מתווה לפתרון ממ"ן 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 סמסטר: 2026א1

חומר הלימוד למטלה: פרקים 3–6 משקל המטלה: 2 נקודות

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f:\mathbf{R}^2\to\mathbf{R}$ המוגדרת על ידי:
$$f:(x,y)\mapsto\begin{cases}x\sin\left(\frac{y^2}{x}\right) & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

מִצאו באילו נקודות f גזירה ובאילו נקודות היא אינה גזירה (והוכיחו!)

פתרון

הצמצום של f לקבוצה הפתוחה $\left(\mathbf{R}\setminus\{0\}\right)\times\mathbf{R}$ הוא הפונקציה היסודית $(x,y)\mapsto x\sin\left(\frac{y^2}{x}\right)$

שהיא בעלת נגזרות חלקיות ב־ $\left(\mathbf{R}\setminus\{0\}\right)\times\mathbf{R}$:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)=\sin\left(\frac{y^2}{x}\right)-\frac{y^2}{x}\cos\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

וכן:
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=2y\cos\left(\frac{y^2}{x}\right)$$

הנגזרות החלקיות הן פונקציות יסודיות בקבוצה הפתוחה $\left(\mathbf{R}\setminus\{0\}\right)\times\mathbf{R}$ ולכן (לפי משפט 2.ה.23) הן רציפות בה, ולכן f גזירה חלקית ברציפות בכל נקודה בקבוצה זאת (הגדרה 3.ד.1) ולפי משפט 3.ד.2 היא גזירה בכל נקודה בקבוצה זאת.

נותר לבדוק את גזירות f בכל נקודה $(0,b)$ עם $b\in\mathbf{R}$.

אם $b\neq 0$ נראה שלא קיימת הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)$, ולכן לפי משפט 3.ג.6 היא אינה גזירה בנקודות אלה. ובכן לפי הגדרה 3.ג.1 הנגזרת החלקית הזאת היא הנגזרת הכיוונית $\partial_{e_1}f(0,b)$

שלפי הגדרה 3.ב.1 היא הנגזרת $\left(f|_{(0,b),(1,0)}\right)'(0)$, שהיא הנגזרת של הפרוסה
$$f|_{(0,b),(1,0)}:t\mapsto f\left((0,b)+t(1,0)\right)=f(t,b)$$

בנקודה $t=0$. אם נניח בשלילה שהנגזרת הזאת קיימת אז:
$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,b)=\left(f|_{(0,b),(1,0)}\right)'(0)=\lim_{t\to\infty}\frac{f(t,b)-f(0,b)}{t}=\lim_{t\to\infty}\frac{t\sin\left(\frac{b^2}{t}\right)-0}{t}=\lim_{t\to\infty}\sin\left(\frac{b^2}{t}\right)$$

כמו שלמדנו בקורס חשבון אינפיניטסימלי 1 הגבול הזה אינו קיים, וקיבלנו סתירה.

כדי לראות שאכן הגבול הזה אינו קיים, אפשר למשל להשתמש בסדרה $t_n=\frac{b^2}{\frac{\pi}{2}+\pi n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$

ואז $\sin\left(\frac{b^2}{t_n}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{2}+\pi n\right)=(-1)^n$ היא סדרה שאינה מתכנסת, ולכן הגבול דלעיל אינו קיים.

נותר לבדוק את גזירות f בנקודה $(0,0)$, וזאת נעשה ישירות בעזרת הגדרה 2.א.3.

נשים לב שעבור $x\neq 0$ מתקיים

$$\frac{|f(x,y)-f(0,0)-(0,0)\cdot(x,y)|}{\|(x,y)\|}=\frac{\left|x\sin\left(\frac{y^2}{x}\right)-0-0\right|}{\|(x,y)\|}$$

$$=\frac{|x|}{\|(x,y)\|}\left|\sin\left(\frac{y^2}{x}\right)\right|\le\frac{|x|}{\|(x,y)\|}\left|\frac{y^2}{x}\right|=\frac{y^2}{\|(x,y)\|}=|y|\frac{|y|}{\|(x,y)\|}\le|y|$$

ועבור $x=0$ (ו־$y\neq 0$) מתקיים $\frac{|f(x,y)-f(0,0)-(0,0)\cdot(x,y)|}{\|(x,y)\|}=\frac{|0-0-0|}{\|(x,y)\|}=0\le|y|$

כלומר לכל $(x,y)\neq(0,0)$ מתקיים: $\frac{|f(x,y)-f(0,0)-(0,0)\cdot(x,y)|}{\|(x,y)\|}\le|y|$

אבל $|y|\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$ ולפי מסקנה 4.1.2 מכלל הכריך נובע

$$\frac{f(x,y)-f(0,0)-(0,0)\cdot(x,y)}{\|(x,y)\|}\xrightarrow[(x,y)\to(0,0)]{}0$$

ולכן לפי הגדרה 2.א.3 f גזירה ב־$(0,0)$ וכן $\nabla f(0,0)=(0,0)$.

לסיכום:

f גזירה בכל נקודה (x,y) שבה $x=y=0$ או $x\neq 0$. היא אינה גזירה בנקודות בהן $x=0$ ו־$y\neq 0$.

הערה: בהוכחת הגזירות של f בנקודה $(0,0)$ השתמשנו ב"ניחוש" ש־$\nabla f(0,0)=(0,0)$. הניחוש הזה מתקבל בקלות ממשפט 6.ג.3:

מכך ש־$f(x,0)=0$ לכל x נובע ש־$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=0$ ומכך ש־$f(0,y)=0$ לכל y נובע ש־$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=0$

ולכן אם f גזירה אז בהכרח: $\nabla f(0,0)=\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0,0),\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\right)=(0,0)$

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f:\mathbf{R}^k \to \mathbf{R}$ פונקציה שהיא הומוגנית־חיובית ממעלה 1 ב־ $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$.

הוכיחו ש־ f גזירה ב־ $0^{[k]}$ אם ורק אם f היא פונקציה לינארית.

פתרון

אם f פונקציה לינארית אז לפי טענה 12.א.3 היא גזירה בכל נקודה ובפרט ב־ $0^{[k]}$.

נניח אפוא ש־ f היא פונקציה שגזירה ב־ $0^{[k]}$ ושהיא הומוגנית־חיובית ממעלה 1 ב־ $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ ונוכיח שהיא פונקציה לינארית.

לפי מסקנה 10.א.3 f רציפה ב־ $0^{[k]}$. אז (למשל עם $u = e_1$) מתקיים: $f(tu) \xrightarrow[t\to 0^+]{} f(0)$

f הומוגנית חיובית ממעלה 1 ב־ $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ ולכן לכל $u \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ $t>0$ מתקיים: $f(tu) = tf(u)$

אז מתקיים גם $f(tu) = tf(u) \xrightarrow[t\to 0^+]{} 0f(u) = 0$

ומיחידות הגבול מתקיים: $f(0) = 0$

לפי משפט 9.ב.3 לכל $u \in \mathbf{R}^k$ מתקיים: $\partial_u f(0) = \nabla f(0)\cdot u$

יהי $u \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$. לפי הגדרה 1.ב.3: $\partial_u f(0) = \left(f|_{0,u}\right)'(0) = \frac{d}{dt}\left(t \mapsto f(tu)\right)|_{t=0} = \lim\limits_{t\to 0}\frac{f(tu)-f(0)}{t}$

ראינו שלכל $t>0$ מתקיים $f(tu) = tf(u)$ וכן $f(0)=0$ לכן:

$$\partial_u f(0) = \lim_{t\to 0^+}\frac{tf(u)-0}{t} = \lim_{t\to 0^+} f(u) = f(u)$$

לכן לכל $u \neq 0$ מתקיים $f(u) = \partial_u f(0) = \nabla f(0)\cdot u$. בנוסף גם: $f(0) = 0 = \nabla f(0)\cdot 0$

אז לכל $x \in \mathbf{R}^k$ מתקיים $f(x) = \nabla f(0)\cdot x$ ולכן f היא פונקציה לינארית.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f:\mathbf{R}^k\setminus\left\{0^{[k]}\right\}\to\mathbf{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות והומוגנית־חיובית ממעלה 0. הוכיחו:

א. לכל $a\in\mathbf{R}^k\setminus\left\{0^{[k]}\right\}$ מטריצת הֶסיאן Hf_a אינה חיובית לחלוטין ואינה שלילית לחלוטין.

ב. יש ל־ f מקסימום ומינימום ב־ $\mathbf{R}^k\setminus\left\{0^{[k]}\right\}$.

פתרון סעיף א

העובדה שהפונקציה הומוגנית־חיובית ממעלה 0 פירושה שלכל $u\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ ולכל $t>0$ מתקיים $f(tu)=t^0f(u)$ כלומר $f(tu)=f(u)$. אז הצמצום של f לכל קרן שקודקודהּ בראשית הוא פונקציה קבועה. מהעובדה שהיא גזירה פעמיים ומטענה 13.ב.5 נובע שלכל נקודה $a\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ ולכל זוג וקטורים $u,v\in\mathbf{R}^k$ מתקיים:

$$\partial_v\partial_u f(a)=uHf_av^{\mathrm{T}}$$

בפרט לכל $a\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ מתקיים:

$$\partial_a\partial_a f(a)=aHf_aa^{\mathrm{T}}$$

נחשב את $\partial_a\partial_a f(a)$ ישירות בעזרת הגדרות 1.א.5 ו־1.ב.3.

מתקיים:

$$\partial_a\partial_a f(a)=\left(\partial_a f\mid_{a,a}\right)'(0)$$

הפונקציה $\partial_a f\mid_{a,a}$ היא:

$$t\mapsto\partial_a f\mid_{a,a}(t)=\partial_a f(a+at)$$

שוב מהגדרה 1.ב.3 נקבל:

$$\partial_a f(a+at)=\left(f\mid_{a+ta,a}\right)'(0)$$

לכל $t>-1$ מתקיים $t+1>0$ ולכן $a+ta=(1+t)a\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$.

הפונקציה $f\mid_{a+ta,a}$ היא:

$$s\mapsto f\mid_{a+ta,a}(s)=f(a+ta+sa)$$

עבור $t>-1$ ו־ $s>-1-t$ מתקיים $1+t+s>0$ ולכן:

$$a+ta+sa=(1+t+s)a\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$$

מהנתון ש־ f הומוגנית־חיובית ממעלה 0 נובע

$$f(a+ta+sa)=f\left((1+t+s)a\right)=(1+t+s)^0f(a)=f(a)$$

ולכן הפונקציה $f\mid_{a+ta,a}$ קבועה בקטע $(-1-t,\infty)$ שמכיל את 0 כי $t>-1$ ולכן:

$$\partial_a f(a+at)=\left(f\mid_{a+ta,a}\right)'(0)=0$$

אז הפונקציה $\partial_a f\mid_{a,a}$ קבועה בקטע $(-1,\infty)$, ולכן

$$\partial_a\partial_a f(a)=\left(\partial_a f\mid_{a,a}\right)'(0)=0$$

אבל ראינו קודם ש־ $\partial_a\partial_a f(a)=aHf_aa^{\mathrm{T}}$ ולכן:

$$aHf_aa^{\mathrm{T}}=0$$

לפי הגדרה 11.ד.6, המטריצה H_a אינה חיובית לחלוטין כי לא מתקיים $aHf_aa^{\mathrm{T}}>0$ והיא אינה שלילית לחלוטין כי לא מתקיים $aHf_aa^{\mathrm{T}}<0$.

דרך נוספת בקצרה: מזהות אוילר (ראו דוגמה 11.ב.3) מקבלים $x\cdot\nabla f(x)=0$ לכל $x\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$.
הנתון על גזירות פעמיים מאפשר לגזור את אגף שמאל בעזרת הנוסחה מסעיף ג של שאלה 15.ז.3
ולקבל: $0=\nabla\left(x\mapsto x\cdot\nabla f(x)\right)=x\cdot J(\nabla f)_x+\nabla f(x)J(x\mapsto x)_x=xHf_x+\nabla f(x)$

אז לכל $a\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ מתקיים $aHf_a=-\nabla f(a)$ ולכן: $aHf_aa^{\mathrm{T}}=-\nabla f(a)a^{\mathrm{T}}=-a\cdot\nabla f(a)=0$
ומסיימים כמו בשתי השורות האחרונות של ההוכחה הראשונה.

פתרון סעיף ב

הקבוצה $S^{k-1}(0;1)=\left\{x\in\mathbf{R}^k \;\middle|\; |x|=1\right\}$ היא קבוצה סגורה וחסומה. הפונקציה f גזירה פעמיים בכל נקודה ב־$\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ ולכן לפי אבחנה 4.ב.5 היא גזירה בכל הנקודות האלה, ולפי מסקנה 10.א.3 היא רציפה בהן, ובפרט היא רציפה בקבוצה הסגורה וחסומה $S^{k-1}(0;1)$, ולפי משפט 4.א.6 (משפט ויירשטראס) יש ל־ f ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה זאת. פירוש הדבר: יש $u,v\in\mathbf{R}^k$ כך ש־$|u|=|v|=1$, ואם $w\in\mathbf{R}^k$ ו־$|w|=1$ אז $f(u)\le f(w)\le f(v)$.

כעת לכל $x\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ מתקיים $|x|>0$ וכיוון ש־ f הומוגנית חיובית ממעלה 0 מתקיים:

$$f\left(\tfrac{1}{|x|}x\right)=\left(\tfrac{1}{|x|}\right)^0 f(x)=f(x)$$

כמוכן $\left|\tfrac{1}{|x|}x\right|=\tfrac{1}{|x|}|x|=1$ ולכן: $$f(u)\le f\left(\tfrac{1}{|x|}x\right)\le f(v)$$

אז לכל $x\in\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ מתקיים: $$f(u)\le f(x)\le f(v)$$

לכן יש ל־ f ערך מזערי וערך מרבי ב־$\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$, ובפרט u היא נקודת מינימום של f ב־$\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$ ו־v היא נקודת מקסימום של f ב־$\mathbf{R}^k\setminus\{0\}$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי f פונקציה שרציפה ב־$\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$ וגזירה ב־$B^k\left(0^{[k]};1\right)$ וכן $\left|f(x)\right|\le 1$ לכל $x\in B^k\left(0^{[k]};1\right)$.

הוכיחו שיש נקודה $a\in B^k\left(0^{[k]};1\right)$ כך ש־$\left|\nabla f(a)\right|<4$.

רמז: תוכלו להיעזר בפונקציה $g(x)=f(x)+2|x|^2$,

פתרון

הפונקציה
$$g:x\mapsto f(x)+2|x|^2$$

רציפה ב־$\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$ כסכום של פונקציות רציפות. לכן לפי משפט ויירשטראס (4.א.6) יש לה נקודת מינימום u בקבוצה הסגורה וחסומה $\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$.

לפי דוגמה 5.א.3 הפונקציה $x\mapsto|x|^2$ גזירה ב־$\mathbf{R}^k$ והגרדיאנט שלה בנקודה x הוא $2x$.

משאלות 15.א.3 ו־16.א.3 נקבל ש־g גזירה ב־$B^k\left(0^{[k]};1\right)$ ולכל $x\in B^k\left(0^{[k]};1\right)$ מתקיים:
$$\nabla g(x)=\nabla f(x)+4x$$

אם יש ל־g נקודת מינימום מקומי $a\in B^k\left(0^{[k]};1\right)$ אז לפי משפט 10.ב.6 הנקודה a היא נקודה קריטית של g, דהיינו $\nabla g(a)=0$. אז $\nabla f(a)+4a=0$ ולכן: $\left|\nabla f(a)\right|=|-4a|=4|a|<4\cdot 1=4$

נניח בשלילה שהטענה בשאלה אינה נכונה ונראה שזה מוביל לסתירה. הנחת השלילה היא שאין נקודה $a\in B^k\left(0^{[k]};1\right)$ כך ש־$\left|\nabla f(a)\right|<4$, ולפי מה שראינו זה מחייב שאין ל־g נקודת מינימום מקומי ב־$B^k\left(0^{[k]};1\right)$. יש לה נקודת מינימום u ב־$\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$. אם $u\in B^k\left(0^{[k]};1\right)$ אז היא נקודה פנימית של $\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$ ולפי אבחנה 3.ב.6 היא נקודת מינימום מקומי של g. אבל אין ל־g נקודת מינימום מקומי ב־$B^k\left(0^{[k]};1\right)$ ולכן בהכרח
$$u\in\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)\setminus B^k\left(0^{[k]};1\right)=S^{k-1}\left(0^{[k]};1\right)$$

כלומר $|u|=1$. אז:
$$g(u)=f(u)+2|u|^2=f(u)+2$$

לכל $t\in(0,1)$ מתקיים $|tu|=t|u|=t<1$ ולכן $tu\in B^k\left(0^{[k]};1\right)$ ולכן $\left|f(tu)\right|\le 1$. מהרציפות של f ב־$\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$ נובע ש־$\left|f(tu)\right|\xrightarrow[t\to 1^-]{}\left|f(u)\right|$ ולכן:
$$\left|f(u)\right|\le 1$$

אז:
$$g(u)=f(u)+2\ge 2-\left|f(u)\right|\ge 2-1=1$$

כמוכן:
$$g\left(0^{[k]}\right)=f\left(0^{[k]}\right)+2\left|0^{[k]}\right|=f\left(0^{[k]}\right)\le\left|f\left(0^{[k]}\right)\right|\le 1$$

לכל $x\in\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$ מתקיים:
$$g(x)\ge g(u)\ge 1\ge g\left(0^{[k]}\right)$$

לכן $0^{[k]}$ היא נקודת מינימום של g ב־ $\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$, ומאחר שהיא נקודה פנימית של $\overline{B}^k\left(0^{[k]};1\right)$ היא נקודת מינימום מקומי, בסתירה למה שכבר ראינו. קיבלנו סתירה ולכן הנחת השלילה אינה נכונה, כלומר הטענה בשאלה נכונה.

שאלה 5 (20 נקודות)

יהיו $-1<\alpha<\beta$. חשבו את ערכו של האינטגרל המוכלל: $\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}dx$

הצדיקו את כל שלבי החישוב.

פתרון

ראשית נשים לב שהאינטגרנד אינו מוגדר בקצות הקטע $[0,1]$ כי המכנה $\ln x$ הוא 0 בקצה אחד ואינו מוגדר בקצה השני. לכן מדובר באינטגרל מוכלל בקטע $(0,1)$.

אז נרצה קודם לקבל את $\int_r^s \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}dx$ עם $0<r<s<1$ ואז להשאיף $r\to 0^+$ ו־ $s\to 1^-$.

נשים לב ש־ $\frac{d}{dt}x^t = x^t\ln x$ לכל $x>0$. אז: $x^\beta - x^\alpha = \int_\alpha^\beta x^t\ln x\,dt = \ln x\int_\alpha^\beta x^t\,dt$

הפונקציה $x\mapsto \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}$ היא פונקציה יסודית שמוגדרת בקטע $(0,1)$ ולכן רציפה בו.

לכן אם $0<r<s<1$ היא רציפה בקטע $[r,s]$ ולכן אינטגרבילית בו.

אז קיים האינטגרל: $\int_r^s \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}dx = \int_r^s\left(\int_\alpha^\beta x^t\,dt\right)dx$

הפונקציה $(x,t)\mapsto x^t$ היא פונקציה יסודית שמוגדרת ולכן רציפה במלבן $[r,s]\times[\alpha,\beta]$, ולכן לפי מסקנה 10.ב.4 מתקיים: $\int_r^s\left(\int_\alpha^\beta x^t\,dt\right)dx = \int_\alpha^\beta\left(\int_r^s x^t\,dx\right)dt$

כעת עבור $t>-1$ מתקיים $t+1>0$ ו־ $\frac{d}{dx}x^{t+1} = (t+1)x^t$ ולכן: $\int_r^s x^t\,dx = \left[\frac{x^{t+1}}{t+1}\right]_{x=r}^{s} = \frac{s^{t+1}-r^{t+1}}{t+1}$

עד כה קיבלנו: $\int_r^s \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}dx = \int_\alpha^\beta \frac{s^{t+1}-r^{t+1}}{t+1}dt$

עכשיו קיבלנו אינטגרל שאין לנו מושג קלוש איך לחשב אותו, ומה שאנחנו צריכים לזכור זה שלא ביקשו מאיתנו לחשב אותו. מה שאנחנו רוצים לזה להשאיף $r\to 0^+$ ו־ $s\to 1^-$ כדי לקבל את האינטגרל המבוקש $\int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x}dx$.

נתבונן בפונקציה: $(x,t)\mapsto \frac{x^{t+1}}{t+1}$

זאת פונקציה יסודית שמוגדרת בקבוצה $(0,\infty)\times(-1,\infty)$ ולכן רציפה בה.

בפרט היא רציפה במלבן $(0,1]\times[\alpha,\beta]$. אבל אני זקוק לרציפות ב־$[0,1]\times[\alpha,\beta]$ כדי לנצל את מסקנה 4.א.4. מה לעשות?

ובכן: אם $\left(x,t\right)\in\left(0,1\right]\times\left[\alpha,\beta\right]$ אז $x^{\alpha+1}\le x^{t+1}\le x^{\beta+1}$

לכל $c>0$ מתקיים $x^c \xrightarrow[x\to 0^+]{} 0^c=0$

לכן לכל $\gamma\in\left[\alpha,\beta\right]$ מתקיים $x^{\alpha+1} \xrightarrow[\substack{(x,t)\to(0,\gamma)\\ (x,t)\in(0,1]\times[\alpha.\beta]}]{} 0$

וגם $x^{\beta+1} \xrightarrow[\substack{(x,t)\to(0,\gamma)\\ (x,t)\in(0,1]\times[\alpha.\beta]}]{} 0$

ומכלל הכריך: $x^{t+1} \xrightarrow[\substack{(x,t)\to(0,\gamma)\\ (x,t)\in(0,1]\times[\alpha.\beta]}]{} 0$

לכן גם: $\frac{x^{t+1}}{t+1} \xrightarrow[\substack{(x,t)\to(0,\gamma)\\ (x,t)\in(0,1]\times[\alpha.\beta]}]{} \frac{0}{\gamma+1}=0$

לכן הפונקציה $f:\left(x,t\right)\mapsto\begin{cases}\frac{x^{t+1}}{t+1} & x>0,\,t>-1\\ 0 & x=0\end{cases}$

רציפה במלבן הסגור $\left[0,1\right]\times\left[\alpha,\beta\right]$.

ממסקנה 4.א.4 (בהחלפת תפקידים בין x לבין t) הפונקציה $x\mapsto\int_{\alpha}^{\beta}f\left(x,t\right)dt$

רציפה בקטע $\left[0,1\right]$.

בפרט
$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{s^{t+1}}{t+1}dt=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(s,t\right)dt\xrightarrow[s\to 1^-]{}\int_{\alpha}^{\beta}f\left(1,t\right)dt=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1^{t+1}}{t+1}dt$$
$$=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{1}{t+1}dt=\left[\ln\left(t+1\right)\right]_{\alpha}^{\beta}=\ln\left(\beta+1\right)-\ln\left(\alpha+1\right)=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

וכן:
$$\int_{\alpha}^{\beta}\frac{r^{t+1}}{t+1}dt=\int_{\alpha}^{\beta}f\left(r,t\right)dt\xrightarrow[r\to 0^+]{}\int_{\alpha}^{\beta}f\left(0,t\right)dt=\int_{\alpha}^{\beta}0\,dt=0$$

לבסוף
$$\int_{r}^{s}\frac{x^{\beta}-x^{\alpha}}{\ln x}dx=\int_{\alpha}^{\beta}\frac{s^{t+1}}{t+1}dt-\int_{\alpha}^{\beta}\frac{r^{t+1}}{t+1}dt\xrightarrow[\substack{r\to 0^+\\ s\to 1^-}]{}\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}-0=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

ולכן האינטגרל המוכלל $\int_{0}^{1}\frac{x^{\beta}-x^{\alpha}}{\ln x}dx$ מתכנס וערכו הוא: $\int_{0}^{1}\frac{x^{\beta}-x^{\alpha}}{\ln x}dx=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$

דרך נוספת:

בדוגמה 8.ד.4 מראים שאם $0<\alpha<\beta$ אז: $\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\ln\beta-\ln\alpha$

פירוש הדבר שזה אינטגרל מוכלל שמתכנס, וערכו $\ln\beta-\ln\alpha$.

באינטגרל זה נבצע החלפת משתנים $z=e^{-x}$, דהיינו נציב $x=-\ln z$. אז נצטרך גם להחליף $dx=-\frac{1}{z}dz$ וגבולות האינטגרציה לפי x שהם 0 ו־∞ יתחלפו בגבולות אינטגרציה לפי z שהם 1 ו־0, בהתאמה (גבולות האינטגרציה בסדר הפוך כי ההצבה היא של פונקציה יורדת). נקבל:

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-\alpha x}-e^{-\beta x}}{x}dx=\int\limits_1^0 \frac{z^\alpha-z^\beta}{-\ln z}.\left(-\frac{1}{z}\right)dz=\int\limits_1^0 \frac{z^{\alpha-1}-z^{\beta-1}}{\ln z}dz=\int\limits_0^1 \frac{z^{\beta-1}-z^{\alpha-1}}{\ln z}dz$$

אז: $\int\limits_0^1 \frac{z^{\beta-1}-z^{\alpha-1}}{\ln z}dz=\ln\beta-\ln\alpha$

בהחלפת סימוני הפרמטרים נקבל שאם $0<a<b$ אז: $\int\limits_0^1 \frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{\ln x}dx=\ln b-\ln a$

עכשיו עבור $-1<\alpha<\beta$ נסמן $a=\alpha+1$ ו־$b=\beta+1$ ואז:

$$\int\limits_0^1 \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}dx=\int\limits_0^1 \frac{x^{b-1}-x^{a-1}}{\ln x}dx=\ln b-\ln a=\ln\frac{b}{a}=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

בעקרון יש גם להצדיק את החלפת המשתנה באינטגרל המוכלל.

נכתוב מחדש את ההוכחה בלי לחפף:

החלפת המשתנים $x=e^{-z}$ באינטגרלים אמיתי של פונקציה רציפה בקטע סגור $[c,d]$ שמוכל בקטע $(0,1)$ היא כשרה למהדרין ונותנת:

$$\int\limits_c^d \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}dx=\int\limits_{-\ln c}^{-\ln d} \frac{e^{-\beta z}-e^{-az}}{-z}\left(-e^{-z}\right)dz=\int\limits_{-\ln c}^{-\ln d} \frac{e^{-(\beta+1)z}-e^{-(a+1)z}}{z}dz=\int\limits_{-\ln d}^{-\ln c} \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}dz$$

מההנחה $-1<\alpha<\beta$ מקבלים $0<\alpha+1<\beta+1$ ולפי דוגמה 8.ד.4 מתקיים

$$\int\limits_0^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}dz=\ln(\beta+1)-\ln(\alpha+1)=\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$$

כלומר האינטגרל באגף שמאל מתכנס וערכו הוא המספר באגף ימין.

לפי ההגדרות באינפי 2, העובדה שהאינטגרל הזה מתכנס פירושה שהאינטגרלים $\int\limits_0^1 \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}dz$ ו־$\int\limits_1^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}dz$ מתכנסים, וסכום ערכיהם הוא: $\ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}$

. העובדה ששני אלה מתכנסים פירושה שמתקיים

$$\int_s^1 \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz \xrightarrow[s\to0^+]{} \int_0^1 \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz$$

וכן:

$$\int_1^s \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz \xrightarrow[s\to\infty]{} \int_1^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz$$

אז

$$\int_s^{e^{-1}} \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx = \int_1^{-\ln s} \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz \xrightarrow[s\to0^+]{} \int_1^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz$$

(כי $-\ln s \xrightarrow[s\to0^+]{} \infty$) כלומר מתקיים

$$\int_0^{e^{-1}} \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx = \int_1^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz$$

במובן שאגף שמאל הוא אינטגרל מוכלל שמתכנס וערכו המספר שבאגף ימין.

כמוכן

$$\int_{e^{-1}}^{s} \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx = \int_{-\ln s}^{1} \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz \xrightarrow[s\to1^-]{} \int_0^1 \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz$$

(כי $0<-\ln s \xrightarrow[s\to1^-]{} 0$) כלומר מתקיים

$$\int_{e^{-1}}^{1} \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx = \int_0^1 \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz$$

באותו מובן. לכן האינטגרל המוכלל $\int_0^1 \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx$ מתכנס וערכו הוא:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx &= \int_0^{e^{-1}} \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx + \int_{e^{-1}}^{1} \frac{x^\beta-x^\alpha}{\ln x}\,dx \\
&= \int_1^\infty \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz + \int_0^1 \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz \\
&= \int_0^1 \frac{e^{-(a+1)z}-e^{-(\beta+1)z}}{z}\,dz = \ln\frac{\beta+1}{\alpha+1}
\end{aligned}$$

נשים לב שמקרה פרטי של נוסחת האינטגרל המבוקש עם $\alpha = 0$ הוא: $\int_0^1 \frac{x^\beta - 1}{\ln x} dx$

לכל $t > -1$ נסמן: $F(t) = \int_0^1 \frac{x^t - 1}{\ln x} dx$

די לחשב את ערכו של $F(t)$ כי: $F(\beta) - F(\alpha) = \int_0^1 \frac{x^\beta - 1}{\ln x} dx - \int_0^1 \frac{x^\alpha - 1}{\ln x} dx = \int_0^1 \frac{x^\beta - x^\alpha}{\ln x} dx$

עבור $t > -1$ קבוע מתקיים $\lim_{x \to 1^-} \frac{x^t - 1}{\ln x} \underset{\boxed{\frac{0}{0}}}{=} \lim_{x \to 1^-} \frac{t x^{t-1}}{x^{-1}} = \lim_{x \to 1^-} t x^t = t$

עבור $(x,t) \in (0,1] \times (-1,\infty)$ נגדיר: $f(x,t) = \begin{cases} \frac{x^t - 1}{\ln x} & x < 1 \\ t & x = 1 \end{cases}$

לכל $t > -1$ הפונקציה $x \mapsto f(x,t)$ רציפה בקטע $(0,1]$

הנגזרת החלקית שלה לפי t היא $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = \begin{cases} x^t & x < 1 \\ 1 & x = 1 \end{cases}$

כלומר לכל $(x,t) \in (0,1] \times (-1.\infty)$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial t}(x,t) = x^t$ וזאת פונקציה רציפה ב־$(0,1] \times (-1.\infty)$.

אז לכל $r \in (0,1)$ ולכל $[c,d] \subseteq (-1,\infty)$ הפונקציה f מוגדרת במלבן $[r,1] \times [c,d]$ ונגזרתה $\frac{\partial f}{\partial t}$ רציפה במלבן זה.

לכל $t \in [c,d]$ הפונקציה $x \mapsto f(x,t)$ רציפה ולכן אינטגרבילית בקטע $[r,1]$, ולכן בקטע $[c,d]$

מוגדרת הפונקציה: $F_r : t \mapsto \int_r^1 f(x,t) dx$

לפי משפט 4.ב.4 F_r גזירה בקטע $[c,d]$ ומתקיים: $F_r'(t) = \int_r^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx$

מאחר שלכל $t > -1$ יש c ו־ d ממשיים כך ש־ $-1 < c < t < d$ קיבלנו שלכל ◌א<-1קיבלנו שלכל

$t > -1$ הפונקציה F_r גזירה ב־t ומתקיים: $F_r'(t) = \int_r^1 \frac{\partial f}{\partial t}(x,t) dx = \int_r^1 x^t \, dx$

מאינפי 2 ידוע שעבור $t > -1$ האינטגרל $\int_0^1 x^t \, dx$ מתכנס, כלומר: $F_r'(t) = \int_r^1 x^t \, dx \xrightarrow[r \to 0^+]{} \int_0^1 x^t \, dx$

זאת פונקציה רציפה בקבוצה הפתוחה $A = (0,1) \times (-1,\infty)$, וגם בקבוצה $B = \{1\} \times (-1,\infty)$.

לפי חלק ב של אבחנה 6.ד.2 היא רציפה בכל נקודה בקבוצה A.

אם $(1,b)\in B$ נראה שמתקיים: $$f(x,t)\xrightarrow[(x,t)\in A]{(x,t)\to(1,b)} f(1,b)$$

מאחר ש־ f רציפה ב־ B מתקיים גם $$f(x,t)\xrightarrow[(x,t)\in B]{(x,t)\to(1,b)} f(1,b)$$

ולכן $$f(x,t)\xrightarrow[(x,t)\in A\cup B]{(x,t)\to(1,b)} f(1,b)$$

ונסיק ש־ f רציפה ב־ $A\cup B=(0,1]\times(-1,\infty)$.

ובכן: יהי $(1,b)\in B$.

עלינו להוכיח שמתקיים עלינו להוכיח שמתקיים: $$f(x,t)\xrightarrow[(x,t)\in A]{(x,t)\to(1,b)} f(1,b)$$

ידוע לנו שלכל $t>-1$ קבוע מתקיים: $$f(x,t)=\frac{x^t-1}{\ln x}\xrightarrow[x\to1^-]{} t=f(1,t)$$

יהי $\varepsilon>0$. מתקיים $b>-1$ ולכן יש a ממשי כך ש־ $-1<a<b$. נסמן: $\varepsilon'=\min\left\{\frac{1}{2}\varepsilon,b-a\right\}$

מתקיים $b-\varepsilon'\geq b-(b-a)=a>-1$ ולכן: $$f(x,b-\varepsilon')\xrightarrow[x\to1^-]{} f(1,b-\varepsilon')=b-\varepsilon'$$

כמובן גם $b+\varepsilon'>-1$ ולכן: $$f(x,b+\varepsilon')\xrightarrow[x\to1^-]{} f(1,b+\varepsilon')=b+\varepsilon'$$

מתקיים $b+\varepsilon'<b+\varepsilon$ ולכן יש $\delta_1>0$ כך שאם $1-\delta_1<x<1$ אז: $f(x,b+\varepsilon')<b+\varepsilon$

מתקיים $b-\varepsilon'>b-\varepsilon$ ולכן יש $\delta_2>0$ כך שאם $1-\delta_2<x<1$ אז: $f(x,b-\varepsilon')>b-2\varepsilon'\geq b-\varepsilon$

נסמן $\delta=\min\{1,\varepsilon',\delta_1,\delta_2\}$. אם $(x,t)\in A\cap B((1,b);\delta)$ אז $x\in(0,1)$ וגם $b-\varepsilon'<t<b+\varepsilon'$

ולכן $x^{b-\varepsilon'}>x^t>x^{b+\varepsilon'}$ ומכאן $$\frac{x^{b-\varepsilon'}-1}{\ln x}<\frac{x^t-1}{\ln x}<\frac{x^{b+\varepsilon'}-1}{\ln x}$$

כלומר: $$f(x,b-\varepsilon')<f(x,t)<f(x,b+\varepsilon')$$

כמוכן $x\in(1-\delta_i,1)$ עבור $i=1,2$. ולכן: $$b-\varepsilon<f(x,t)<b+\varepsilon$$

קיבלנו שאם $(x,t)\in A\cap B((1,b);\delta)$ אז $|f(x,t)-b|<\varepsilon$ ולכן: $$f(x,t)\xrightarrow[(x,t)\in A]{(x,t)\to(1,b)} b=f(1,b)$$

עכשיו ידוע לנו ש־ f היא פונקציה רציפה בקבוצה $A\cup B=(0,1]\times(-1,\infty)$.