

מטלות אופל

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס. כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו אחר ההוראות בגוף המטלה.

יש עשר מטלות אופל, אחת לכל פרק. משקל כל מטלת אופל: נקודה אחת.

מטלות אלה מיועדות לפתרון תוך כדי לימוד הפרק מהספר, דהיינו במקביל לקריאת חומרי הלימוד. תוכלו לעזוב את המטלה ולחזור אליה באתר הקורס ולהמשיך לפתור אותה, כל עוד לא הגשתם אותה באמצעות כפתור ההגשה שבסוף המטלה. תשובותיכם נשמרות באתר הקורס. **המשוב על כל מטלת אופל פתוח רק למי שהגישו את המטלה.** לכן מומלץ מאוד להגיש את כל המטלות האלה, גם כאלה שפתרתם חלקית בלבד.

לפני המועד האחרון להגשת כל מטלת אופל, יש להגיש אותה בעזרת כפתור ההגשה.

אחרי הגשת המטלה לא ניתן לשנות עוד את התשובות.

אחרי המועד האחרון לא ניתן להגיש את המטלה.

המועדים המדויקים לפתרון כל מטלת אופל נמצאים בגוף המטלה באתר הקורס.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–2
מספר השאלות: 5
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד אחרון להגשה: 24.11.2024
סמסטר: 1א2025

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $r > 0$ ותהי $a \in \mathbb{R}^k$. תהי $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה אפינית שמקיימת: $\varphi(B(0^{[k]}; 1)) = B(a; r)$. הוכיחו ש- $\varphi(S(0^{[k]}; 1)) = S(a; r)$.

שאלה 2 (15 נקודות)

הוכיחו או הפריכו: אם A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$ אז $\partial(A \setminus \partial A) \subseteq \partial A$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה עולה במובן הרחב, דהיינו אם $x < y$ אז $f(x) \leq f(y)$. הוכיחו כי הקבוצה $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ היא קבוצה פתוחה אם ורק אם לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהי $\alpha > 0$. האם קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i|\right)^\alpha}$?

שאלה 5 (30 נקודות)

- א. הראו שהקבוצה $S = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ היא משטח.
- הערה: למעשה אפשר להוכיח ש- S היא טלאי דרממדי. שימוש בשיעורים קוטביים או גליליים יכול להועיל.
- ב. הראו שלכל $r \in (0, 1]$ הקבוצה $S \cap B((0, 0, 0); r)$ אינה קשורה-מסילתית ואילו הקבוצה $S \cap B((0, 0, 0); r) \cup \{(0, 0, 0)\}$ קשורה-מסילתית.
- ג. הראו שהקבוצה $S \cup \{(0, 0, 0)\}$ אינה משטח.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 1א2025
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 3–6
 משקל המטלה: 2 נקודות
 מספר השאלות: 7
 מועד אחרון להגשה: 5.1.2025

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

הפונקציה $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ נתונה עבור $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ על-ידי

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x^2 y z^2}{x^8 + y^6 + z^4}$$

וכן $f(0, 0, 0) = 0$. קבעו מהן כל הנקודות בהן f גזירה, ומהן הנקודות בהן היא אינה גזירה.

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו "כלל גזירה" עבור פעולת כפל מטריצות, המכליל את "כלל המכפלה" מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1: הנוסחה לנגזרת של מכפלת פונקציות גזירות.

יהיו k, l, m, n מספרים טבעיים, ותהי $a \in \mathbb{R}^k$.

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $M_{l \times m}(\mathbb{R})$ שגזירה בנקודה a .

תהי g פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ שגזירה בנקודה a .

נגדיר $p: x \mapsto f(x)g(x)$ (הפעולה היא כפל מטריצות).

הפונקציה p היא פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $M_{l \times n}(\mathbb{R})$.

הוכיחו ש- p גזירה בנקודה a ושמתקיים $Dp_a(h) = f(a)Dg_a(h) + Df_a(h)g(a)$ לכל $h \in \mathbb{R}^k$.

הדרכה: פעלו בדומה לפתרון חלק ג של שאלה 15.3:

הגדירו את הפונקציה $\mu: M_{l \times m}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{l \times n}(\mathbb{R})$ על-ידי $\mu: (X, Y) \mapsto XY$ (פעולת כפל מטריצות).

הראו שהיא גזירה ומצאו את $D\mu_{(A, B)}(H, K)$ עבור כל $A, H \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$ וכל $B, K \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

הראו ש- $p = \mu \circ (f, g)$ והשתמשו בכלל השרשרת.

תוכלו להיעזר בדרך בנוסחה $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ עבור $A \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$ ו- $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ שאינה מוכחת בספר (אינכם נדרשים לכלול הוכחה שלה במסגרת פתרון השאלה).

שאלה 3 (15 נקודות)

יהיו k ו- n מספרים טבעיים ותהי $f: M_{k \times k}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbb{R})$ המוגדרת על ידי $X \mapsto X^n$.

מדוגמה 6.1 נובע שזאת פונקציה פולינומית ולכן היא ודאי גזירה ב- $M_{k \times k}(\mathbb{R})$.

הראו ש- $Df_X(I) = nX^{n-1}$ לכל $X \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$, כאשר I היא מטריצת היחידה.

תוכלו להיעזר בשאלה הקודמת, או לחלופין לפעול בדרך ישירה יותר.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בקבוצה $\mathbf{R} \times [c, d]$. תהי $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ שעבורה

$$|f(x, t)| \leq \varphi(x) \quad \text{מתכנס ולכל } (x, t) \in \mathbf{R} \times [c, d] \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } F: t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx \text{ מוגדרת ורציפה בקטע } [c, d].$$

ב. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$.

$$\text{תהי } \varphi: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ שעבורה האינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ מתכנס ולכל } x \in \mathbf{R} \text{ ו- } y \in \mathbf{R}^k$$

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x) \quad \text{מתקיים:}$$

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } F: y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \text{ מוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי } \mathbf{R}^k.$$

הדרכה: אפשר לנסות לחקות את הוכחת טענה 3. ד. 4. במקום לחזור על ההוכחה אפשר לנסות להיעזר בטענה 3. ד. 4. גם טענה 7. ח. 2 יכולה להועיל.

שאלה 5 (רשות – 0 נקודות)

תהי f פונקציה סקלרית שמוגדרת וגזירה ברציפות בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1} = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}$, ומתקיימים התנאים האלה:

$$\bullet \text{ לכל } x \in \mathbf{R}^k \text{ האינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \text{ מתכנס.}$$

$$\bullet \text{ יש פונקציה } \psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ כך שהאינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy \text{ מתכנס.}$$

$$\bullet \text{ לכל } x \in \mathbf{R}^k \text{ ו- } y \in \mathbf{R} \text{ מתקיים } |\nabla f(x, y)| \leq \psi(y).$$

$$\text{הראו שבהנחות אלה הפונקציה } F: x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \text{ גזירה ברציפות ב- } \mathbf{R}^k \text{ וכן לכל } x \in \mathbf{R}^k$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy \quad \text{ולכל } i \in \{1, \dots, k\} \text{ מתקיים:}$$

שאלה 6 (15 נקודות)

יהיו $a, b, u, v \in \mathbb{R}^3$, ונניח ששלושת הוקטורים $a - b, u, v$ הם בלתי-לויים לינארית.

נסמן: $A = \{a + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ $B = \{b + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$

הראו שיש נקודות יחידות $p \in A$ ו- $q \in B$ כך שהקטע שקצותיו p ו- q הוא הקטע הקצר ביותר שאחד מקצותיו בקבוצה A והקצה האחר בקבוצה B , והראו שאורכו של קטע זה הוא המספר:

$$\frac{|(a-b) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|}$$

שאלה 7 (15 נקודות)

מצאו את כל נקודות הקיצון המקומי של הפונקציה $f: (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + (x - y)^3$. לכל אחת מהנקודות שמצאתם, קבעו אם היא נקודת מינימום מקומי או נקודת מקסימום מקומי של f , וכן אם היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום של f ב- $\mathbb{R}^2$.

►►► סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 7

מועד אחרון להגשה : 9.3.2025

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\{A^2 \mid A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})\}$ מכילה סביבה של מטריצת היחידה I .

(מרחב המטריצות $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^{k^2}$).

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי F פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה פעמיים ברציפות בסביבה של הנקודה (a, b) .

נתון : $F(a, b) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) \neq 0$

הוכיחו שהמשוואה $F(x, y) = 0$ אינה מגדירה באופן סתום בסביבת (a, b) את x כפונקציה

של y . (שימו לב שהמשוואה כן מגדירה באופן סתום בסביבת (a, b) את y כפונקציה של x . הוכיחו זאת, היעזרו בנתונים כדי להסיק מסקנות על תכונות הפונקציה הזאת, ובעזרתן הוכיחו את הנדרש בשאלה).

שאלה 3 (20 נקודות)

נסמן : $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \frac{3}{2}) \mid z^2 = 3x^2 + 3y^2\}$

$S_2 = (\mathbb{R}^2 \times [\frac{3}{2}, \infty)) \cap S((0, 0, 2); 1)$

הוכיחו שהקבוצה $S = S_1 \cup S_2$ היא משטח חלק.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי S יריעה חלקה d -ממדית ב- $\mathbb{R}^k$, בעלת שתי תכונות :

1. כל קרן שקודקודה ב- $0^{[k]}$ מכילה לכל היותר נקודה אחת של S .

2. לכל נקודה $a \in S$ המרחב המשיק בנקודה a ל- S אינו מכיל את $0^{[k]}$.

תהי S' איחוד כל הקרניים שקודקודן ב- $0^{[k]}$ שמכילות נקודה מ- S , לא כולל $0^{[k]}$ עצמה, דהיינו :

$$S' = \bigcup_{a \in S} \{ta \mid t > 0\}$$

הראו שאם $d = k - 1$ (כלומר S היא משטח-על) אז S' היא קבוצה פתוחה.

שאלה 5 (20 נקודות)

$$(x, y, z) \mapsto xyz$$

יהי $\alpha > 0$ ותהי $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי:

הראו של- f יש ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה

$$A = \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x \leq \alpha y, x^6 + y^6 + z^6 \leq 3 \right\}$$

ומצאו אותם ואת כל נקודות הקיצון של f בקבוצה זאת. (התוצאה תלויה במספר α).

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 8

מועד אחרון להגשה : 6.4.2025

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}^k$ וגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$. נניח ש- $f(0^{[k]}) = 0$ וכן

$$f(x) > 0 \text{ לכל } x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \text{ נניח גם ש-} x \cdot \nabla f(x) > 0 \text{ לכל } x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}.$$

א. הוכיחו שהקבוצה $U = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) < 1\}$ היא קבוצה כוכבית.

הערה: ניתן להוכיח זאת גם בהנחה החלשה יותר ש- $x \cdot \nabla f(x) > 0$ בנקודות בהן $f(x) = 1$.

ב. אם $k = 2$ והקבוצה U חסומה הראו שהקבוצה $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 1\}$ היא תמונת לולאה פשוטה וסדירה שמספר הליפוף שלה סביב ראשית הצירים הוא 1.

הדרכה: אפשר לרשום את נקודות S בצורה $x = (r \cos t, r \sin t)$, ולהיעזר במשפט ההגדרה הסתומה עם

$$f(r \cos t, r \sin t) = 1 \text{ המשוואה}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ מסילה שאורכה סופי ומתקיים:

$$L(\varphi) \leq |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|$$

נתון גם ש- φ אינה קבועה בשום קטע שהיא מוגדרת בו.

הראו ש- φ היא מסילה פשוטה ששקולה למסילה אפינית.

הערה: מסילה אפינית היא צמצום של פונקציה אפינית מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}^k$ לקטע סגור. ראו שאלה 13.ב.8.

שאלה 3 (20 נקודות)

הגרף של הפונקציה $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ הוא תמונת מסילה

פשוטה וסדירה במישור. מצאו את המרכז הגיאומטרי של מסילה זאת.

הערה: הפונקציה הזאת נקראת קוסינוס ההיפרבולי, ונהוג לסמן $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

נגזרתה נקראת פונקציית הסינוס ההיפרבולי ומסומנת $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

כל אחת משתי הפונקציות האלה היא הנגזרת של האחרת, ויש ביניהן קשרים רבים, כגון $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

הראו שהפונקציה $F: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{-2xy}{x^4+y^2}, \frac{x^2}{x^4+y^2} \right)$$

היא שדה משמר במישור הנקוב $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו עבור אילו ערכים של $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ ו- $r > 0$ הקבוצה

$$U = B((a,b);r) \setminus \bar{B}((0,0);45)$$

היא קבוצה לא ריקה שבה הפונקציה

$$F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x,y) \mapsto \frac{e^x}{x^2+y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y)$$

היא שדה משמר.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 9

מועד אחרון להגשה : 18.5.2025

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי g פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$.

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^3$ ל- $\mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי :

$$f(x, y, z) = g(x, y) + \bar{B}(0^{[3]}; 1) \text{ אינטגרלית ב-} \bar{B}(0^{[2]}; 1) \text{ אינטגרלית ב-} \bar{B}(0^{[3]}; 1).$$

הצעה : אחת ממסקנות משפט פוביני יכולה להועיל. גם מבחן לבג לאינטגרליות יכול להועיל.

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את הנפח ה-5 ממדי ואת המרכז הגיאומטרי של הקבוצה :

$$A = \{(x, y, z, u, v) \in [0, \infty)^5 \mid x^2 + y^2 + z^2 + u + v \leq 1\}$$

עצות : דרך אפשרית היא להשתמש במשפט 26.1.9 עם $k=3$ ו- $l=2$. יתכן שפונקציות גמא ובטא תסייענה. תוכלו להראות בעזרת שאלה 6.1.9 שחלק משיעורי המרכז הגיאומטרי של הקבוצה שווים זה לזה.

שאלה 3 (20 נקודות)

מצאו קבוצה סגורה וחסומה $A \subseteq (0, \infty)^2$ ששטחה חיובי, ושפתה מוכלת באיחוד הקבוצות

$$\{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 3\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - xy - y^2 = 1\}$$

וחשבו את האינטגרל :

$$\iint_A (x^4 - y^4) e^{xy} dx dy$$

הדרכה : היעזרו בפונקציה $\varphi : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (0, \infty)$ המוגדרת על ידי $\varphi : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי $k \geq 2$ טבעי. תהי $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $x \mapsto |x|^{2025}$.

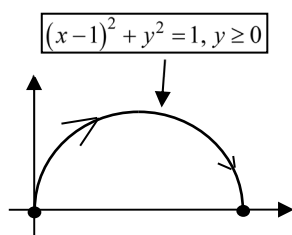
לכל מספר טבעי n נסמן $A_n = [0, \frac{1}{n}]^{k-1} \times [0, n]$, ונסמן גם $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

קבעו עבור אילו ערכים של k האינטגרל המוכלל $\int_A f$ מתכנס.

שאלה 5 (20 נקודות)

באיור מתוארת מסילה פשוטה φ שתמונתה $[0, \infty)^2 \cap S((1, 0); 1)$.

מוצא המסילה φ בראשית הצירים.



$$P(x, y) = \frac{y}{1+x+y} - y^3 \quad \text{יהיו:}$$

$$Q(x, y) = \frac{y}{1+x+y} + x^3 + \ln(1+x+y)$$

העזרו במשפט גרין ובהחלפת משתנים באינטגרל כפול וחשבו את האינטגרל: $\int_{\varphi} Pdx + Qdy$

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 10

מועד אחרון להגשה : 20.6.2025

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי S המשטח החלק משאלה 3 בממ"ן 13.

עבור כל $\alpha > 0$ מצאו את השטח של הקבוצה $K = S \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \infty))$.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי φ לולאה פשוטה שתמונתה : $\{(x, y, z) \in S(0^{[3]}; 2) \mid x + y + z = 3\}$

מצאו את המספר : $\left| \oint_{\varphi} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \right|$

(מומלץ להשתמש במשפט קלויין-סטוקס).

שאלה 3 (25 נקודות)

נסמן : $S = S^2(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times [3, 4])$

תהי $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ הנתונה עלידי : $(x, y, z) \mapsto (xe^{-z} + ye^z - y^3z, x^3z - xe^z + ye^{-z}, e^z \sin xy)$

נסמן ב- N נורמל יחידה רציף לספירה $S^2(0^{[3]}; 5)$ שפונה החוצה מהקבוצה $\bar{B}^3(0^{[3]}; 5)$.

א. חשבו את הרוטור $\nabla \times F$.

ב. חשבו את את האינטגרל המשטחי $\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2$ בעזרת משפט קלויין-סטוקס.

ג. חשבו שוב את האינטגרל $\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 -$ והפעם בעזרת משפט 20.1.10.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי $r > 0$, נסמן $S = S^{k-1}(0^{[k]}; r)$ ותהי $F: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ הפונקציה המוגדרת על ידי :

$$F: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1^3, \dots, x_k^3)$$

חשבו את האינטגרל $\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1}$ כאשר N הוא נורמל יחידה רציף למשטח על S הפונה החוצה

מהקבוצה $K = \bar{B}^k(0^{[k]}; r)$.

שאלה 5 (רשות – 0 נקודות)

חשבו את הנפח ה־ $(k+l)$ ־ממדי ואת המרכז הגיאומטרי של הקבוצה:

$$A = \left\{ x \in [0, \infty)^{k+l} \mid \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^{k+l} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

תוכלו להיעזר בידע על סימפלקסים ועל כדורים, בנוסחת Coarea בתוצאות משפט פוביני, ובפונקציות בטא וגמא.

▶▶▶ סוף המטלה