

**פתרון סעיף א**

לפי אבחנה 8.ג.2, כדי להוכיח שאורך מסילה סופי די להראות שהיא בעלת השתנות חסומה בקטע $[\alpha,\beta]$. נראה אם כן שהפונקציה $\psi$ היא רציפה, ולכן היא מסילה, ושהיא בעלת השתנות חסומה בקטע $[\alpha,\beta]$, ולכן היא מסילה שאורכה סופי.

לפי חלק ב של דוגמה 1.י.6 (כאשר אנו מזהים את $M_{1\times k}(\mathbf{R})$ עם $\mathbf{R}^k$, ראו הערה 1.א.1) הפונקציה $\pi:\mathbf{R}^k\times M_{k\times l}(\mathbf{R})\to\mathbf{R}^l$ שמוגדרת על ידי כפל מטריצות $\pi:(v,A)\mapsto vA$
היא פונקציה פולינומית, ולפיכך היא רציפה. האיסוף $(\varphi,\mu)$ הוא פונקציה רציפה בקטע $[\alpha,\beta]$ ולכן גם ההרכבה $\psi=\pi\circ(\varphi,\mu)$ רציפה בקטע זה, כלומר $\psi$ היא מסילה.

את העובדה ש־ $\psi$ בעלת השתנות חסומה אפשר להוכיח בדרך דומה לכל אחת משתי הדרכים בפתרון חלק ב של שאלה 8.ג.11, אבל אפשר גם לנצל את מה שהוכח בשאלה זאת. לפי טענה 8.ג.6 די להוכיח עבור $1\le j\le l$ שהרכיב $[\psi]_j$ הוא פונקציה בעלת השתנות חסומה בקטע $[\alpha,\beta]$. לפי הגדרת כפל מטריצות

$$[\psi]_j(t)=\sum_{i=1}^{k}[\varphi]_i(t)[\mu]_{ij}(t)$$

לכל $t\in[\alpha,\beta]$. לפי חלק ב של שאלה 8.ג.12 המכפלות $t\mapsto[\varphi]_i(t)[\mu]_{ij}(t)$ הן פונקציות בעלות השתנות חסומה ב־ $[\alpha,\beta]$, ולפי חלק ג של שאלה 8.ג.5 גם הפונקציה $t\mapsto\sum_{i=1}^{k}[\varphi]_i(t)[\mu]_{ij}(t)$ היא כזאת, כלומר $\psi$ היא בעלת השתנות חסומה בקטע $[\alpha,\beta]$.

**פתרון סעיף ב**

התשובה: לא בהכרח. **דוגמה נגדית:** $k=l=1$, ואז נוכל לזהות את $M_{1\times 1}(\mathbf{R})$ ואת $\mathbf{R}^1$ עם $\mathbf{R}$,

וניקח גם $[\alpha,\beta]=[-1,1]$, וכן $\varphi=\mu:t\mapsto t$. אז $\psi:t\mapsto t^2$, ולכן $\dot{\psi}(t)=\psi'(t)=2t$ ובפרט

$\dot{\psi}(0)=0$, ולכן $\psi$ אינה מסילה סדירה.

**דוגמה נוספת:** תהי $A\in M_{k\times l}(\mathbf{R})\setminus\{0\}$ ויהי $v\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ כך ש־$vA=0$.

ניקח $\varphi:t\mapsto tv$ ו־$\mu:t\mapsto tA$. אז $\dot{\varphi}(t)=v\neq 0$ וכן $\dot{\mu}(t)=A\neq 0$ ולכן $\varphi$ ו־$\mu$ מסילות סדירות.

אבל $\psi:t\mapsto t^2vA=0$ ולכן גם $\dot{\psi}(t)=0$ לכל $t\in[\alpha,\beta]$, ובודאי $\psi$ אינה מסילה סדירה.

## שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^k$ מסילה שאורכה סופי, ושהיא מסילה פשוטה, לולאה פשוטה או מסילה סדירה.

א. הראו שיש מספר חיובי $\gamma$ ומסילה יחידה $\psi:[0,\gamma]\to\mathbf{R}^k$ ששקולה ל־$\varphi$ ובעלת התכונה:

$L\left(\psi|_{[0,s]}\right)=s$ לכל $s\in(0,\gamma]$.

ב. הוכיחו כי אם $f:\mathbf{R}^k\to\mathbf{R}$ רציפה בתמונת המסילה $\varphi$ אז: $\int\limits_{\varphi} f(x)|dx|=\int\limits_0^{\gamma} f(\psi(s))ds$

**פתרון סעיף א**

ראשית נניח ש־$\psi$ היא מסילה בעלת התכונות המבוקשות. אז $\psi:[0,\gamma]\to\mathbf{R}^k$ ששקולה ל־$\varphi$ ולפי הגדרה 3.א.8 יש $\tau:[\alpha,\beta]\to[0,\gamma]$ שהיא פונקציה רציפה ועולה במובן הצר כך ש־$\tau$ $\varphi=\psi\circ\tau$.

עבור $s\in(0,\gamma]$ יש $t\in(\alpha,\beta]$ עבורו $s=\tau(t)$. הפונקציה $\tau|_{[\alpha,t]}$ היא פונקציה רציפה ועולה במובן הצר שתמונתה $[0,s]$ ולכן $\varphi|_{[\alpha,t]}=(\psi\circ\tau)|_{[\alpha,t]}=\psi|_{[0,s]}\circ\tau|_{[\alpha,t]}$ ולכן $\psi|_{[0,s]}$ היא מסילה ששקולה למסילה $\varphi|_{[\alpha,t]}$ ולכן $\tau(t)=s=L\left(\psi|_{[0,s]}\right)=L\left(\varphi|_{[\alpha,t]}\right)=\Lambda_\varphi(t)$

כאשר $\Lambda_\varphi$ היא הפונקציה שמוגדרת בטענה 8.ב.30.

זה מראה שאם יש מסילה $\psi$ בעלת התכונות המבוקשות בשאלה אז היא יחידה. נראה שיש מסילה כזאת. ברור ממה שראינו כבר שהיא בהכרח מקיימת $\varphi=\psi\circ\Lambda_\varphi$.

מהנתון ש־$\varphi$ היא מסילה פשוטה או לולאה פשוטה או מסילה סדירה נובע בפרט שהיא אינה פונקציה קבועה, ולכן אורכה אינו אפס. נסמן $\gamma=L(\varphi)$. אז $\gamma>0$.

כדי לפשט קצת את הסימונים ולהימנע מחלוקה למקרים נשתמש בשאלה זאת בסימון $[a,b]=\{t\mid a\le t\le b\}$ גם כאשר $a=b$ ובמקרה זה יהיה כמובן $[a,b]=\{a\}$. כמוכן נסכים להתייחס במקרה זה לפונקציה שתחומה $\{a\}$ כאל "מסילה מנוונת" שאורכה 0.

עם הסכם זה הפונקציה $\Lambda_\varphi$ שמוגדרת בטענה 8.ב.30 מקיימת: $\Lambda_\varphi(t)=L\left(\varphi|_{[\alpha,t]}\right)$

לכל $t\in[\alpha,\beta]$.

אם $\alpha\le s<t\le\beta$ אז: $\Lambda_\varphi(t)=L\left(\varphi|_{[\alpha,t]}\right)=L\left(\varphi|_{[\alpha,s]}*\varphi|_{[s,t]}\right)=L\left(\varphi|_{[\alpha,s]}\right)+L\left(\varphi|_{[s,t]}\right)$

אם $\varphi$ היא מסילה פשוטה או לולאה פשוטה אז גם $\varphi|_{[s,t]}$ היא מסילה פשוטה או לולאה פשוטה ואם $\varphi$ היא מסילה סדירה אז גם $\varphi|_{[s,t]}$ היא מסילה סדירה, ובכל מקרה: $L\left(\varphi|_{[s,t]}\right)>0$

לכן $\Lambda_\varphi(t)=L\left(\varphi|_{[\alpha,s]}\right)+L\left(\varphi|_{[s,t]}\right)>L\left(\varphi|_{[\alpha,s]}\right)=\Lambda_\varphi(s)$

אז $\Lambda_\varphi$ היא פונקציה עולה במובן הצר, לפי טענה 8.ב.30 זאת פונקציה רציפה. לכן תמונתה היא:

$$\Lambda_\varphi([\alpha,\beta])=\left[\Lambda_\varphi(\alpha),\Lambda_\varphi(\beta)\right]=\left[L\left(\varphi|_{[\alpha,\alpha]}\right),L\left(\varphi|_{[\alpha,\beta]}\right)\right]=[0,\gamma]$$

כאמור במסגרת הגדרה 8.א.3 גם ההופכית $\Lambda_\varphi^{-1}$ היא פונקציה רציפה ועולה במובן הצר, שתחומה $[0,\gamma]$ ותמונתה $[\alpha,\beta]$. אז $\psi=\varphi\circ\Lambda_\varphi^{-1}$ היא מסילה ששקולה ל־$\varphi$.

לכל $s\in(0,\gamma]$ הפונקציה $\Lambda_\varphi^{-1}|_{[0,s]}$ היא פונקציה רציפה ועולה במובן הצר שתמונתה $[\alpha,t]$ עם $t=\Lambda_\varphi^{-1}(s)$ ומתקיים:

$$\psi|_{[0,s]}=\left(\varphi\circ\Lambda_\varphi^{-1}\right)|_{[0,s]}=\varphi|_{[\alpha,t]}\circ\Lambda_\varphi^{-1}|_{[0,s]}$$

אז המסילה $\psi|_{[0,s]}$ שקולה למסילה $\varphi|_{[\alpha,t]}$ ולכן:

$$L\left(\psi|_{[0,s]}\right)=L\left(\varphi|_{[0,t]}\right)=\Lambda_\varphi(t)=s$$

**פתרון סעיף ב**

אם המסילה $\varphi$ סדירה (או אפילו אם היא רק גזירה ברציפות) אז לפי משפט 8.ב.32 לכל $t\in[\alpha,\beta]$ מתקיים:

$$\Lambda_\varphi(t)=L\left(\varphi|_{[\alpha,t]}\right)=\int_\alpha^t|\dot\varphi(t)|dt$$

לפי המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי

$$\Lambda_\varphi'(t)=|\dot\varphi(t)|$$

ולכן:

$$\left(\Lambda_\varphi^{-1}\right)'(s)=\frac{1}{\Lambda_\varphi'\left(\Lambda_\varphi^{-1}(s)\right)}=\frac{1}{\left|\dot\varphi\left(\Lambda_\varphi^{-1}(s)\right)\right|}$$

לפי כלל השרשרת עבור $\psi=\varphi\circ\Lambda_\varphi^{-1}$ נקבל:

$$\dot\psi(s)=\dot\psi(s)^{\mathrm{T}}=\dot\varphi\left(\Lambda_\varphi^{-1}(s)\right)^{\mathrm{T}}\left(\Lambda_\varphi^{-1}\right)'(s)=\frac{1}{\left|\dot\varphi\left(\Lambda_\varphi^{-1}(s)\right)\right|}\dot\varphi\left(\Lambda_\varphi^{-1}(s)\right)^{\mathrm{T}}$$

לכן $|\dot\psi(s)|=1$ לכל $s\in[0,\gamma]$ ובעזרת חלק א של טענה 8.ה.9 ומשפט 8.ה.21 נקבל:

$$\int_\varphi f(x)|dx|=\int_\psi f(x)|dx|=\int_0^\gamma f(\psi(s))|\dot\psi(s)|ds=\int_0^\gamma f(\psi(s))ds$$

אם המסילה אינה גזירה ברציפות נצטרך להתאמץ מעט יותר.

נגדיר פונקציה $g:[0,\gamma]\to\mathbf{R}$ על ידי:

$$g:t\mapsto\int_{\psi|_{[0,t]}}f(x)|dx|$$

כיוון ש־$\psi|_{[0,\gamma]}=\psi$ שקולה למסילה $\varphi$ מתקיים

$$\int_\varphi f(x)|dx|=\int_{\psi|_{[0,\gamma]}}f(x)|dx|=g(\gamma)$$

ומה שעלינו להוכיח הוא:

$$g(\gamma)=\int_0^\gamma f(\psi(s))ds$$

לשם כך נראה ש־$g$ היא פונקציה גזירה בקטע $[0,\gamma]$, ושלכל $t\in[0,\gamma]$ מתקיים $g'(t)=f(\psi(t))$ (כאשר בקצות הקטע הכוונה לנגזרת חד־צדדית).

מזה ינבע, בעזרת הנוסחה היסודית של החשבון הדיפרנציאלי והאינטגרלי:

$$\int_0^\gamma f(\psi(s))ds = \int_0^\gamma g'(s)ds = g(\gamma)-g(0) = g(\gamma)$$

נותר להוכיח שעבור כל $t\in[0,\gamma]$ מתקיים:
$$\frac{g(s)-g(t)}{s-t}\xrightarrow[s\in[0,\gamma]]{s\to t} f(\psi(t))$$

עבור $0\le s<t\le\gamma$ מתקיים $\psi|_{[0,t]}=\psi|_{[0,s]}*\psi|_{[s,t]}$ ולכן

$$g(t)=\int_{\psi|_{[0,t]}} f(x)|dx| = \int_{\psi|_{[0,s]}} f(x)|dx| + \int_{\psi|_{[s,t]}} f(x)|dx| = g(s)+\int_{\psi|_{[s,t]}} f(x)|dx|$$

כלומר:
$$g(t)-g(s)=\int_{\psi|_{[s,t]}} f(x)|dx|$$

באופן דומה עבור $0\le t<s\le\gamma$ מתקיים:
$$g(s)-g(t)=\int_{\psi|_{[t,s]}} f(x)|dx|$$

אם $0\le s<t\le\gamma$ נסמן $I=[s,t]$ ו־ $\sigma=-1$. אם $0\le t<s\le\gamma$ נסמן $I=[t,s]$ ו־ $\sigma=1$.

בשני המקרים:
$$g(s)-g(t)=\sigma\int_{\psi|_I} f(x)|dx|$$

יהי $\varepsilon>0$. הפונקציה $f$ רציפה בתמונת המסילה $\varphi$, ששווה לתמונת המסילה $\psi$.

לכן יש $\delta>0$ כך שלכל $x$ בתמונת $\psi$ שמקיים $|x-\psi(t)|<\delta$ מתקיים: $|f(x)-f(\psi(t))|<\varepsilon$

אם $s\in[0,\gamma]$ ו־ $|s-t|<\delta$ אז אם $s<t$ מתקיים:

$$|\psi(s)-\psi(t)|\le L(\psi|_{[s,t]})=L(\psi|_{[0,s]}*\psi|_{[s,t]})-L(\psi|_{[0,s]})=L(\psi|_{[0,t]})-L(\psi|_{[0,s]})=t-s$$

ובדומה אם $t<s$ מתקיים $|\psi(s)-\psi(t)|\le L(\psi|_{[t,s]})=s-t$ ובכל מקרה:

$$|\psi(s)-\psi(t)|\le L(\psi|_I)=|s-t|<\delta$$

לכל $x\in\psi(I)$ יש $s'\in I$ עבורו $x=\psi(s')$ ומתקיים $|s'-t|<\delta$ ולכן $|x-\psi(t)|<\delta$ ומזה נובע

$|f(x)-f(\psi(t))|<\varepsilon$ כלומר:
$$f(\psi(t))-\varepsilon<f(x)<f(\psi(t))+\varepsilon$$

מטענה 12.ה.8 נקבל:
$$\int_{\psi|_I}(f(\psi(t))-\varepsilon)|dx| \le \int_{\psi|_I} f(x)|dx| \le \int_{\psi|_I}(f(\psi(t))+\varepsilon)|dx|$$

לכל קבוע $\lambda$ מתקיים
$$\int_{\psi|_I}\lambda|dx| = \lambda\int_{\psi|_I}1|dx| = \lambda L(\psi|_I)=\lambda|s-t|$$

ולכן:
$$(f(\psi(t))-\varepsilon)|s-t| \le \int_{\psi|_I} f(x)|dx| \le (f(\psi(t))+\varepsilon)|s-t|$$

אז
$$f(\psi(t))-\varepsilon \le \frac{g(s)-g(t)}{\sigma|s-t|} \le f(\psi(t))+\varepsilon$$

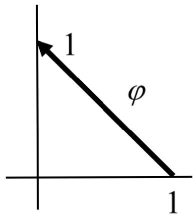
ולכן
$$f(\psi(t))-\varepsilon \le \frac{g(s)-g(t)}{s-t} \le f(\psi(t))+\varepsilon$$

ומכאן
$$\frac{g(s)-g(t)}{s-t}\xrightarrow[s\in[0,\gamma]]{s\to t} f(\psi(t))$$

כלומר $g'(t)=f(\psi(t))$ והסתיימה ההוכחה.

ולכן

### שאלה 3 (20 נקודות)




חשבו את האינטגרל של התבנית $\dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}dx+\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}dy$

על המסילה הפשוטה $\varphi$ שבאיור:

(מומלץ להיעזר בשאלה 21.ו.8 ועובדות נוספות שמוכחות בספר הלימוד.)

**פתרון**

הרעיון העיקרי כאן הוא שהחלפת תפקידים בין המשתנים $x$ ו־$y$ אינה משנה את התבנית, אבל הופכת את מגמת המסילה. מצד אחד האינטגרל לא משתנה, ומצד שני סימנו מתהפך.

נוכיח את הנדרש. נסמן: $F:(x,y)\mapsto\left(\dfrac{x^3}{\left(x^2+y^2\right)^3},\dfrac{y^3}{\left(x^2+y^2\right)^3}\right)$

המסילה $\varphi$ היא מסילה פשוטה שתמונתה הקטע בין הנקודות $e_1=(1,0)$ ו־$e_2=(0,1)$. הנקודה $e_1$ היא מוצא המסילה $\varphi$ והנקודה $e_2$ היא יעד המסילה. האינטגרל המבוקש הוא: $\int_\varphi F\cdot d(x,y)$

נשתמש בשאלה 21.ו.8. נסמן $M=\begin{pmatrix}0&1\\1&0\end{pmatrix}$. מתקיים $M^{\mathrm{T}}=M$. בסימוני שאלה 21.ו.8 מתקיים:

$$\Gamma=\Lambda:(x,y)\mapsto(x,y)M=(y,x)$$

אז

$$\tilde{F}(x,y)=\Lambda\circ F\circ\Gamma(x,y)=\Lambda\Big(F\big(\Gamma(x,y)\big)\Big)=\Lambda\big(F(y,x)\big)$$

$$=\Lambda\left(\frac{y^3}{\left(y^2+x^2\right)^3},\frac{x^3}{\left(y^2+x^2\right)^3}\right)=\left(\frac{x^3}{\left(y^2+x^2\right)^3},\frac{y^3}{\left(y^2+x^2\right)^3}\right)=F(x,y)$$

כלומר $\tilde{F}=F$.

נשים לב גם ש־$\Gamma^{-1}=\Gamma$. המסילה $\Gamma^{-1}\circ\varphi=\Gamma\circ\varphi$ היא מסילה פשוטה שתמונתה $\Gamma(I)$ כאשר $I$ היא תמונת $\varphi$. לפי הנתון $I$ היא הקטע שקצותיו $e_1$ ו־$e_2$ ולכן:

$$I=\{\alpha e_1+\beta e_2\mid\alpha,\beta\ge0,\alpha+\beta\le1\}=\{(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\ge0,\alpha+\beta\le1\}$$

אז:

$$\Gamma(I)=\{\Gamma(\alpha,\beta)\mid\alpha,\beta\ge0,\alpha+\beta\le1\}=\{(\beta,\alpha)\mid\alpha,\beta\ge0,\alpha+\beta\le1\}=I$$

המסילות $\varphi$ ו־$\Gamma^{-1}\circ\varphi$ הן מסילות פשוטות שתמונותיהן שוות שתיהן לקטע $I$. לפי טענה 13.א.8 המסילה $\Gamma^{-1}\circ\varphi$ שקולה למסילה $\varphi$ או למסילה $\bar{\varphi}$. המוצא של $\varphi$ הוא $e_1$ ואילו המוצא של $\Gamma^{-1}\circ\varphi$ הוא $\Gamma^{-1}(e_1)=\Gamma(e_1)=e_2\ne e_1$ ולכן $\Gamma^{-1}\circ\varphi$ אינה שקולה ל־$\varphi$, ולכן היא שקולה ל־$\bar{\varphi}$.

לבסוף, לפי שאלה 21.א.8 וטענה 15.ו.8

$$\int_\varphi F\cdot d(x,y)=\int_{\Gamma^{-1}\circ\varphi}\tilde{F}\cdot d(x,y)=\int_{\bar{\varphi}}\tilde{F}\cdot d(x,y)=\int_{\bar{\varphi}}F\cdot d(x,y)=-\int_{\bar{\varphi}}F\cdot d(x,y)$$

ולכן $\int_{\varphi} F \cdot d(x,y) = 0$.

**דרך אחרת, חישובית יותר:**

המסילה $\psi : [-1,1] \to \mathbf{R}^2$ שמוגדרת על ידי

$$\psi : t \mapsto \left(\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}\right)$$

היא מסילה אפינית שהמוצא שלה הוא

$$\psi(-1) = \left(\frac{1-(-1)}{2}, \frac{1+(-1)}{2}\right) = (1,0) = e_1$$

והיעד שלה הוא:

$$\psi(1) = \left(\frac{1-1}{2}, \frac{1+1}{2}\right) = (0,1) = e_2$$

תמונתה היא הקטע שאלה קצותיו, ולפי טענה 15.א.8 היא שקולה למסילה $\varphi$. לכן:

$$\int_{\varphi} F \cdot d(x,y) = \int_{\psi} F \cdot d(x,y) = \int_{-1}^{1} F(\psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t)\,dt = \int_{-1}^{1} F\left(\frac{1-t}{2}, \frac{1+t}{2}\right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \left( \frac{\left(\frac{1-t}{2}\right)^3}{\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^2\right)^3}, \frac{\left(\frac{1+t}{2}\right)^3}{\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^2\right)^3} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) dt$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(\frac{1-t}{2}\right)^3}{\left(\left(\frac{1-t}{2}\right)^2 + \left(\frac{1+t}{2}\right)^2\right)^3} dt$$

קיבלנו אינטגרל של פונקציה אי־זוגית על הקטע הסימטרי $[-1,1]$ ולכן ערכו הוא $0$.

## שאלה 4 (20 נקודות)

נתונה הפונקציה $F:(x,y)\mapsto\left(\frac{-2xy^3}{x^4+y^6},\frac{3x^2y^2}{x^4+y^6}\right)$

שמוגדרת במישור המנוקב $U=\mathbf{R}^2\setminus\{(0,0)\}$.

הראו ש־ $F$ גזירה ברציפות ב־ $U$ ושלכל $a\in U$ מטריצת היעקוביאן $JF_a$ סימטרית.

האם $F$ היא שדה משמר ב־ $U$? נמקו!

**פתרון**

ראשית אפשר לחשב את מטריצת היעקוביאן על ידי חישוב הנגזרות החלקיות של רכיבי הפונקציה ולקבל:

$$JF_{(x,y)}=\begin{pmatrix}\frac{(x^4+y^6)\cdot(-2y^3)-(-2xy^3)\cdot(4x^3)}{(x^4+y^6)^2} & \frac{(x^4+y^6)\cdot(-6xy^2)-(-2xy^3)\cdot(6y^5)}{(x^4+y^6)^2}\\ \frac{(x^4+y^6)\cdot(6xy^2)-(3x^2y^2)\cdot(4x^3)}{(x^4+y^6)^2} & \frac{(x^4+y^6)\cdot(6x^2y)-(3x^2y^2)\cdot(6y^5)}{(x^4+y^6)^2}\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(x^4+y^6)^2}\begin{pmatrix}6x^4y^3-2y^9 & 6xy^8-6x^5y^2\\ 6xy^8-6x^5y^2 & 6x^6y-12x^2y^7\end{pmatrix}$$

לכל $(x,y)\neq(0,0)$ זאת מטריצה סימטרית, וכל רכיביה הם פונקציות רציונליות שמוגדרות ולכן רציפות ב־ $U$, ולכן $F$ גזירה ברציפות ב־ $U$.

יש דרכים רבות להראות ש־ $F$ היא שדה משמר ב־ $U$. למשל: המסילה $\varphi:[0,2\pi]\to\mathbf{R}^2$ שמוגדרת על־ידי $t\mapsto(\cos t,\sin t)$ היא לולאה סדירה ומספר הליפוף שלה הוא 1. כמוכן:

$$\oint_{\varphi}F\cdot d(x,y)=\int_0^{2\pi}F(\varphi(t))\cdot\dot{\varphi}(t)\,dt=\int_0^{2\pi}F(\cos t,\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{-2\cos t\sin^3 t}{\cos^4 t+\sin^6 t},\frac{3\cos^2 t\sin^2 t}{\cos^4 t+\sin^6 t}\right)\cdot(-\sin t,\cos t)\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\left(\frac{2\cos t\sin^4 t}{\cos^4 t+\sin^6 t}+\frac{3\cos^3 t\sin^2 t}{\cos^4 t+\sin^6 t}\right)dt=\int_0^{2\pi}\frac{2\cos t\sin^4 t+3\cos^3 t\sin^2 t}{\cos^4 t+\sin^6 t}\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{2\sin^4 t+3\cos^2 t\sin^2 t}{\cos^4 t+\sin^6 t}\cdot\cos t\,dt=\int_0^{2\pi}\frac{2\sin^4 t+3(1-\sin^2 t)\sin^2 t}{(1-\sin^2 t)^2+\sin^6 t}\cdot\cos t\,dt$$

$$=\int_0^{2\pi}\frac{3\sin^2 t-\sin^4 t}{(1-\sin^2 t)^2+\sin^6 t}\cdot\cos t\,dt=\int_0^{2\pi}g(\sin t)\cdot\cos t\,dt$$

עם: $g:x\mapsto\frac{3x^2-x^4}{(1-x^2)^2+x^6}$

זאת פונקציה רציונלית ולכן היא רציפה בתחום הגדרתה. המכנה אינו אפס כי הוא סכום של שני ביטויים אי־שליליים שאינם מתאפסים יחד. לכן זאת פונקציה רציפה ב־ $\mathbf{R}$ ומכאן שיש לה פונקציה קדומה ב־ $\mathbf{R}$ כלומר יש $G:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ כך ש־ $G'(x)=g(x)$ לכל $x\in\mathbf{R}$ .

מכלל השרשרת $(G\circ\sin)'=(G'\circ\sin)\cdot\cos=(g\circ\sin)\cdot\cos$ . לכן:

$$\oint_{\varphi} F\cdot d(x,y)=\int_0^{2\pi} g(\sin t)\cdot\cos t\,dt=G(\sin 2\pi)-G(\sin 0)=G(0)-G(0)=0$$

מחלק ב(ii) של שאלה 10.י.8 נובע ש־ $F$ הוא שדה משמר ב־ $U$ .

**דרך אחרת להראות ש־ $F$ היא שדה משמר ב־ $U$ :**

נמצא פוטנציאל ל־ $F$ ב־ $U$ . זאת צריכה להיות פונקציה $f:U\to\mathbf{R}$ שמקיימת $\nabla f=F$ , דהיינו $\frac{\partial f}{\partial x}=[F]_1$ ו־ $\frac{\partial f}{\partial y}=[F]_2$ . בפרט לכל $(x,y)\in U$ צריך להתקיים $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=\frac{3x^2y^2}{x^4+y^6}$

אז לכל קבוע $a$ הנגזרת של הפונקציה $g:y\to f(a,y)$ צריכה להיות הפונקציה $y\mapsto\frac{3a^2y^2}{a^4+y^6}$

לכן $g$ היא פונקציה קדומה של $y\mapsto\frac{3a^2y^2}{a^4+y^6}$ ונקבל אותה בחישוב של אינטגרל בלתי־מסויים:

$$\int\frac{3a^2y^2}{a^4+y^6}dy=\int\frac{3a^{-2}y^2}{1+\left(a^{-2}y^3\right)^2}dy\underset{\boxed{\substack{z=a^{-2}y^3\\ dz=3a^{-2}y^2dy}}}{=}\int\frac{dz}{1+z^2}=\arctan z=\arctan\left(a^{-2}y^3\right)$$

לכל $a\neq 0$ הפונקציות $g:y\to f(a,y)$ ו־ $y\mapsto\arctan\left(a^{-2}y^3\right)$ שתיהן פונקציות קדומות של הפונקציה $y\mapsto\frac{3a^2y^2}{a^4+y^6}$ ולכן הן נבדלות בקבוע, כלומר לכל $a\neq 0$ יש קבוע $h(a)$ כך שמתקיים $g(y)-\arctan\left(a^{-2}y^3\right)=h(a)$ לכל $y$ ממשי ולכן: $f(a,y)=g(y)=\arctan\left(a^{-2}y^3\right)+h(a)$

אז לכל $(x,y)$ כך ש־ $x\neq 0$ מתקיים: $f(x,y)=\arctan\left(x^{-2}y^3\right)+h(x)$

אז לכל $x\neq 0$ וכל $y$ מתקיים גם:

$$\frac{-2xy^3}{x^4+y^6}=\left[F(x,y)\right]_1=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\arctan'\left(x^{-2}y^3\right)\cdot(-2)x^{-3}y^3+h'(x)=\frac{-2x^{-3}y^3}{1+\left(x^{-2}y^3\right)^2}=\frac{-2xy^3}{x^4+y^6}+h'(x)$$

נבחר את $h$ להיות פונקציה שקבועה בקבוצה $(0,\infty)$ וגם קבועה בקבוצה $(-\infty,0)$ ואז $h'(x)=0$ לכל $x\neq 0$ , והפונקציה $(x,y)\mapsto\arctan\left(x^{-2}y^3\right)+h(y)$ היא פונקציה גזירה ברציפות בקבוצה $W=\{(x,y)\mid x\neq 0\}$ שהגרדיאנט שלה בכל נקודה $(x,y)\in W$ הוא $F(x,y)$ . אז היא פוטנציאל של $F$ בקבוצה הפתוחה $W$ ולכן $F$ היא שדה משמר ב־ $W$ . זה לא מראה עדיין ש־ $F$ היא שדה משמר ב־ $U$ , כי הפוטנציאל שמצאנו אינו מוגדר בנקודות $(0,y)\in U$ . כדי להגדיר פונקציית

פוטנציאל גם שם נשים לב שאם $b>0$ אז $\arctan\left(x^{-2}y^{3}\right)\xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x\neq 0}]{}\lim_{t\to\infty}\arctan t=\frac{\pi}{2}$

ואם $b<0$ אז $\arctan\left(x^{-2}y^{3}\right)\xrightarrow[\substack{(x,y)\to(0,b)\\ x\neq 0}]{}\lim_{t\to-\infty}\arctan t=-\frac{\pi}{2}$

נגדיר אפוא
$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}\frac{\pi}{2} & x=0,y>0\\ \arctan\left(x^{-2}y^{-3}\right) & x\neq 0\\ -\frac{\pi}{2} & x=0,y<0\end{cases}$$

לפי השיקולים לעיל זאת פונקציה רציפה ב־ $U$ וגזירה ב־ $W$, וכן הגרדיאנט שלה ב־ $W$ הוא $F|_W$ .
צריך להראות שהיא גזירה גם בנקודות של $U\setminus W$ ושגם בנקודות אלה ערך הגרדיאנט שלה שווה לערך של $F$ . אפשר לעשות זאת בחישוב ישיר של הנגזרות החלקיות (אחרי שיודעים שהן שוות לרכיבי $F$, יודעים גם ש־ $f$ גזירה חלקית ברציפות ולכן היא גזירה). אפשר לעשות זאת גם בדרך אחרת. ידועה זהות:
$$\arctan\alpha+\arctan\frac{1}{\alpha}=\begin{cases}\frac{\pi}{2} & \alpha>0\\ -\frac{\pi}{2} & \alpha<0\end{cases}$$

לכן עבור $y>0$ ו־ $x\neq 0$ מתקיים $f(x,y)+\arctan\left(x^{2}y^{-3}\right)=\frac{\pi}{2}$

ועבור $y<0$ ו־ $x\neq 0$ מתקיים: $f(x,y)+\arctan\left(x^{2}y^{-3}\right)=-\frac{\pi}{2}$

בהצבה של $x=0$ מקבלים שהשוויונות האלה נכונים גם אם $x=0$ .

אז עבור $y\neq 0$ מתקיים: $f(x,y)=\pm\frac{\pi}{2}-\arctan\left(x^{2}y^{-3}\right)$

מזה אפשר לקבל שבקבוצה $V=\{(x,y)\mid y\neq 0\}$ מתקיים
$$\frac{\partial f}{\partial x}=-\arctan'\left(x^{2}y^{-3}\right)\cdot 2xy^{-3}=\frac{-2xy^{-3}}{1+\left(x^{2}y^{-3}\right)^{2}}=\frac{-2xy^{3}}{x^{4}+y^{6}}=\left[F(x,y)\right]_{1}$$

וגם:
$$\frac{\partial f}{\partial y}=-\arctan'\left(x^{2}y^{-3}\right)\cdot(-3)x^{2}y^{-4}=\frac{3x^{2}y^{-4}}{1+\left(x^{2}y^{-3}\right)^{2}}=\frac{3x^{2}y^{2}}{x^{4}+y^{6}}=\left[F(x,y)\right]_{2}$$

אז לכל $(x,y)\in V$ מתקיים $\nabla f(x,y)=F(x,y)$ . זה נכון גם לכל $(x,y)\in W$ . אבל $V\cup W=U$ ולכן לכל $(x,y)\in U$ מתקיים $\nabla f(x,y)=F(x,y)$ . לפי משפט 10.ז.8 $f$ היא פונקציית פוטנציאל עבור $F$ בקבוצה $U$ ולפי טענה 7.ז.8 $F$ היא שדה משמר ב־ $U$.
**יש דרכים נוספות להתמודד עם השאלה.** למשל אפשר למצוא לולאה שעל תמונתה הביטוי $x^4+y^6$ קבוע. על תמונת לולאה כזאת $F$ מתלכדת עם פונקציה שרכיביה פולינומים, וקל יותר לחשב את האינטגרל של התבנית $F\cdot d(x,y)$ על מסילה כזאת (ואפשר להיעזר במשפט גרין מפרק 9 לחישוב האינטגרל הזה). עדיין יהיה צורך להראות שלולאה כזאת היא בעלת מספר ליפוף שאינו 0, ולשם כך אפשר למשל להיעזר בהומוטופיה של לולאות, או לחילופין בשאלה 22.ט.9.

## שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $\varphi:[0,1]\to\mathbf{R}^k$ מסילה שתמונתה היא הקבוצה $A$. תהי $F:\mathbf{R}^k\setminus\left\{0^{[k]}\right\}\to\mathbf{R}^k$ פונקציה גזירה ברציפות כך שלכל $x\in\mathbf{R}^k\setminus\left\{0^{[k]}\right\}$ המטריצה $JF_x$ היא מטריצה סימטרית.

נגדיר פונקציה חלקית $G$ מ־ $\mathbf{R}^k$ ל־ $\mathbf{R}^k$ על־ידי: $G:x\mapsto F\left(x-\varphi(0)\right)-F\left(x-\varphi(1)\right)$

הוכיחו ש־ $G$ היא שדה משמר בקבוצה $\mathbf{R}^k\setminus A$.

### פתרון

הקבוצה $A$ סגורה לפי טענה 10.ח.2 ולפי אבחנה 11.א.2 הקבוצה $\mathbf{R}\setminus A$ פתוחה.

לכל $\lambda\in[0,1]$ הפונקציה $\tau_\lambda:x\to x-\varphi(\lambda)$ היא פונקציה אפינית (הזזה) ובפרט היא רציפה.

אם $x\in\mathbf{R}^k\setminus A$ אז $x\neq\varphi(\lambda)$ ולכן $\tau_\lambda(x)=x-\varphi(\lambda)\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ ולכן $F$ רציפה ב־ $\tau_\lambda(x)$, ומכאן ש־ $F\circ\tau_\lambda$ רציפה ב־ $x$. אז הפונקציה $F\circ\tau_\lambda:x\mapsto F\left(x-\varphi(\lambda)\right)$ רציפה ב־ $\mathbf{R}\setminus A$.

אז הפונקציה $G=F\circ\tau_0-F\circ\tau_1:x\mapsto F\left(x-\varphi(0)\right)-F\left(x-\varphi(1)\right)$ רציפה ב־ $\mathbf{R}\setminus A$.

אם $\psi:[\alpha,\beta]\to\mathbf{R}^k\setminus A$ לולאה שאורכה סופי: נראה שמתקיים $\int\limits_\psi G(x)\cdot dx=0$

ומכך ינבע מיידית ש־ $G$ היא שדה משמר בקבוצה $\mathbf{R}^k\setminus A$ (לפי שאלה 3.ז.8).

לכל $x\in\mathbf{R}\setminus A$ מתקיים $G(x)=F\left(x-\varphi(0)\right)-F\left(x-\varphi(1)\right)$ ולכן

$$\int\limits_\psi G(x)\cdot dx=\int\limits_\psi F\left(x-\varphi(0)\right)\cdot dx-\int\limits_\psi F\left(x-\varphi(1)\right)\cdot dx$$

ולכן עלינו להוכיח כי: $\int\limits_\psi F\left(x-\varphi(0)\right)\cdot dx=\int\limits_\psi F\left(x-\varphi(1)\right)\cdot dx$

נגדיר הומוטופיה של לולאות:

$$\begin{aligned}H:[\alpha,\beta]\times[0,1]&\to\mathbf{R}^k\\(t,\lambda)&\mapsto\psi(t)-\varphi(\lambda)\end{aligned}$$

זאת בבירור פונקציה רציפה כהפרש בין פונקציות רציפות. לכל $\lambda\in[0,1]$ הפונקציה $H_\lambda:t\mapsto H(t,\lambda)$ היא לולאה כי: $H_\lambda(\alpha)=\psi(\alpha)-\varphi(\lambda)=\psi(\beta)-\varphi(\lambda)=H_\lambda(\beta)$

לכל $(t,\lambda)\in[\alpha,\beta]\times[0,1]$ מתקיים $\psi(t)\in\mathbf{R}^k\setminus A$ ו־ $\varphi(\lambda)\in A$ ולכן: $H(t,\lambda)=\psi(t)-\varphi(\lambda)\neq 0$

לפי טענה 13.ח.8 (עם $U=\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$) מתקיים: $\int\limits_{H_0}F(x)\cdot dx=\int\limits_{H_1}F(x)\cdot dx$

נראה שלכל $\lambda\in[0,1]$ מתקיים $\int\limits_{H_\lambda}F(x)\cdot dx=\int\limits_\psi F\left(x-\varphi(\lambda)\right)\cdot dx$

ומזה ינבע המבוקש: $\int\limits_\psi F\left(x-\varphi(0)\right)\cdot dx=\int\limits_\psi F\left(x-\varphi(1)\right)\cdot dx$

לכל חלוקה $T=(t_i)_{i=0}^r$ של הקטע $[\alpha,\beta]$ ולכל דגימה $X=(x_i)_{i=1}^r$ מקטעי החלוקה $T$ סכום רימן של התבנית הדיפרנציאלית $F\left(x-\varphi(\lambda)\right)\cdot dx$ על המסילה $\psi$ הוא:

$$S_{T,X}\left(F\left(x-\varphi(\lambda)\right)\cdot dx;\psi\right)=\sum_{i=1}^{r}F\left(\psi(x_i)-\varphi(\lambda)\right)\cdot\left(\psi(t_i)-\psi(t_{i-1})\right)$$

סכום רימן של התבנית הדיפרנציאלית $F(x)\cdot dx$ על המסילה $H_\lambda$ הוא:

$$\begin{aligned}S_{T,X}\left(F(x)\cdot dx;H_\lambda\right)&=\sum_{i=1}^{r}F\left(H_\lambda(x_i)\right)\cdot\left(H_\lambda(t_i)-H_\lambda(t_{i-1})\right)\\&=\sum_{i=1}^{r}F\left(\psi(x_i)-\varphi(\lambda)\right)\cdot\left(\left(\psi(t_i)-\varphi(\lambda)\right)-\left(\psi(t_i)-\varphi(\lambda)\right)\right)\\&=\sum_{i=1}^{r}F\left(\psi(x_i)-\varphi(\lambda)\right)\cdot\left(\psi(t_i)-\psi(t_i)\right)\end{aligned}$$

אז לכל חלוקה $T$ של הקטע $[\alpha,\beta]$ ולכל דגימה $X$ מקטעי החלוקה $T$ מתקיים

$$S_{T,X}\left(F(x)\cdot dx;H_\lambda\right)=S_{T,X}\left(F\left(x-\varphi(\lambda)\right)\cdot dx;\psi\right)$$

ולכן לכל חלוקה $T$ של הקטע $[\alpha,\beta]$:

$$R_T\left(F(x)\cdot dx;H_\lambda\right)=R_T\left(F\left(x-\varphi(\lambda)\right)\cdot dx;\psi\right)$$

אז בהכרח לפי הגדרה 9.ו.8

$$\int_{H_\lambda}F(x)\cdot dx=\int_{\psi}F\left(x-\varphi(\lambda)\right)\cdot dx$$

והסתיימה ההוכחה.