

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

סמסטר : 1א2026

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 3–6

מועד אחרון להגשה : 4.1.2026

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ תהי המוגדרת על ידי: } f(x, y) \mapsto \begin{cases} x \sin\left(\frac{y^2}{x}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

מצאו באילו נקודות f גזירה ובאילו נקודות היא אינה גזירה (והוכיחו!)

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שהיא הומוגנית חיובית ממעלה 1 ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$.

הוכיחו ש- f גזירה ב- $0^{[k]}$ אם ורק אם f היא פונקציה לינארית.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות והומוגנית חיובית ממעלה 0. הוכיחו:

א. לכל $a \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מטריצת ההסיאן Hf_a אינה חיובית לחלוטין ואינה שלילית לחלוטין.

ב. יש ל- f מקסימום ומינימום ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי f פונקציה שרציפה ב- $\bar{B}^k(0^{[k]}; 1)$ וגזירה ב- $B^k(0^{[k]}; 1)$ וכן $|f(x)| \leq 1$ לכל $x \in B^k(0^{[k]}; 1)$.

הוכיחו שיש נקודה $a \in B^k(0^{[k]}; 1)$ כך ש- $|\nabla f(a)| < 4$.

רמז: תוכלו להיעזר בפונקציה $g(x) = f(x) + 2|x|^2$,

שאלה 5 (20 נקודות)

$$\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx$$

היו $-1 < \alpha < \beta$. חשבו את ערכו של האינטגרל המוכלל:

הצדיקו את כל שלבי החישוב.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2025\2\93\ שהיא גם שאלה 10 מקובץ שאלות בחינה לדוגמה (היתה בבחינות 2018\2\82\ ו-2011\1\94\ בקורס הישן).

מחוץ לישר $x=0$ הנגזרות החלקיות רציפות.

בראשית הצירים: $|x \sin(y^2/x)| \leq |x| \cdot |y^2/x| = |xy|$ ולכן:

$$\frac{|f(x,y) - f(0,0) - (0,0) \cdot (x,y)|}{|(x,y)|} \leq \frac{|xy|}{|(x,y)|} = |x| \frac{|y|}{|(x,y)|} \leq |x| \xrightarrow{(x,y) \rightarrow (0,0)} 0$$

בשאר נקודות הישר $x=0$ לא קיימת הנגזרת החלקית לפי x כי לא קיים הגבול של:

$$\frac{f(x,y) - f(0,y)}{x} = \sin\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

לשאלה 2: 2025\2\89\ שדומה במקצת ל-2023\2\91\ (אבל די שונה: שם לא דובר על לינאריות והיתה נתונה רציפות פרט לראשית).

אם f לינארית אז היא גזירה בכל נקודה ובפרט ב- $0^{[k]}$.

אם f גזירה ב- $0^{[k]}$ אז לפי משפט 9.ב.3 לכל $u \in \mathbb{R}^k$ מתקיים: $\partial_u f(0) = \nabla f(0) \cdot u$

כמוכן $\partial_u f(0) = (f|_{0,u})'(0) = \frac{d}{dt}(t \mapsto f(tu))|_{t=0} = \frac{d}{dt}(t \mapsto tf(u))|_{t=0} = f(u)$

ולכן $f(u) = \nabla f(0) \cdot u$ לכל $u \in \mathbb{R}^k$ ולכן f פונקציה לינארית.

לשאלה 3: 2021\2\12\ הפונקציה קבועה על ישרים דרך הראשית ומכאן מקבלים שהנגזרת הכיוונית פעמיים בכיוון a היא אפס ומזה נובע $aHf_a a^T = 0$. כמוכן נובע שתמונות הפונקציה שווה לתמונת ספירת היחידה שהיא קומפקטית והפונקציה רציפה בה, ומכאן מינימום ומקסימום.

לשאלה 4: 2025\2\81\ שהיא גם שאלה 12 מקובץ שאלות בחינה לדוגמה שהייתה גם 2019\2\87\ (בקורס הישן).

בראשית הערך של g לכל היותר 1, ועל השפה לפחות 1, ולכן יש לה נקודת מינימום

מקומי $a \in B(0^{[k]}; 1)$, שבה $\nabla g(a) = 0$ שכן $\nabla g(x) = \nabla f(x) + 4x$ ולכן:

$$|\nabla f(a)| \leq |\nabla g(a)| + 4 \leq 0 + 4|a| < 4$$

לשאלה 5: שאלה שהוצעה לי על ידי Gemini של גוגל. האינטגרנד הוא $\int_{\alpha}^{\beta} x^t dt$ ואפשר להשתמש

במסקנה 10.ב.4 (עם התאמה מתאימה, כלומר צמצום לקטע $[\delta, 1]$ ואחרי כן $\delta \rightarrow 0^+$)

או שאפשר להציג את האינטגרל כפונקציה של הפרמטר β ואז לגזור את הפונקציה

לפי β בעזרת נוסחת לייבניץ (משפט 4.ב.4) חישוב האינטגרל ואז אינטגרציה לפי β .