

מתווה לפתרון ממ"ן 11

סמסטר : 1א2026

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 1–2

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. תהי B איחוד כל הקטעים הסגורים ששני קצותיהם ב- A דהיינו:

$$B = \{ta + (1-t)b \mid a, b \in A, 0 \leq t \leq 1\}$$

הוכיחו או הפריכו :

א. הקבוצה B היא קבוצה קמורה.

ב. אם A היא קבוצה פתוחה אז B היא קבוצה פתוחה.

ג. אם A היא קבוצה סגורה אז B היא קבוצה סגורה.

פתרון סעיף א

הטענה אינה נכונה. לדוגמה אם A היא קבוצה בת שלוש נקודות במישור שאינן על ישר אחד, אז B היא קבוצת כל הנקודות שעל צלעות המשולש שקודקודיו הם איברי A , וזאת בבירור אינה קבוצה קמורה. דוגמה נגדית מפורשת: תהי $A = \{(0,0), (1,0), (0,1)\}$. אז :

$$\begin{aligned} B &= \{ta + (1-t)b \mid a, b \in A, 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{t(1,0) + (1-t)(0,0) \mid 0 \leq t \leq 1\} \cup \{t(0,1) + (1-t)(0,0) \mid 0 \leq t \leq 1\} \\ &\quad \cup \{t(1,0) + (1-t)(0,1) \mid 0 \leq t \leq 1\} \\ &= \{(t,0) \mid 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(0,t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \cup \{(t,1-t) \mid 0 \leq t \leq 1\} \end{aligned}$$

אז $(0,0) \in B$ וגם $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in B$ ולו הייתה B קבוצה קמורה היה בהכרח :

$$\frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \in B \quad \text{אבל:} \quad \frac{1}{2}(0,0) + \frac{1}{2}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{4}, \frac{1}{4}) \notin B$$

פתרון סעיף ב

הטענה נכונה. יהי $c \in B$. נוכיח שיש סביבה של c שמוכלת בקבוצה B .

יש $a, b \in A$ ו- $t \in [0,1]$ כך ש- $c = ta + (1-t)b$.

יש כדור שמרכזו ב- a ומוכל ב- A , ולכן יש $\delta_1 > 0$ כך ש- $B(a; \delta_1) \subseteq A$.

יש כדור שמרכזו ב- b ומוכל ב- A , ולכן יש $\delta_2 > 0$ כך ש- $B(b; \delta_2) \subseteq A$.

נסמן $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. אז $\delta > 0$ ומתקיים $B(a; \delta) \subseteq A$ וכן $B(b; \delta) \subseteq A$.

נוכח ש- $B(c; \delta) \subseteq B$, ולכן יש סביבה כדורית של c שמוכלת ב- B .

יהי $x \in B(c; \delta)$. לנוחיותנו נסמן $u = x - c$ או $x = c + u$ וכן $|u| = |x - c| < \delta$.

נסמן גם $a' = a + u$ ו- $b' = b + u$.

אז $|a' - a| = |u| < \delta$ ולכן $a' \in B(a; \delta)$ ולכן גם $a' \in A$.

גם $|b' - b| = |u| < \delta$ ולכן $b' \in B(b; \delta)$ ולכן גם $b' \in A$.

לכן $ta' + (1-t)b' \in B$.

לבסוף: $ta' + (1-t)b' = t(a+u) + (1-t)(b+u) = ta + (1-t)b + tu + (1-t)u = c + u = x$

ולכן $x \in B$, ובכך הוכח ש- $B(c; \delta) \subseteq B$, והסתיימה ההוכחה ש- B היא קבוצה פתוחה.

פתרון סעיף ג

הטענה אינה נכונה. ודוגמה נגדית היא למשל: $A = \{(x, y) \mid x^2 y = 1\}$

לפי חלק ג של מסקנה 23.ד.2 A היא קבוצה סגורה.

אם $(x, y) \in A$ אז $y = x^{-2} > 0$ ולכן $(x, y) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$. לכן: $A \subseteq (0, \infty) \times \mathbf{R}$

אם $c \in B$ אז יש $a, b \in A$ ו- $t \in [0, 1]$ כך ש- $c = ta + (1-t)b$. אז: $a, b \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$

הקבוצה $(0, \infty) \times \mathbf{R}$ היא קבוצה קמורה לפי הערה 15.ג.1 ושאלה 16.ג.1, ולכן: $c \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$

בפרט: $(0, 0) \notin B$

לכל $r > 0$ מתקיים $(\sqrt{r}, r) \in A$ וגם $(-\sqrt{r}, r) \in A$ ולכן: $(0, r) = \frac{1}{2}(\sqrt{r}, r) + \frac{1}{2}(-\sqrt{r}, r) \in B$

אם U היא סביבה של $(0, 0)$ אז יש כדור סגור שמרכזו $(0, 0)$ שמוכל בה: $\bar{B}((0, 0); r) \subseteq U$

ופרט יש ב- U נקודה $(0, r)$ מהקבוצה B וגם $(0, 0)$ שאינה ב- B . לכן: $(0, 0) \in \partial B$

אז יש נקודת שפה של B שאינה איבר של B , ולכן B אינה קבוצה סגורה.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$ קבוצה אינסופית חסומה.

א. הוכיחו כי אם $k \geq 2$ אז ∂A היא קבוצה אינסופית.

ב. עבור $k=1$ הראו, עלידי דוגמאות מתאימות, שיתכן ש- ∂A היא קבוצה סופית ויתכן גם ש- ∂A היא קבוצה אינסופית.

פתרון סעיף א

ראשית נוכיח טענת עזר, ובעזרתה נוכל להסיק את הנדרש במגוון דרכים.

טענת עזר: תהי L קבוצה לא חסומה וקשורה מסילתית. אם $L \cap A \neq \emptyset$ אז $L \cap \partial A \neq \emptyset$.

הוכחת טענת העזר:

נניח בשלילה ש- $L \cap \partial A = \emptyset$ ונראה ש- $L \cap A = \emptyset$. לפי שאלה 4.ד.2 הפונקציה המציינת χ_A

רציפה בכל נקודה של L , ולפי חלק א של אבחנה 2 ד.6 היא רציפה ב- L .

לכן לפי טענה 2.ט.2 הקבוצה $\chi_A(L)$ קשורה מסילתית, ולפי טענה 10.ט.2 היא קמורה.

אבל $\chi_A(L) \subseteq \{0,1\}$, ולכן $\chi_A(L) = \{0\}$ או $\chi_A(L) = \{1\}$ (ראו הערה 15.ג.1).

הקבוצה A חסומה והקבוצה L אינה חסומה, ולכן יש $x \in L \setminus A$ או $0 = \chi_A(x) \in \chi_A(L)$.

לכן $\chi_A(L) = \{0\}$, כלומר $L \cap A = \emptyset$.

בזאת הוכחה טענת העזר. עכשיו נעזר בה כדי להוכיח את הנדרש.

מאחר ש- $k \geq 2$ יש ב- $\mathbb{R}^k$ שני ישרים נחתכים L_1 ו- L_2 . יש כאלה שנקודת החיתוך שלהם ב- A .

נסמן ב- F_i את קבוצת הישרים המקבילים לישר L_i (כולל L_i) שיש בהם נקודות מהקבוצה A :

$$F_i = \{L_i\} \cup \{L \mid L \cap A \neq \emptyset, L \parallel L_i\}$$

ישר הוא קבוצה לא חסומה וקשורה מסילתית. לפי טענת העזר אם $L \in F_i$ אז $L \cap \partial A \neq \emptyset$.

כעת נניח בשלילה ש- ∂A היא קבוצה סופית.

איברים שונים של F_i הם ישרים מקבילים ולכן אין להם נקודות משותפות. בכל אחד מהם יש

נקודות מ- ∂A . לכן מספר איברי F_i אינו עולה על מספר איברי ∂A , ובפרט F_i היא קבוצה סופית.

לכל $i \in \{1,2\}$ איחוד הישרים ב- F_i מכיל את A , כי דרך כל נקודה של A שאינה ב- L_i יש

ישר מקביל ל- L_i , שהוא איבר של F_i . בסימנים:

$$A \subseteq \bigcup_{L \in F_i} L$$

$$A \subseteq \left(\bigcup_{L' \in F_1} L' \right) \cap \left(\bigcup_{L'' \in F_2} L'' \right) = \bigcup_{(L', L'') \in F_1 \times F_2} L' \cap L''$$

אז:

אז כל איבר של A נמצא באחת הקבוצות $L' \cap L''$ שהיא חיתוך של ישר מהקבוצה F_1 וישר

מהקבוצה F_2 . אלה ישרים שאינם מקבילים (כי L_1 אינו מקביל ל- L_2) ולכן בחיתוך $L' \cap L''$ יש

לכל היותר נקודה אחת. אז A מוכלת בקבוצה שמספר איבריה אינו עולה על מספר איברי

הקבוצה הסופית $F_1 \times F_2$, וזה עומד בסתירה לנתון ש- A קבוצה אינסופית. לכן בניגוד להנחת

השלילה ∂A היא קבוצה אינסופית.

נציג הוכחה נוספת עבור מי שלא מרוצה מההוכחה לעיל, שמכילה טיעונים כמה טיעונים

גיאומטריים. הוכחה נוספת:

ראשית: אם $A \subseteq \partial A$, מהנתון ש- A אינסופית נובע ש- ∂A אינסופית.

אחרת תהי $a \in A$ נקודה שאינה נקודת שפה, דהיינו $a \notin \partial A$.

מהנתון ש- A חסומה נובע שיש $R > 0$ כך ש- $A \subseteq B(a; R)$.

יהי $u \in S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$ (למשל $u = e_1$). לכל $r > 0$ ולכל נסמן $L_r = S^{k-1}(a + ru; r)$.

מתקיים $|a - (a + ru)| = |ru| = r|u| = r$ ולכן $a \in L_r$ אז: $1 = \chi_A(a) \in \chi_A(L_r)$

מתקיים גם $|a + 2ru - (a + ru)| = |ru| = r|u| = r$ ולכן $a + 2ru \in L_r$.

כמוכן אם $r > R$ אז $|a + 2ru - a| = |2ru| = 2r|u| = 2r > R$ ולכן $a + 2ru \notin B(a; R)$ ולכן גם

$0 = \chi_A(a + 2ru) \in \chi_A(L_r)$ לכן אם $r > R$ אז $a + 2ru \notin A$.

לכן אם $r > R$ אז $\{0, 1\} \subseteq \chi_A(L_r)$. מצד שני $\chi_A(L_r) \subseteq \{0, 1\}$ ולכן: $\chi_A(L_r) = \{0, 1\}$

הפונקציה $\varphi_{c,r}: x \mapsto c + rx$ היא פונקציה אפינית ולכן רציפה ומתקיים $|x| = 1$ אם ורק אם

$|c + rx| = r$ ולכן $\varphi_{c,r}(S^{k-1}(0; 1)) = S^{k-1}(c; r)$. לפי שאלה 14.ט.2 הספירה $S^{k-1}(0; 1)$

קשורה מסילתית, ולכן לפי טענה 2.ט.2 כל ספירה $S^{k-1}(c; r)$ קשורה מסילתית.

בפרט לכל $r > R$ הקבוצה L_r קשורה מסילתית, אבל הקבוצה $\chi_A(L_r) = \{0, 1\}$ אינה קשורה

מסילתית, ולכן לפי טענה 2.ט.2 הפונקציה המציינת χ_A אינה רציפה בקבוצה L_r .

אז עלפי אבחנה 6.ד.2 יש נקודה $a_r \in L_r$ שבה χ_A אינה רציפה, ולפי שאלה 4.ד.2 $a_r \in \partial A$.

כמוכן $a \notin \partial A$ ולכן $a_r \neq a$.

נראה שאם $r \neq s$ אז למעט הנקודה a אין נקודות משותפות ל- L_r ול- L_s , ולכן ההתאמה $r \mapsto a_r$

היא פונקציה חד-חד ערכית מ- (R, ∞) ל- ∂A , ומכאן ש- ∂A אינסופית.

ובכן נניח $r, s \in (0, \infty)$ ו- $r \neq s$ ונראה ש- $\{a\} \subseteq L_r \cap L_s$, וזה יסיים את ההוכחה.

יהי $b \in L_r \cap L_s$ אז $|b - (a + ru)| = r$ ו- $|b - (a + su)| = s$. נסמן: $v = \frac{1}{r}(b - (a + ru))$

אז $|v| = 1$ ומתקיים: $s = |b - (a + su)| = |b - (a + ru) + (r - s)u| = |rv + (r - s)u|$

נעלה בריבוע ונעזר באבחנה 12.ד.1:

$$s^2 = |rv + (r - s)u|^2 = r^2|v|^2 + 2r(r - s)v \cdot u + (r - s)^2|u|^2 = r^2 + 2r(r - s)v \cdot u + r^2 - 2rs + s^2$$

$$0 = 2r^2 - 2rs + 2r(r - s)v \cdot u = 2r(r - s)(1 + v \cdot u)$$

מאחר ש- $2r(r - s) \neq 0$ מתקיים $v \cdot u = -1$. ושוב בעזרת אבחנה 12.ד.1

$$|v + u|^2 = |v|^2 + 2v \cdot u + |u|^2 = 1 - 2 + 1 = 0$$

ומכאן ש- $v = -u$ ולכן $b - (a + ru) = rv = -ru$ ולכן $b = (a + ru) - ru = a$

והסתיימה ההוכחה.

פתרון סעיף ב

למשל $A = (0,1)$ היא קבוצה אינסופית וחסומה ב- $\mathbf{R}$ ושפתה $\partial A = \{0,1\}$ היא קבוצה סופית (ראו שאלה 6.2.א).

למשל $A = \mathbf{Q} \cap (0,1)$ היא קבוצה אינסופית וחסומה ב- $\mathbf{R}$. כל אחד מאיבריה הוא גם נקודת שפה שלה כי כל קטע פתוח מכיל מספרים רציונליים ואירציונליים, ומכאן שכל סביבה שלה מכילה איברים מתוך A ומחוץ ל- A (השלימו את פרטי ההוכחה). לכן ∂A אינסופית.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ בעלת התכונה שהגרף $G(f)$ הוא קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^{k+1}$.

א. הביאו דוגמה של פונקציה בעלת תכונה זאת שאינה רציפה בקבוצה $\mathbb{R}^k$.

ב. הוכיחו שאם f היא פונקציה חסומה אז f היא פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}^k$.

המלצה: חשבו על הצמצום של f לקבוצה קומפקטית.

פתרון סעיף א

תהי למשל הפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f: t \mapsto \frac{1}{t}$ לכל $t \neq 0$ וכן $f(0) = 0$.

זאת אינה פונקציה רציפה שכן: $f(t) = \frac{1}{t} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} \infty$

תהיה $(x, y) \in G(f)$. אם $x = 0$ אז $y = f(0) = 0$ ולכן $(x, y) = (0, 0)$. אחרת $y = f(x) = \frac{1}{x}$

ולכן $xy = 1$. נכון גם ההיפך: אם $xy = 1$ אז $x \neq 0$ ו- $y = x^{-1} = f(x)$ ולכן $(x, y) \in G(f)$.

לכן: $G(f) = \{(0, 0)\} \cup \{(x, y) \mid xy = 1\}$

הקבוצה $\{(0, 0)\}$ היא סגורה בתור קבוצה בת נקודה אחת.

הקבוצה $\{(x, y) \mid xy = 1\}$ היא קבוצה סגורה לפי חלק ג של מסקנה 23.ד.2.

איחודן הוא קבוצה סגורה לפי חלק ד של טענה 24.א.2, כלומר $G(f)$ היא קבוצה סגורה.

פתרון סעיף ב

רעיון ההוכחה הוא שבמקום להוכיח שהפונקציה $x \mapsto f(x)$ רציפה, נוכיח ש- $(x, f(x))$ היא פונקציה רציפה, ומכאן שהרכיב האחרון שלה, שהוא f , הוא פונקציה רציפה.

הפונקציה $(x, f(x))$ היא פונקציה חד-חד ערכית שתמונתה $G(f)$, והפונקציה ההפוכה לה

היא הפונקציה הלינארית $(x, y) \mapsto x$. נרצה להשתמש בחלק ב של טענה 29.ד.2, אלא שהגרף

$G(f)$ אינו קבוצה חסומה, ולכן אינו קבוצה קומפקטית. לכן נצטרך עבודת הכנה.

לפי חלק א של אבחנה 6.ד.2 די להוכיח ש- f רציפה בכל נקודה ב- $\mathbb{R}^k$.

תהי $a \in \mathbb{R}^k$ כלשהי. די להוכיח ש- f רציפה בנקודה a . נסמן: $C = \bar{B}(a; 1)$

אז C היא סביבה של a , דהיינו a היא נקודה פנימית של C (ראו הגדרה 14.א.2) ולפי חלק ב של

אבחנה 6.ד.2 אם f רציפה בקבוצה C אז f רציפה בנקודה a . לכן די להוכיח ש- f רציפה

בקבוצה C , כלומר די להוכיח שהצמצום $f|_C$ היא פונקציה רציפה בקבוצה C .

הקבוצה C היא קבוצה סגורה וחסומה, ולפי משפט היינה-בורל היא קומפקטית.

הפונקציה f חסומה, ולפי אבחנה 8.ו.2 יש $m > 0$ כך ש לכל $x \in \mathbb{R}^k$ מתקיים: $f(x) \in [-m, m]$

לכן $G(f) \subseteq \mathbb{R}^k \times [-m, m]$ ומכאן נובע: $G(f|_C) = G(f) \cap C \times [-m, m]$

לפי שאלה 17.ב.2 הקבוצה $C \times [-m, m]$ קומפקטית ובפרט היא קבוצה חסומה שמכילה את הגרף $G(f|_C)$ ולכן $G(f|_C)$ היא קבוצה חסומה. היא גם קבוצה סגורה בתור חיתוך של הקבוצות הסגורות $G(f)$ ו- $C \times [-m, m]$. לכן הגרף $G(f|_C)$ הוא קבוצה קומפקטית.

נסמן: $K = G(f|_C)$

תהי $p: \mathbf{R}^{k+1} \rightarrow \mathbf{R}^k$ המוגדרת על ידי: $p: (x_1, \dots, x_k, x_{k+1}) \mapsto (x_1, \dots, x_k)$

זאת פונקציה לינארית ולכן היא רציפה. הפונקציה $p|_K$ היא פונקציה חד-חד-ערכית:

אם $z_i \in K = G(f|_C)$ אז יש $x_i \in C$ ו- $y \in \mathbf{R}$ כך ש- $z_i = (x_i, f(x_i))$, ומתקיים $x_i = p(z_i)$.

לכן אם $p(z_1) = p(z_2)$ אז $x_1 = x_2$ ולכן: $z_1 = (x_1, f(x_1)) = (x_2, f(x_2)) = z_2$

לכל $x \in C$ מתקיים $p(x, f(x)) = x$ ו- $p(x, f(x)) \in G(f|_C) = K$ ולכן $C = p(K)$.

לפי חלק ב של טענה 29.ד.2 הפונקציה ההופכית $p|_K^{-1}: C \rightarrow K$ רציפה בקבוצה C .

לפי טענה 18.ה.2 כל רכיבי $p|_K^{-1}$ הם פונקציות רציפות ב- C ובפרט $[p|_K^{-1}]_{k+1}$ רציפה ב- C .

אבל לכל $x \in C$ מתקיים $p(x, f(x)) = x$ ולכן $p|_K^{-1}(x) = (x, f(x))$ ובפרט:

$$[p|_K^{-1}]_{k+1}(x) = [p|_K^{-1}(x)]_{k+1} = [(x, f(x))]_{k+1} = f(x)$$

אז $f|_C = [p|_K^{-1}]_{k+1}$ היא פונקציה רציפה, והסתיימה ההוכחה.

הערה: אפשר להוכיח את מה שנטען בסעיף ב גם בדרכים אחרות. למשל בעזרת אפיון רציפות בעזרת סדרות (מסקנה 11.ז.2), משפט בולצאנו-וויירשטראס (טענה 4.ז.2), וחלק ג של שאלה 9.ז.2 (אפיון קבוצה קומפקטית בעזרת גבולות חלקיים של סדרות).

עוד הערה: ניתן להוכיח את הרציפות של f גם אם מחליפים את דרישת החסימות בדרישה

היותר חלשה, שלכל נקודה ב- $\mathbf{R}^k$ יש סביבה ש- f חסומה בה. זאת כי השימוש היחיד בחסימות הפונקציה היה כדי להראות שיש סביבה קומפקטית C שבה f חסומה, ולכן גם הגרף $G(f|_C)$ קבוצה חסומה.

שאלה 4 (25 נקודות)

- א. הוכיחו שהמשוואה $xe^z + ye^{-z} + z = 1$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$ את z כפונקציה של (x, y) , כאשר:
- $$A = \{(x, y) \in [0, \infty) \times [0, \infty) \mid x + y \leq 1\}$$
- ב. תהי $f : A \rightarrow [0, \infty)$ הפונקציה שלפי סעיף א מוגדרת באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$. הוכיחו כי:
- $$f(x) \xrightarrow[x \in A]{x \rightarrow 0^+} 1$$
- ג. הראו שהגרף של $f|_{A \setminus \partial A}$ הוא טלאי דו־ממדי (ובפרט, הוא משטח).

פתרון סעיף א

נסמן

$$F(x, y, z) = xe^z + ye^{-z} + z$$

לפי הגדרה 22.1.1, עלינו להראות שלכל $(x, y) \in A$ יש $z \in [0, \infty)$ יחיד עבורו:

$$F(x, y, z) = 1$$

עבור $(x, y) \in A$ נגדיר את הפונקציה:

$$g : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$$

$$z \mapsto xe^z + ye^{-z} + z$$

זאת פונקציה רציפה ב־ $\mathbf{R}$ כפונקציה יסודית.

מתקיים

$$g(0) = xe^0 + ye^0 + 0 = x + y \leq 1$$

וגם

$$g(1) = xe^1 + ye^{-1} + 1 \geq 0 + 0 + 1 = 1$$

ולפי משפט ערך הביניים יש $c \in [0, 1]$ כך ש־ $g(c) = 1$. בפרט $c \in [0, \infty)$ ומתקיים:

$$F(x, y, c) = 1$$

נראה שיש רק $c \in [0, \infty)$ אחד בעל תכונה זאת:

נניח בשלילה ש־ $a, b \in [0, \infty)$ ו־ $a < b$ וכן מתקיים $F(x, y, a) = 1$ וגם $F(x, y, b) = 1$.

אז:

$$g(a) = g(b) = 1$$

הפונקציה g גזירה ב־ $\mathbf{R}$ ולכל $z \in \mathbf{R}$:

$$g'(z) = xe^z - ye^{-z} + 1$$

לפי משפט רול יש $c \in (a, b)$ כך ש־ $g'(c) = 0$. אז

$$0 = g'(c) = xe^c - ye^{-c} + 1$$

ולכן:

$$0 \leq xe^c = ye^{-c} - 1 \leq y - 1 \leq (1 - x) - 1 = -x \leq 0$$

המשוואה $0 \leq -x \leq 0$ מתקיימת רק עבור $x = 0$. במקרה זה $y = 1$ ולכן $e^{-c} = 1$ ולכן $c = 0$.

לכן בהכרח $x = 0$ ו־ $y = 1$ ולכן $0 = g'(c) = -e^{-c} + 1$ כלומר $e^{-c} = 1$ ולכן $c = 0$.

אז $a < c = 0$ בסתירה לכך ש־ $a \in [0, \infty)$.

קיבלנו אפוא שלכל $(x, y) \in A$ יש $c \in [0, \infty)$ יחיד כך שמתקיים $F(x, y, c) = 1$, ולכן המשוואה

$F(x, y, z) = 1$, שהיא המשוואה הנתונה בשאלה, מגדירה באופן סתום בקבוצה $A \times [0, \infty)$ את z

כפונקציה של (x, y) (ראו הגדרה 22.1.1).

פתרון סעיף ב

לכל $(x, y) \in A$ מתקיים $F(x, y, f(x, y)) = 1$ דהיינו: $xe^{f(x, y)} + ye^{-f(x, y)} + f(x, y) = 1$
 בפרט: $f(x, y) \leq xe^{f(x, y)} + ye^{-f(x, y)} + f(x, y) = 1$
 כמובן: $f(x, y) = 1 - xe^{f(x, y)} - ye^{-f(x, y)} \geq 1 - xe^0 - ye^{-1} = 1 - x - e^{-1}y$
 הפונקציה $(x, y) \mapsto 1 - x - e^{-1}y$ היא אפינית ולכן רציפה, ולכן:

$$1 - x - e^{-1}y \xrightarrow[(x, y) \in A]{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 1 - 0 - e^{-1} \cdot 0 = 1$$

לכל $(x, y) \in A$ מתקיים $1 - x - e^{-1}y \leq f(x, y) \leq 1$

ולכן לפי כלל הכריך: $1 - x - e^{-1}y \xrightarrow[(x, y) \in A]{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 1$

פתרון סעיף ג

נסמן: $f_1 : (x, y) \mapsto -x$

$f_2 : (x, y) \mapsto -y$

$f_3 : (x, y) \mapsto x + y - 1$

נסמן עבור $i \in \{1, 2, 3\}$: $B_i = \{(x, y) \in A \mid f_i(x, y) = 0\}$

אז $A = \{(x, y) \mid f_1(x, y) \leq 0, f_2(x, y) \leq 0, f_3(x, y) \leq 0\}$

ולפי מסקנה 25.ד.2 A היא קבוצה סגורה, דהיינו $\partial A \subseteq A$, וכן

$$\partial A \subseteq \{(x, y) \mid f_1(x, y) = 0\} \cup \{(x, y) \mid f_2(x, y) = 0\} \cup \{(x, y) \mid f_3(x, y) = 0\}$$

ולכן: $\partial A \subseteq B_1 \cup B_2 \cup B_3$

נראה שגם ההכלה ההפוכה נכונה, ולכן $\partial A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

יהי $b \in B_1 \cup B_2 \cup B_3$. אז $b \in A$. תהי U סביבה של b . נראה שיש $c \in U \setminus A$, ומכאן שיש ב- U

איבר של A (שהוא b) ואיבר שאינו ב- A (שהוא c) ולכן $b \in \partial A$.

כסביבה של b יש כדור סגור סביב b מוכל ב- U , כלומר יש $r > 0$ כך ש- $\bar{B}(b; r) \subseteq U$.

אם $b \in B_1$ אז $b = (0, t)$ עם $t \in [0, 1]$. אז $c = (-r, t) \in \bar{B}(b; r) \subseteq U$ ומתקיים $c \in U \setminus A$.

אם $b \in B_2$ אז $b = (t, 0)$ עם $t \in [0, 1]$. אז $c = (t, -r) \in \bar{B}(b; r) \subseteq U$ ומתקיים $c \in U \setminus A$.

אחרת $b \in B_3$ ואז $b = (t, 1-t)$ עם $t \in [0, 1]$. אז $c = (t+r, 1-t) \in \bar{B}(b; r) \subseteq U$ ומאחר ש-

$$f_3(c) = f_3(t+r, 1-t) = t+r+1-t-1 = r > 0$$

כל המקרים יש $c \in U \setminus A$ וזה משלים את ההוכחה ש- $\partial A = B_1 \cup B_2 \cup B_3$.

לכן $A \setminus \partial A = A \setminus (B_1 \cup B_2 \cup B_3) = \{(x, y) \mid f_1(x, y) < 0, f_2(x, y) < 0, f_3(x, y) < 0\}$

כלומר: $A \setminus \partial A = \{(x, y) \in (0, \infty)^2 \mid x + y < 1\}$

$$G(f|_{A \setminus \partial A}) = G(f) \cap ((A \setminus \partial A) \times \mathbf{R}) \quad \text{אז:}$$

$$\begin{aligned} &= \{(x, y, z) \in A \times [0, \infty) \mid xe^z + ye^{-z} + z = 1\} \cap \{(x, y, z) \in (0, \infty)^2 \times \mathbf{R} \mid x + y < 1\} \\ &= \{(x, y, z) \in (0, \infty)^2 \times [0, \infty) \mid x + y < 1, xe^z + ye^{-z} + z = 1\} \end{aligned}$$

נסמן $S = G(f|_{A \setminus \partial A})$. המשימה בסעיף זה היא להראות ש- S היא טלאי דרממדי.

אם $(x, y, z) \in S$ אז $z \geq 0$. לא ייתכן $z = 0$ כי אם $z = 0$ אז $xe^0 + ye^{-0} + 0 = 1$ דהיינו $x + y = 1$ בסתירה לכך ש- $x + y < 1$. לכן $z > 0$ ולכן:

$$S = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y < 1, xe^z + ye^{-z} + z = 1\}$$

אבל $xe^z + ye^{-z} + z = 1$ אם ורק אם $xe^{2z} + y + ze^z = e^z$ כלומר $y = e^z - ze^z - xe^{2z}$.

$$\begin{aligned} S &= \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y < 1, y = e^z - ze^z - xe^{2z}\} \\ &= \{(x, e^z - ze^z - xe^{2z}, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + e^z - ze^z - xe^{2z} < 1\} \end{aligned} \quad \text{אז:}$$

$$\Omega = \{(x, z) \in (0, \infty)^2 \mid e^z - ze^z - xe^{2z} > 0, x + e^z - ze^z - xe^{2z} < 1\} \quad \text{נגדיר}$$

בעזרת מסקנה 23.ד.2 וחלק ב של טענה 24.א.2 רואים ש- Ω היא קבוצה פתוחה ב- $\mathbf{R}^2$.

$$h: (x, z) \mapsto (x, e^z - ze^z - xe^{2z}, z) \quad \text{נגדיר } h: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ על ידי:}$$

$$\begin{aligned} S &= \{(x, e^z - ze^z - xe^{2z}, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + e^z - ze^z - xe^{2z} < 1\} \\ &= \{h(x, z) \mid (x, z) \in \Omega\} = h(\Omega) \end{aligned} \quad \text{אז:}$$

הפונקציה h היא צמצום ל- Ω של פונקציה יסודית שמוגדרת ולכן רציפה ב- $\mathbf{R}^2$. לכן h רציפה. הצמצום ל- $S = h(\Omega)$ של הפונקציה הלינארית $(x, y, z) \mapsto (x, y, z)$ הוא הפונקציה ההפוכה ל- h , ולכן הפונקציה $h^{-1}: S \rightarrow \Omega$ רציפה. אז הפונקציה h היא הומאומורפיזם מ- Ω ל- S , ולכן S היא טלאי דרממדי, ובפרט היא משטח.

הערות: דרך נוספת להראות את הנדרש היא להוכיח ש- f פונקציה רציפה, ואז לפי דוגמה 3.י.2

$G(f|_{A \setminus \partial A})$ היא טלאי דרממדי (כי $A \setminus \partial A$ היא קבוצה פתוחה ב- $\mathbf{R}^2$). אולם ההוכחה ש- f היא

פונקציה רציפה אינה פשוטה. היא תהיה קלה יותר לאחר שנלמד בפרק 7 את משפט ההגדרה

הסתומה, בעזרתו אפשר יהי להסיק ש- f גזירה בכל נקודה ב- $A \setminus \partial A$ ולכן $f|_{A \setminus \partial A}$ רציפה.

דרך אחרת לנצל את דוגמה 3.י.2 היא להגדיר פונקציה $g: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$ כך:

$$g: (x, z) \mapsto e^z - ze^z - xe^{2z}$$

לפי דוגמה 3.י.2 הגרף $G(g)$ הוא טלאי דרממדי. הפונקציה $\varphi: (x, z, y) \mapsto (x, y, z)$ היא פונקציה

לינארית הפיכה (במקרה מתקיים $\varphi^{-1} = \varphi$) ולכן היא וההופכית שלה רציפות בכל המרחב, ולפי

טענה 11.י.2 הקבוצה $\varphi(G(g))$ היא טלאי דרממדי, ולא קשה לבדוק ש- $\varphi(G(g)) = S$.