

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

סמסטר : 1א2026

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 1–2

מועד אחרון להגשה : 23.11.2025

מספר השאלות : 4

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצירוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. תהי B איחוד כל הקטעים הסגורים ששני קצותיהם ב- A דהיינו:
$$B = \{ta + (1-t)b \mid a, b \in A, 0 \leq t \leq 1\}$$

הוכיחו או הפריכו :

א. הקבוצה B היא קבוצה קמורה.

ב. אם A היא קבוצה פתוחה אז B היא קבוצה פתוחה.

ג. אם A היא קבוצה סגורה אז B היא קבוצה סגורה.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה אינסופית חסומה.

א. הוכיחו כי אם $k \geq 2$ אז ∂A היא קבוצה אינסופית.

ב. עבור $k=1$ הראו, עלידי דוגמאות מתאימות, שיתכן ש- ∂A היא קבוצה סופית ויתכן גם ש- ∂A היא קבוצה אינסופית.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ בעלת התכונה שהגרף $G(f)$ הוא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^{k+1}$.

א. הביאו דוגמה של פונקציה בעלת תכונה זאת שאינה רציפה בקבוצה $\mathbb{R}^k$.

ב. הוכיחו שאם f היא פונקציה חסומה אז f היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}^k$.

המלצה: חשבו על הצמצום של f לקבוצה קומפקטית.

שאלה 4 (25 נקודות)

א. הוכיחו שהמשוואה $xe^z + ye^{-z} + z = 1$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$ את z

כפונקציה של (x, y) , כאשר: $A = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \mid x + y \leq 1\}$

ב. תהי $f: A \rightarrow [0, \infty)$ הפונקציה שלפי סעיף א מוגדרת באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$.

הוכיחו כי:
$$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow 0^{[2]}} 1$$

ג. הראו שהגרף של $f|_{A \setminus \partial A}$ הוא טלאי דו-ממדי (ובפרט, הוא משטח).

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: סעיפים ב רג 1\93\2025 שהיא וריאציה על 1\92\2021, שהיתה גם ב-1\11\2024.

א לא נכון: למשל אם A קבוצה של 3 נקודות שאינן על ישר אחד, הקבוצה B היא קבוצת הנקודות על צלעות המשולש.

(אני תוהה אם במקרה ש- A קבוצה קשורה מסילתית במישור נובע ש- B קמורה. במרחב קשירות אינה מספיקה כפי שמדגים איחוד של שלושה ישרים דרך נקודה משותפת שאינם במישור אחד).

ב נכון: אם $B(a; \delta) \subseteq A$ וגם $B(b; \delta) \subseteq A$ אז $B(ta + (1-t)b; \delta) \subseteq B$, כי לכל

$$u \in B(0; \delta) \text{ מתקיים } (ta + (1-t)b) + u = t(a+u) + (1-t)(b+u)$$

ג. לא נכון, ודוגמה נגדית למשל: $A = \{(x, x^{-2}) \mid x \neq 0\}$

אז $B \subseteq (0, \infty) \times \mathbb{R}$ (כי $(0, \infty) \times \mathbb{R}$ היא קבוצה קמורה שמכילה את A) ולכל $y > 0$

$$\text{מתקיים } (0, 0) \in \partial B \setminus B \text{ ומכאן } (0, y) = \frac{1}{2}(\sqrt{y}, y) + \frac{1}{2}(-\sqrt{y}, y) \in B$$

לשאלה 2: 1\11\2020.

הטיעון העיקרי הדרוש הוא שקבוצה קשורה מסילתית שיש בה נקודות מ- A ונקודות שאינן ב- A מכילה נקודת שפה של A . למשל כי הפונקציה המציינת χ_A אינה רציפה בקבוצה כזאת (תמונתה $\{0, 1\}$ אינה קשורה מסילתית). אז למשל אפשר להדגים אינסוף קבוצות קשורות מסילתית כאלה שזרות זו לזו.

לשאלה 3: 1\81\2025 שהייתה גם 1\52\2021.

א. למשל $f: t \mapsto \frac{1}{t}$ וכן $f(0) = 0$.

ב. ברור שדי להוכיח ש- $f|_K$ רציפה לכל K קומפקטית, כי לכל נקודה יש סביבה

קומפקטית. מחסימות $G(f) \subseteq \mathbb{R}^k \times [-M, M]$ הקבוצה

$$G(f|_K) = G(f) \cap K \times [-M, M]$$

$$\pi: G(f|_K) \rightarrow K \text{ שמוגדרת על ידי } \pi: (x, y) \mapsto x \text{ רציפה והפיכה, ולפי טענה 29.ד.2}$$

ההופכית שלה $\pi^{-1}: x \mapsto (x, f(x))$ רציפה, ומכאן גם $f|_K = [\pi^{-1}]_{k+1}$ רציפה.

אפשר גם להוכיח את זה בדרכים אחרות (למשל "הגדרת הגבול בעזרת סדרות ומשפט בולצאנו-וויירשטראס).

לשאלה 4: 2\11\2020.

א. אפשר לכל x, y קבועים להראות קיום z יחיד בעזרת רציפות ומונוטוניות של אגף שמאל כפונקציה של z .

ב. אם $(x, y) \in A$ ו- $z = f(x, y)$ אז $xe^{-z} + ye^z + z = 1$ ומתקיים

$$1 - x - ey \leq 1 - xe^{-z} - ye^z = z \leq 1$$

$$1 - x - ey \leq f(x, y) \leq 1 \quad (x, y) \in A \text{ ולכן לכל } (x, y) \in A$$

מכלל הכריך מקבלים את הנדרש.

ג. הדרך הקשה היא להראות ש־ f רציפה בכל נקודה פנימית של A . דרך עדיפה היא

לבטא את נקודות הקבוצה כפונקציות של (x, z) או (y, z) בקבוצה מתאימה במישור

ולקבל טלאי שהקבוצה היא תמונתו.