

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
חומר הלימוד למטלה: פרק 7
מספר השאלות: 4
סמסטר: 1א2026
משקל המטלה: 4 נקודות
מועד אחרון להגשה: 8.3.2026

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $\varphi: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה זוגית וגזירה ברציפות בסביבה של 0. נניח גם $\varphi(0) = 2$.
הוכיחו שהמשוואה $x + y = \varphi(x - y)$ מגדירה באופן סתום בסביבת $(1,1)$ את y כפונקציה גזירה של x , שנשמנה ב' f '.
חשבו את $f'(1)$ והוכיחו שיש סביבה V של 1 כך שלכל $x \in V$ מתקיים $f(f(x)) = x$.
תזכורת: פונקציה זוגית דהיינו $\varphi(-t) = \varphi(t)$ לכל t .

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי U קבוצה פתוחה ב' $\mathbb{R}^3$. תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}^2$ פונקציה שגזירה ברציפות בקבוצה U .
נתון שיש $a \in U$ כך שדרגת המטריצה Jf_a היא 2. הוכיחו ש' f אינה פונקציה חד-חד-ערכית.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $\alpha \in \mathbb{R}$ ותהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות והומוגנית-חיובית ממעלה α .
לפי דוגמה 7.ג.7 הגרף $G(f)$ הוא משטח-על חלק. הראו שאם יש נקודה שמשותפת לכל מישורי העל המשיקים למשטח-על $G(f)$ אז f קבועה או $\alpha = 1$.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי α מספר ממשי ותהי:
$$A = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y + z = \alpha \right\}$$

הוכיחו כי לפונקציה $f: (x, y, z) \mapsto xy + yz + xz - 2xyz$ יש ערך מזערי ב' A אם ורק אם $\alpha \geq 4.5$.
(עצה: כדאי לחשוב גם על ערכי f ב' ∂A).

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2025\3\81 שהיא גם שאלה 15 מקבוץ שאלות בחינה לדוגמה (היתה 2019\3\85 בקורס הישן).

שימוש במשפט ההגדרה הסתומה. השוויון בסוף נובע מהיחידות ומהסימטריה (x, y) פתרון של המשוואה אם ורק אם (y, x) פתרון שלה. הרעיון לשאלה הוא סיבוב ב- 45° של גרף של פונקציה זוגית.

לשאלה 2: 2025\3\93.

מן הסתם יש דרכים לנסח הוכחה תוך שימוש במשפט ההגדרה הסתומה או ישירות במשפט הפונקציה ההופכית.

דרך פתרון אפשרית: יש סביבה פתוחה $\tilde{U} \subseteq U$ כך שלכל $x \in \tilde{U}$ דרגת Jf_x היא 2. ממשפט 11.ג.7 מקבלים ש- $S = \{x \in \tilde{U} \mid f(x) = f(a)\}$ היא יריעה חלקה ממימד $3 - 2 = 1$.

היא אינה ריקה ולכן היא אינסופית, ובפרט יש $b \in S \setminus \{a\}$ ומתקיים $f(b) = f(a)$. (היא אינסופית כי היא מכילה טלאי חד-ממדי לא ריק, כלומר בפרט יש $h: \Omega \rightarrow S$ טלאי חלק חד-ממדי, והקבוצה Ω היא קבוצה פתוחה לא ריקה ב- $\mathbb{R}$, ובפרט היא מכילה קטע פתוח שהוא קבוצה אינסופית, וכיוון ש- h חד-חד-ערכית גם $h(\Omega)$ היא תת-קבוצה אינסופית של S).
טענה 20.ג.7 מאפשרת פתרון קצר יותר.
הערה: אני חושב שהתנאי על הנקודה a מיותר, אבל נראה שהוכחה במקרה שבכל נקודה $x \in U$ הדרגה של Jf_x היא 1 מחייבת שימוש בידע על משוואות דיפרנציאליות (איזושהו משפט קיום ויחידות?).

לשאלה 3: מעין טענה הפוכה לזאת שב2020\3\72 ו-2021\3\12.

לפי דוגמה 10.ד.7 לכל $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ יש מישור-על משיק שהוא:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^r \times \mathbb{R} \mid y = f(b) + \nabla f(b) \cdot (x - b)\}$$

אם לכל אילה יש נקודה משותפת (a, c) אז לכל $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מתקיים

$$c = f(b) + \nabla f(b) \cdot (a - b)$$

$$c = f(b) - b \cdot \nabla f(b) + a \cdot \nabla f(b)$$

$$c = f(b) - \alpha f(b) + a \cdot \nabla f(b) = (1 - \alpha)f(b) + a \cdot \nabla f(b)$$

כאשר במעבר לשורה האחרונה היה שימוש בזוהת אוילר $x \cdot \nabla f(x) = \alpha f(x)$.

אם $a = 0$ אז $c = (1 - \alpha)f(b)$ עבור כל $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$, וזה אפשרי רק אם f קבועה

או $\alpha = 1$. אחרת נציב $b = ta$ עם $t > 0$ כלשהו ונקבל:

$$c = (1 - \alpha)f(ta) + a \cdot \nabla f(ta)$$

$$c = (1 - \alpha)f(ta) + t^{-1}ta \cdot \nabla f(ta) = (1 - \alpha)f(ta) + t^{-1}\alpha f'(ta)$$

$$c = (1 - \alpha + t^{-1}\alpha)f(ta) = (1 - \alpha + t^{-1}\alpha)t^\alpha f(a)$$

$$c = ((1 - \alpha)t^\alpha + \alpha t^{\alpha-1})f(a)$$

אגף ימין בזהות האחרונה הוא פונקציה קבועה. אם הפונקציה

קבועה ב- $(0, \infty)$ אז נגזרתה אפס. נגזרתה היא

$$t \mapsto (1 - \alpha)\alpha t^{\alpha-1} + \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2} = \alpha(\alpha - 1)t^{\alpha-2}(1 - t)$$

והיא אפס רק אם $a = 0$ או $\alpha = 1$, ולכן קיבלנו ש- $a = 0$ או $\alpha = 1$ או $f(a) = 0$.

אם $\alpha = 0$ מתקבל $c = f(a)$ ולכן לכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מתקיים

$$f(a) = f(b) + \nabla f(b) \cdot (a - b)$$

אם b היא נקודה קריטית של f אז $\nabla f(b) = 0$ ולכן $f(b) = f(a)$. אם

$$b \in S^{k-1}(0^{[k]}; 1) \text{ היא נקודת המקסימום של } f \text{ ב-} S^{k-1}(0^{[k]}; 1) \text{ שקיימת לי משפט}$$

ויירשטראס, אז לכל $x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מתקיים $f(x) = f\left(\frac{1}{|x|}x\right) \leq f(b)$ ולכן היא

נקודת מקסימום של f בקבוצה הפתוחה $\mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$, ולכן היא נקודת מקסימום

מקומי, בפרט היא נקודה קריטית, ולכן $f(b) = f(a)$. אז $f(a)$ הוא הערך המרבי

של f . באותו אופן מתקבל שהוא גם הערך המזערי של f ולכן f קבועה.

עם $f(a) = 0$ אז גם $c = 0$ ונקבל שלכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מתקיים:

$$0 = (1 - \alpha)f(b) + a \cdot \nabla f(b)$$

עכשיו כנראה נרצה להשתמש בכך שהנגזרות החלקיות של f הומוגניות חיובית

ממעלה $\alpha - 1$. זה כך כי לכל $t > 0$, לכל $u \in \mathbf{R}^k$ ולכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \partial_u f(tb) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(tb + hu) - f(tb)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(tb + thu) - f(tb)}{th} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{t^\alpha f(b + hu) - t^\alpha f(b)}{th} = t^{\alpha-1} \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(b + hu) - f(b)}{h} = t^{\alpha-1} \partial_u f(b) \end{aligned}$$

אז גם לכל $t > 0$ ולכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מתקיים:

$$0 = (1 - \alpha)f(tb) + a \cdot \nabla f(tb) \quad : \quad 0 = (1 - \alpha)f(b) + a \cdot \nabla f(b)$$

$$0 = (1 - \alpha)t^\alpha f(b) + a \cdot t^{\alpha-1} \nabla f(b)$$

$$0 = t(1 - \alpha)f(b) + a \cdot \nabla f(b)$$

שוויון זה נכון עבור כל $t > 0$ ולכן בהכרח: $0 = (1 - \alpha)f(b)$

אם $\alpha \neq 1$ מקבלים $f(b) = 0$ עבור כל $b \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ כלומר הפונקציה קבועה.

שאלה 4: $6 \setminus 12 \setminus 2021 = 3 \setminus 85 \setminus 202$ שהיא לפי $3 \setminus 82 \setminus 2015$.

על קודקודי המשולש הפונקציה אישלילית ומתאפסת, ולכן יש מינימום בקבוצה אם ורק אם הערך של הפונקציה איחיובי בנקודת קיצון מקומי.

מכופלי לגרנז' מקבלים את הנקודות $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha - 1)$ ותמורות שלה ו- $(\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha)$.