מתווה לפתרון ממ"ן 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 | סמסטר: 2026א1

חומר הלימוד למטלה: פרק 7 | משקל המטלה: 4 נקודות

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $\varphi:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ פונקציה זוגית וגזירה ברציפות בסביבה של 0. נניח גם ש־ $\varphi(0)=2$.

הוכיחו שהמשוואה $x+y=\varphi(x-y)$ מגדירה באופן סתום בסביבת $(1,1)$ את y כפונקציה גזירה של x, שנסמנה ב־ f.

חשבו את $f'(1)$ והוכיחו שיש סביבה V של 1 כך שלכל $x\in V$ מתקיים $f(f(x))=x$.

תזכורת: פונקציה זוגית דהיינו $\varphi(-t)=\varphi(t)$ לכל t.

פתרון

הדגמה גרפית של נתוני השאלה יש כאן: https://www.desmos.com/calculator/ispnzc97ag

נגדיר פונקציה $F:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ על־ידי: $F:(x,y)\mapsto\varphi(x-y)-x-y$

המשוואה הנתונה בשאלה שקולה למשוואה $F(x,y)=0$.

מתקיים $F(1,1)=\varphi(1-1)-1-1=\varphi(0)-2=0$

ולכן המשוואה הנתונה שקולה למשוואה $F(x,y)=F(1,1)$.

יש סביבה $(-\delta,\delta)$ של 0 שבה φ גזירה ברציפות. הפונקציה הלינארית $(x,y)\mapsto x-y$ רציפה ולכן יש סביבה של $(1,1)$ שהיא מעבירה לסביבה $(-\delta,\delta)$. ל־ (x,y) בסביבה זאת מתקיים

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,y)=\varphi'(x-y)-1$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)=-\varphi'(x-y)-1$$

ובפרט F גזירה חלקית ברציפות ולכן גם גזירה ברציפות בסביבה זאת. אז לפי מסקנה 8.ב.7 (מקרה פרטי של משפט ההגדרה הסתומה עם $r=l=1$) המשוואה $F(x,y)=F(1,1)$ מגדירה באופן סתום בסביבת $(1,1)$ את y כפונקציה של x, וביתר פירוט: יש סביבות פתוחות U ו־ W של 1 ופונקציה $f:U\to W$ כך שמתקיים $G(f)=\{(x,y)\in U\times W \mid F(x,y)=F(1,1)\}$

כלומר $G(f)=\{(x,y)\in U\times W \mid x+y=\varphi(x-y)\}$

ויש סביבה פתוחה של 1 שבה f גזירה ולכל x בסביבה הזאת: $f'(x)=-\dfrac{\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))}$

בלי הגבלת הכלליות נוכל להחליף את U בסביבה זאת ולהניח שסביבה זאת היא U.[1]

[1] שימו לב שהחלפת הסביבה U בסביבה פתוחה של a שמוכלת בה אינה משנה אף אחת ממסקנות משפט ההגדרה הסתומה.

בפרט $(1,1)\in G(f)$ כלומר $f(1)=1$ ומתקיים: $f'(1)=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(1,1)}{\frac{\partial F}{\partial y}(1,1)}=-\frac{\varphi'(1-1)-1}{-\varphi'(1-1)-1}=\frac{\varphi'(0)-1}{\varphi'(0)+1}$

נתון ש־φ היא פונקציה זוגית, דהיינו $\varphi(-t)=\varphi(t)$ לכל $t\in\mathbf{R}$. גזירת שני האגפים נותנת $-\varphi'(-t)=\varphi'(t)$ לכל t בסביבה שבה φ גזירה, ובפרט $-\varphi'(0)=\varphi'(0)$ ולכן $\varphi'(0)=0$.

אז: $f'(1)=\frac{\varphi'(0)-1}{\varphi'(0)+1}=\frac{-1}{1}=-1$

מאחר ש־φ פונקציה זוגית מתקיים: $F(y,x)=\varphi(y-x)-y-x=\varphi(x-y)-x-y=F(x,y)$

הקבוצה U היא סביבה של 1. מאחר ש־ f גזירה ב־1 היא גם רציפה ב־1. מתקיים $f(1)=1$ ולכן יש סביבה V של 1 כך ש־$f(V)\subseteq U$. על ידי החלפת V בסביבה $U\cap W\cap V$ נוכל גם להניח בלי הגבלת הכלליות ש־$V\subseteq U\cap W$.

אם $x\in V$ אז בפרט $x\in U$ ו־$(x,f(x))\in G(f)$ ולכן: $F(x,f(x))=F(1,1)$

אז גם: $F(f(x),x)=F(x,f(x))=F(1,1)$

אבל מכך ש $x\in V$ נובע גם ש $x\in W$ ו־$f(x)\in U$ ולכן $(f(x),x)\in U\times W$.

אז $(f(x),x)\in\{(x,y)\in U\times W \mid F(x,y)=F(1,1)\}=G(f)$

ולכן: $f(f(x))=x$

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי U קבוצה פתוחה ב־$\mathbf{R}^3$. תהי $f:U\to\mathbf{R}^2$ פונקציה שגזירה ברציפות בקבוצה U.

נתון שיש $a\in U$ כך שדרגת המטריצה Jf_a היא 2. הוכיחו ש־ f אינה פונקציה חד־חד־ערכית.

פתרון

יש מגוון דרכים להוכיח את המבוקש, וחלקן אינן משתמשות בכל נתוני השאלה. כמובן ככל שמסתמכים על פחות הנחות צריך להתאמץ יותר. אפשר למשל להחליש את התנאי לגזירות ברציפות בנקודה a בלבד ולהוכיח את הנדרש בעזרת משפט ההגדרה הסתומה.

נראה כאן הוכחה בעזרת האפיונים של יריעה חלקה.

טענת עזר: יש סביבה פתוחה $\tilde{U}\subseteq U$ של a כל שלכל $x\in\tilde{U}$ דרגת המטריצה JF_x היא 2.

נוכיח את טענת העזר בהמשך, וקודם כל נסיים את ההוכחה ש־ F אינה חד־חד־ערכית.

לפי האיפיון בחלק ב של משפט 11.ג.7 (עם $k=3$ ו־ $d=1$) הקבוצה $S=\{x\in\tilde{U}\mid f(x)=f(a)\}$ היא יריעה חלקה חד־ממדית.לפי האפיון בחלק ג של משפט 11.ג.7 יש סביבה פתוחה V של a כך ש־ $S\cap V$ היא טלאי חלק חד־ממדי. לכן לפי הגדרה 5.ג.7 יש קבוצה פתוחה Ω ב־ $\mathbf{R}$ ויש הומאומורפיזם $h:\Omega\to S\cap V$ שהוא בעל עוד כמה תכונות שלא נשתמש בהן.

הקבוצה $S\cap V$ אינה ריקה כי $a\in S\cap V$ ולכן גם $\Omega\neq\varnothing$. קבוצה פתוחה לא ריקה ב־ $\mathbf{R}$ היא אינסופית כי היא מכילה קטע פתוח, ובפרט יש בה שתי נקודות שונות: $\omega_1,\omega_2\notin\Omega$ ו־ $\omega_1\neq\omega_2$.

הפונקציה h היא חד־חד־ערכית ולכן $h(\omega_1)\neq h(\omega_2)$. אבל $h(\omega_1),h(\omega_2)\in S$ ולכן

$$f(h(\omega_1))=f(a)=f(h(\omega_2))$$

ומאחר שכאמור $h(\omega_1)\neq h(\omega_2)$ זה מראה ש־ f אינה חד־חד־ערכית.

וריאציה על הוכחה זאת: הקבוצה $T_a(S)$ היא תת־מרחב לינארי חד־ממדי לפי טענה 2.ד.7. אבל אם f חד־חד־ערכית אז $S=\{a\}$ ולכן המסילה $\varphi:[-1,1]\to S$ היחידה היא המסילה הקבועה שמוגדרת על־ידי $\varphi(t)=a$ לכל $t\in[-1,1]$, ולפי הגדרה 1.ד.7 $T_a(S)=\{\dot{\varphi}(0)\}=\{0\}$, וזה אינו תת־מרחב לינארי חד־ממדי.

הוכחת טענת העזר: Jf_a היא מטריצה 2×3 שדרגתה 2. יש מטריצה B כך ש־ Jf_aB היא מטריצה 2×2 הפיכה, כלומר $\det(Jf_aB)\neq0$.[2] נתון ש־ f גזירה ברציפות ב־ a דהיינו הפונקציה $x\mapsto Jf_x$ רציפה ב־ a (ולכן גם $x\mapsto\det(Jf_xB)$ רציפה ב־ a. אז יש סביבה פתוחה $\tilde{U}\subseteq U$ של a שלכל x בה מתקיים $\det(Jf_xB)\neq0$ ולכן Jf_xB היא מטריצה 2×2 הפיכה, ומכאן ש־ Jf_x היא מטריצה 3×2 שדרגתה 2.

---

[2] ומדוע יש B כזאת? תהי A מטריצה $m\times n$ עם $m\le n$ שדרגתה m. היא מייצגת פונקציה לינארית $T:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$ (ביחד לבסיסים מתאימים של התחום והטווח, למשל הבסיסים הסטנדרטיים). העובדה שדרגת המטריצה היא m פירושה ש־ $\dim\operatorname{Im}T=m$ כלומר היא על. יש $v_1,\dots,v_m\in\mathbf{R}^n$ כך ש־ $T(v_i)=e_i\in\mathbf{R}^m$ עבור $i=1,\dots,m$. יש פונקציה לינארית $S:\mathbf{R}^m\to\mathbf{R}^n$ כך ש־ $S(e_i)=v_i$ עבור $i=1,\dots,m$. אז $T(S(e_i))=e_i$ עבור $i=1,\dots,m$ ולכן TS היא פונקציית הזהות, ואם B המטריצה המייצגת את S אז $AB=I$. יש דרכים נוספות רבות להוכיח זאת.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי $\alpha \in \mathbf{R}$ ותהי $f:\mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\} \to \mathbf{R}$ פונקציה גזירה ברציפות והומוגנית־חיובית ממעלה α.

לפי דוגמה 7.ג.7 הגרף $G(f)$ הוא משטח־על חלק. הראו שאם יש נקודה שמשותפת לכל מישורי־העל המשיקים למשטח־על $G(f)$ אז f קבועה או $\alpha = 1$.

פתרון

נניח שהמסקנה אינה נכונה, כלומר נניח ש־ $\alpha \neq 1$ וש־ f אינה פונקציה קבועה, ונראה שהנחה זאת מובילה לסתירה.

לפי דוגמה 7.ד.10 לכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$ יש מישור־על משיק שהוא:

$$\left\{(x,y) \in \mathbf{R}^k \times \mathbf{R} \;\middle|\; y = f(b) + \nabla f(b)\cdot(x-b)\right\}$$

אם לכל אלה יש נקודה משותפת (a,c) אז לכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$ מתקיים

$$c = f(b) + \nabla f(b)\cdot(a-b)$$
$$c = f(b) - b\cdot\nabla f(b) + a\cdot\nabla f(b)$$
$$c = f(b) - \alpha f(b) + a\cdot\nabla f(b) = (1-\alpha) f(b) + a\cdot\nabla f(b)$$

כאשר במעבר לשורה האחרונה היה שימוש בזהות אוילר $x\cdot\nabla f(x) = \alpha f(x)$ (ראו דוגמה 3.ב.11).

אם $a = 0$ אז $c = (1-\alpha) f(b)$ עבור כל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$, וזה אפשרי רק אם f קבועה או $\alpha = 1$.

לפי הנחת השלילה אין זה כך ולכן $a \neq 0$. נציב $b = ta$ עם $t > 0$ כלשהו ונקבל:

$$c = (1-\alpha) f(ta) + a\cdot\nabla f(ta)$$
$$c = (1-\alpha) f(ta) + t^{-1}ta\cdot\nabla f(ta) = (1-\alpha) f(ta) + t^{-1}\alpha f(ta)$$
$$c = \left(1-\alpha+t^{-1}\alpha\right) f(ta) = \left(1-\alpha+t^{-1}\alpha\right) t^{\alpha} f(a)$$
$$c = \left((1-\alpha)t^{\alpha} + \alpha t^{\alpha-1}\right) f(a)$$

אז אגף ימין בזהות האחרונה הוא פונקציה קבועה של t בקטע $(0,\infty)$.

אם הפונקציה $t \mapsto (1-\alpha)t^{\alpha} + \alpha t^{\alpha-1}$ קבועה ב־$(0,\infty)$ אז נגזרתה אפס. נגזרתה היא

$$t \mapsto (1-\alpha)\alpha t^{\alpha-1} + \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2} = \alpha(\alpha-1)t^{\alpha-2}(1-t)$$

והיא זהותית אפס רק אם $\alpha = 0$ או $\alpha = 1$. מהנחת השלילה $\alpha \neq 1$.

קיבלנו אפוא ש־ $\alpha = 0$ או $f(a) = 0$.

אם $\alpha = 0$ מתקבל $c = f(a)$ ולכן לכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$ מתקיים $f(a) = f(b) + \nabla f(b)\cdot(a-b)$

אם b היא נקודה קריטית של f אז $\nabla f(b) = 0$ ולכן $f(b) = f(a)$. אם $b \in S^{k-1}\left(0^{[k]};1\right)$ היא נקודת המקסימום של f ב־$S^{k-1}\left(0^{[k]};1\right)$ שקיימת לפי משפט ויירשטראס, אז לכל

$x \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$ מתקיים $f(x) = f\left(\frac{1}{|x|}x\right) \le f(b)$ ולכן היא נקודת מקסימום של f בקבוצה הפתוחה $\mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$, ולכן היא נקודת מקסימום מקומי, בפרט היא נקודה קריטית, ולכן $f(b) = f(a)$. אז $f(a)$ הוא הערך המרבי של f. באותו אופן מתקבל שהוא גם הערך המזערי של f ולכן f קבועה בסתירה להנחת השלילה.

אם $f(a) = 0$ אז גם $c = 0$ ונקבל שלכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$ מתקיים: $0 = (1-\alpha) f(b) + a \cdot \nabla f(b)$

עכשיו נרצה להשתמש בכך שהנגזרות החלקיות של f הומוגניות־חיובית ממעלה $\alpha - 1$. זה כך כי לכל $t > 0$, לכל $u \in \mathbf{R}^k$ ולכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$ מתקיים:

$$\partial_u f(tb) = \lim_{h \to 0} \frac{f(tb + hu) - f(tb)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(tb + thu) - f(tb)}{th}$$
$$= \lim_{h \to 0} \frac{t^\alpha f(b + hu) - t^\alpha f(b)}{th} = t^{\alpha - 1} \lim_{h \to 0} \frac{f(b + hu) - f(b)}{h} = t^{\alpha - 1} \partial_u f(b)$$

אז גם לכל $t > 0$ ולכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$ מתקיים: $\nabla f(tb) = t^{\alpha - 1} \nabla f(b)$

נציב בזהות $0 = (1-\alpha) f(b) + a \cdot \nabla f(b)$:

$$0 = (1-\alpha) f(tb) + a \cdot \nabla f(tb)$$
$$0 = (1-\alpha) t^\alpha f(b) + a \cdot t^{\alpha - 1} \nabla f(b)$$
$$0 = t(1-\alpha) f(b) + a \cdot \nabla f(b)$$

שוויון זה נכון עבור כל $t > 0$ ולכן בהכרח $0 = (1-\alpha) f(b)$

לפי הנחת השלילה $\alpha \ne 1$ ולכן $f(b) = 0$ לכל $b \in \mathbf{R}^k \setminus \left\{0^{[k]}\right\}$, כלומר f קבועה, אבל זאת סתירה להנחת השלילה.

בכל המקרים קיבלנו סתירה, ולכן הנחת השלילה אינה נכונה, כלומר בהכרח $\alpha = 1$ או f קבועה.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי α מספר ממשי ותהי: $A=\left\{(x,y,z)\in(0,\infty)^3 \mid x+y+z=\alpha\right\}$

הוכיחו כי לפונקציה $f:(x,y,z)\mapsto xy+yz+xz-2xyz$ יש ערך מזערי ב־A אם ורק אם $\alpha\geq 4.5$.

(עצה: כדאי לחשוב גם על ערכי f ב־∂A.)

פתרון

אם $\alpha\leq 0$ אז הקבוצה A ריקה (כי סכום של שלושה מספרים חיוביים הוא מספר חיובי) ולכן אם $\alpha\leq 0$ אין ל־f נקודת מינימום ב־A, כלומר אין ערך מזערי של f ב־A. נניח מעתה כי $\alpha>0$.

הפונקציה f היא פונקציה פולינומית ולכן רציפה וגם גזירה ברציפות בכל המרחב.

אם יש ל־f ערך מזערי ב־A ו־$a\in A$ היא נקודת מינימום של f ב־A, אז a היא נקודת מינימום מקומי של f תחת האילוץ $\varphi=\alpha$ עם $\varphi:(x,y,z)\mapsto x+y+z$. לפי משפט 7.ה.11 (או טענה 7.ה.19), דהיינו לפי שיטת "כופלי לגרנז", הוקטורים $\nabla\varphi(a)$ ו־$\nabla f(a)$ תלויים לינארית.

לכל נקודה (x,y,z) מתקיים:

$$\nabla\varphi(x,y,z)=(1,1,1)$$
$$\nabla f(x,y,z)=(y+z-2yz,x+z-2xz,x+y-2xy)$$

אם $a=(x,y,z)$ אז שני הוקטורים האלה תלויים לינארית, ומאחר שהראשון אינו וקטור האפס, השני הוא כפולה שלו בסקלר, כלומר יש λ ממשי כך שמתקיים

$$(y+z-2yz,x+z-2xz,x+y-2xy)=\lambda(1,1,1)=(\lambda,\lambda,\lambda)$$

ולכן:

$$y+z-2yz=x+z-2xz=x+y-2xy$$

העברת אגפים בשוויון השמאלי מהשניים נותנת

$$y-x-2yz+2xz=0$$

וכינוס איברים נותן:

$$(x-y)(2z-1)=0$$

ובאפן דומה מהשוויון הימני מקבלים $z-y-2xz+2xy=0$ ולכן:

$$(y-z)(2x-1)=0$$

בנוסף מתקיים האילוץ דהיינו $x+y+z=\alpha$.

אם $x-y=0$ אז מהאילוץ $2x+z=\alpha$ כלומר $z=\alpha-2x$. הצבה של זה ב־$(y-z)(2x-1)=0$ נותנת:

$$(x-(\alpha-2x))(2x-1)=0$$
$$(3x-\alpha)(2x-1)=0$$

אפשרות אחת היא $x=\frac{\alpha}{3}$ ואז גם $y=\frac{\alpha}{3}$ וגם $z=\alpha-2\cdot\frac{\alpha}{3}=\frac{\alpha}{3}$ כלומר:

$$(x,y,z)=\left(\tfrac{\alpha}{3},\tfrac{\alpha}{3},\tfrac{\alpha}{3}\right)$$

האפשרות השניה היא $x=\frac{1}{2}$ ואז גם $y=\frac{1}{2}$ גם $z=\alpha-2\cdot\frac{1}{2}=\alpha-1$ כלומר:

$$(x,y,z)=\left(\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2},\alpha-1\right)$$

האפשרות השניה היא נקודה ב־A רק אם $\alpha>1$.

אם $x-y\neq 0$ אז $2z-1=0$ כלומר $z=\frac{1}{2}$ הצבה של זה ב־$(y-z)(2x-1)=0$ נותנת

$$\left(y-\tfrac{1}{2}\right)(2x-1)=0$$

אז $x=\frac{1}{2}$ או $y=\frac{1}{2}$ וכיוון ש־ $x+y+z=\alpha$ מקבלים שהאפשרויות הן $(x,y,z)=\left(\frac{1}{2},\alpha-1,\frac{1}{2}\right)$

או: $(x,y,z)=\left(\alpha-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$

לסיכום: אם a היא נקודת מינימום של f ב־A אז בהכרח $a=\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3}\right)$

או אם $\alpha>1$ אפשרי גם ש־ a היא אחת מבין: $\left(\alpha-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\alpha-1,\frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\alpha-1\right)$

נבדוק גם שמתקיים: $f\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3}\right)=3\cdot\left(\frac{\alpha}{3}\right)^2-2\cdot\left(\frac{\alpha}{3}\right)^3=\frac{1}{27}\alpha^2(9-2\alpha)=\frac{1}{54}\alpha^2(4.5-\alpha)$

וכן (כאשר $\alpha>1$):

$$f\left(\alpha-1,\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2},\alpha-1,\frac{1}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\alpha-1\right)$$
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}(\alpha-1)-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(\alpha-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}(\alpha-1)>\frac{1}{4}$$

נשים לב שלכל $t\in\left(0,\frac{\alpha}{2}\right)$ מתקיים $(t,t,\alpha-2t)\in A$ ולכן: $f(a)\le f(t,t,\alpha-2t)$

הפונקציה f פולינומית ולכן רציפה בכל נקודה במרחב, ולכן:

$$f(t,t,\alpha-2t)\xrightarrow[t\to0^+]{}f(0,0,\alpha)=0\cdot0+0\cdot\alpha+0\cdot\alpha-2\cdot0\cdot0\cdot\alpha=0$$

לכן בהכרח $f(a)\le0$. אז לא יתכן $f(a)>\frac{1}{4}$ ובהכרח $a=\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3}\right)$.

לבסוף: $0\le f(a)=f\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{1}{54}\alpha^2(4.5-\alpha)$

ולכן $\alpha\ge4.5$.

נותר להוכיח את הכיוון ההפוך: אם $\alpha\ge4.5$ אז יש ל־ f ערך מזערי ב־A.

לשם כך נתבונן בקבוצה $K=\left\{(x,y,z)\in[0,\infty)^3\,\middle|\,x+y+z=\alpha\right\}$

שהיא קבוצה סגורה שמכיל את A.

זאת גם קבוצה חסומה כי אם $(x,y,z)\in K$ אז מתקיים $x\le x+y+z=\alpha$

ובדומה גם $y\le\alpha$ וגם $z\le\alpha$ כלומר: $K\subseteq[0,\alpha]^3$

לפי משפט ויירשטראס יש ל־ f נקודת מינימום a ב־K.

אם $a\in A$ אז לכל $u\in A$ מתקיים גם $u\in K$ ולכן $f(a)\le f(u)$ ולכן a נקודת מינימום של f ב־A. לכן במקרה זה יש ל־ f ערך מזערי ב־A. אחרת $a\in K\setminus A$.

אם $(x,y,z)\in K\setminus A$ אז $x=0$ או $y=0$ או $z=0$.

אם למשל $z=0$ אז: $f(x,y,z)=xy+y\cdot0+x\cdot0-2\cdot xy\cdot0=xy\ge0$

ואופן דומה אם $y=0$ אז $f(x,y)=xz\ge0$ ואם $x=0$ אז $f(x,y,z)=yz\ge0$.

אז $f(a)\ge0$. מצד שני מההנחה $\alpha\ge4.5$ נובע: $f\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3}\right)=\frac{1}{54}\alpha^2(4.5-\alpha)\le0$

לכן: $0\le f(a)\le f\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3}\right)\le0$

אז $f\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3}\right)=f(a)$ הוא הערך המזערי של f ב־K ומאחר ש־ $\left(\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3},\frac{\alpha}{3}\right)\in A$ זה גם הערך המזערי של f ב־A, ובפרט יש ל־ f ערך מזערי ב־A גם במקרה זה.

בשני המקרים הראינו שאם $\alpha\ge4.5$ אז יש ל־ f ערך מזערי ב־A, והסתיימה הוכחת הכיוון השני.