

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 10

מועד אחרון להגשה : 20.6.2025

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי S המשטח החלק משאלה 3 בממ"ן 13.

עבור כל $\alpha > 0$ מצאו את השטח של הקבוצה $K = S \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \infty))$.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי φ לולאה פשוטה שתמונתה : $\{(x, y, z) \in S(0^{[3]}; 2) \mid x + y + z = 3\}$

מצאו את המספר : $\left| \oint_{\varphi} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \right|$

(מומלץ להשתמש במשפט קלויין-סטוקס).

שאלה 3 (25 נקודות)

נסמן : $S = S^2(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times [3, 4])$

תהי $F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3$ הנתונה עלידי : $(x, y, z) \mapsto (xe^{-z} + ye^z - y^3z, x^3z - xe^z + ye^{-z}, e^z \sin xy)$

נסמן ב- N נורמל יחידה רציף לספירה $S^2(0^{[3]}; 5)$ שפונה החוצה מהקבוצה $\bar{B}^3(0^{[3]}; 5)$.

א. חשבו את הרוטור $\nabla \times F$.

ב. חשבו את את האינטגרל המשטחי $\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2$ בעזרת משפט קלויין-סטוקס.

ג. חשבו שוב את האינטגרל $\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 -$ והפעם בעזרת משפט 20.1.10.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי $r > 0$, נסמן $S = S^{k-1}(0^{[k]}; r)$ ותהי $F: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ הפונקציה המוגדרת על ידי :

$$F: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1^3, \dots, x_k^3)$$

חשבו את האינטגרל $\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1}$ כאשר N הוא נורמל יחידה רציף למשטח על S הפונה החוצה

מהקבוצה $K = \bar{B}^k(0^{[k]}; r)$.

שאלה 5 (רשות – 0 נקודות)

חשבו את הנפח ה־ $(k+l)$ ־ממדי ואת המרכז הגיאומטרי של הקבוצה:

$$A = \left\{ x \in [0, \infty)^{k+l} \mid \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^{k+l} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

תוכלו להיעזר בידע על סימפלקסים ועל כדורים, בנוסחת Coarea בתוצאות משפט פוביני, ובפונקציות בטא וגמא.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: חלק ב של 6\98\2024

(חלק א הוא שאלה 3 בממ"ן 13. כמוכן בבחינה הפרמטר הוגבל ל- $(\alpha \in (0, \frac{3}{2}))$).

אם $\alpha \geq 3$ אז $K \subseteq \{(0, 0, 3)\}$ ולכן $\sigma_2(K) = 0$.

אם $\frac{3}{2} \leq \alpha < 3$ אז $K = S((0, 0, 2); 1) \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \infty))$ ובעזרת מסקנה 10.ג.15:

$$\begin{aligned}\sigma_2(K) &= \sigma_2(\tau_{(0,0,-2)}(K)) \\ &= \sigma_2(S((0, 0, 0); 1) \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha - 2, \infty))) = 2\pi((2 - \alpha) + 1) = 2\pi(3 - \alpha)\end{aligned}$$

אם $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ אז $\sigma_2(K) = \sigma_2(K_1) + \sigma_2(K_2)$ כאשר: $K_1 = K \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \frac{3}{2}])$ לפי

$$K_2 = K \cap (\mathbf{R}^2 \times [\frac{3}{2}, \infty))$$

מה שקיבלנו עם $\alpha = \frac{3}{2}$ מתקיים:

$$\sigma_2(K_2) = 2\pi(3 - \frac{3}{2}) = 3\pi$$

לבסוף: $K_1 = G(g|_\Gamma)$ עם $\Gamma = \bar{B}((0, 0); \frac{\sqrt{3}}{2}) \setminus B((0, 0); \frac{\alpha}{\sqrt{3}})$ (הפונקציה g מפתרון

שאלה 3 מממ"ן 13) ומשאלה 10.ג.6 נקבל

$$\begin{aligned}\sigma_2(K_1) &= \sigma_2(G(g|_\Gamma)) = \iint_\Gamma \sqrt{|\nabla g|^2 + 1} = \iint_\Gamma \sqrt{3 + 1} = 2 \text{vol}_2 \Gamma \\ &= 2 \text{vol}_2 \bar{B}((0, 0); \frac{\sqrt{3}}{2}) - 2 \text{vol}_2 B((0, 0); \frac{\alpha}{\sqrt{3}}) = 2\pi \frac{3}{4} - 2\pi \frac{\alpha^2}{3} = (\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\alpha^2)\pi\end{aligned}$$

$$\sigma_2(K) = \sigma_2(K_1) + \sigma_2(K_2) = (\frac{3}{2} - \frac{2}{3}\alpha^2)\pi + 3\pi = (\frac{9}{2} - \frac{2}{3}\alpha^2)\pi \quad \text{ולכן:}$$

לשאלה 2: 6\85\2024. דומה במקצת לשאלה במטלת אופל (שם זה חיתוך מישור עם קובייה

במקום עם ספירה). החיתוך בין הספירה $S(0^{[3]}; 2)$ למישור

$$H = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 3\}$$

הוא מעגל. אפשר בדרכים שונות למצוא שזה מעגל שמרכזו $(1, 1, 1)$ ורדיוסו 1:

אם $(x, y, z) \in \{(x, y, z) \in S(0^{[3]}; 2) \mid x + y + z = 3\}$ אז:

$$\begin{aligned}|(x, y, z) - (1, 1, 1)|^2 &= (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) + (1 + 1 + 1) = 2^2 - 2 \cdot 3 + 3 = 1\end{aligned}$$

עבור $F: (x, y, z) \mapsto (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$ מתקיים

$$\nabla \times F(x, y, z) = -2(y + z, z + x, x + y)$$

אחד הנורמלים למשטח הוא $(1, 1, 1)$ ולכן נורמל יחידה רציף הוא $N = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

$$\nabla \times F \cdot N = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}(y+z, z+x, x+y) \cdot (1,1,1) = \mp \frac{4}{\sqrt{3}}(x+y+z) = \mp \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3 = \mp 4\sqrt{3} \quad \text{ולכן:}$$

$$\left| \oint_{\varphi} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \right| = \left| \iint_K \nabla \times F \cdot N d\sigma_2 \right| \quad \text{אז:}$$

$$= \left| \iint_K (\mp 4\sqrt{3}) d\sigma_2 \right| = 4\sqrt{3} \cdot \sigma_2(K) = 4\pi\sqrt{3}$$

כאשר $K = H \cap \bar{B}(0^{[3]}; 2)$ הוא עיגול ברדיוס 1 סביב $(1,1,1)$ במישור H .

במקור רציני שאלה יותר כללית (צירוף שאלה 3 ממך 13 והשאלה הנוכחית הן מקרה פרטי שלה):

נתונים פרמטרים $\alpha > 0$, $\beta \in (1,3)$ ו- $\gamma > 0$ וכן $k \geq 2$

$$S_1 = \{x = (x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^{k-1} \times (0, \beta] \mid x_1^2 + \dots + x_{k-1}^2 = \gamma x_k^2\} \quad \text{קבוצות:}$$

$$S_2 = (\mathbf{R}^{k-1} \times [\beta, \infty)) \times S^{k-1}(2e_k; 1)$$

$$S = S_1 \cup S_2$$

א. למצוא את β ו- γ עבורם S היא משטח על חלק.

ב. כאשר $k=3$ לחשב את $\sigma_2(K)$ עבור $K = S \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \infty))$ (עבור $k \neq 3$ אין בספר

נוסחה לנפח כיפה ספירית או חגורה ספירית, אלא רק לנפח הספירה כולה).

לשאלה 3: $2014 \setminus 417 = 2011 \setminus 217$.

סעיף א: חישוב מייגע של $\nabla \times F(x, y, z)$ לפי הגדרה 10.ה.17 נותן:

$$(xe^z \cos xy - x^3 + xe^z + ye^{-z}, -xe^{-z} + ye^z - y^3 - ye^z \cos xy, 3x^2z - 2e^z + 3y^2z)$$

סעיף ב: יש מיפויים שונים לתוך הספירה $S^2(0^{[3]}; 5)$ שתמונתם מכילה את S וכל

אחד מהם יכול לשמש אותנו. כיוון ש- S מוכלת כולה בחצי המרחב העליון נשתמש

למשל במיפוי: $h: B(0^{[2]}; 5) \rightarrow \mathbf{R}^3$

$$\omega \mapsto \left(\omega, \sqrt{25 - |\omega|^2} \right)$$

$$|h(\omega)| = \sqrt{|\omega|^2 + (25 - |\omega|^2)} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{לכל } \omega \in B(0^{[2]}; 5) \text{ מתקיים}$$

$$h(\omega) \in S(0^{[3]}; 5) \quad \text{ולכן}$$

אז $h(\omega) \in S$ אם ורק אם $3 \leq \sqrt{25 - |\omega|^2} \leq 4$ דהיינו $9 \leq 25 - |\omega|^2 \leq 16$ מה ששקול ל-

$$K = \bar{B}(0^{[2]}; 4) \setminus B(0^{[2]}; 3) \quad \text{כלומר } 16 \geq |\omega|^2 \geq 9 \text{ . נסמן:}$$

אז $h(\omega) \in S$ אם ורק אם $\omega \in K$, כלומר $S = h(K)$.

$$\partial K = S(0^{[2]}; 4) \cup S(0^{[2]}; 3) = \text{Im } \varphi_4 \cup \text{Im } \bar{\varphi}_3 \quad \text{אז}$$

$$\varphi_R : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{כאשר עבור } R > 0 \text{ נגדיר:}$$

$$t \mapsto R(\cos t, \sin t)$$

לפי דוגמה 9.ט.9 המסילה φ_R היא לולאה סדירה שהעיגול $\bar{B}(0^{[2]}; R)$ שוכן לשמאלה.

מכך נסיק ש- K שוכנת לשמאל הלולאה הסדירה φ_4 , ובעזרת שאלה 10.א.9 נסיק גם ש- K שוכנת לשמאל הלולאה הסדירה $\bar{\varphi}_3$. אם כך הקבוצה K יחד עם המסילות φ_4 ו- $\bar{\varphi}_3$ מקיימות יחד את הנחות משפט גרין (מינוח 14.ט.9).

כעת נוכל לקבוע לפי משפט קלויין-סטוקס (משפט 12.ה.10) יחד עם הסימון בהערה

$$10.ה.19 \text{ שמתקיים: } \iint_{h(K)} (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = \int_{h \circ \varphi_4} F \cdot d(x, y, z) + \int_{h \circ \bar{\varphi}_3} F \cdot d(x, y, z)$$

כדי להצדיק את הקביעה האחרונה יש לודא גם ש- N הוא נורמל היחידה הרציף שמשרה המיפוי h . לשם כך די לודא בנקודה אחת שהם מתלכדים (למשל בנקודה $(0, 0, 5)$ שניהם שווים ל- $(1, 0, 0)$).

$$\text{אם כך: } \iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = \int_{h \circ \varphi_4} F \cdot d(x, y, z) - \int_{h \circ \varphi_3} F \cdot d(x, y, z)$$

$$\text{נסמן } \psi_R = h \circ \varphi_R.$$

$$\text{אז: } \psi_R(t) = h \circ \varphi_R(t) = \left(\varphi_R(t), \sqrt{25 - |\varphi_R(t)|^2} \right) = \left(R \cos t, R \sin t, \sqrt{25 - R^2} \right)$$

$$\dot{\psi}_R(t) = (-R \sin t, R \cos t, 0)$$

$$\text{לנוחיות הכתיבה נסמן: } c = \sqrt{25 - R^2}.$$

$$\begin{aligned} F(\psi_R(t)) \cdot \dot{\psi}_R(t) &= R \cos t \left[F(\psi_R(t)) \right]_2 - R \sin t \left[F(\psi_R(t)) \right]_1 \\ &= R \cos t \left[F(R \cos t, R \sin t, c) \right]_2 - R \sin t \left[F(R \cos t, R \sin t, c) \right]_1 \\ &= R \cos t (cR^3 \cos^3 t - e^c R \cos t + e^{-c} R \sin t) \\ &\quad - R \sin t (e^{-c} R \cos t + e^c R \sin t - cR^3 \sin^3 t) \\ &= cR^4 (\cos^4 t + \sin^4 t) - e^c R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{h \circ \varphi_R} F \cdot d(x, y, z) &= \int_{\psi_R} F \cdot d(x, y, z) = \int_0^{2\pi} F(\psi_R(t)) \cdot \dot{\psi}_R(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (cR^4 (\cos^4 t + \sin^4 t) - e^c R^2) dt \\ &= cR^4 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt - 2\pi e^c R^2 \end{aligned}$$

$$1 = (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 = \cos^4 t + \sin^4 t + 2 \sin^2 t \cos^2 t \quad \text{נוכל לרשום}$$

$$\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - 2\sin^2 t \cos^2 t = 1 - \frac{1}{2}(2\sin t \cos t)^2 = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t \quad \text{ולכן:}$$

$$\cos 4t = 1 - 2\sin^2 2t \Rightarrow \sin^2 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t \quad \text{כמוכן}$$

$$\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t \quad \text{ולכן}$$

ומקבלים

$$\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t\right) dt = \frac{3}{4} \cdot 2\pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 4t dt = \frac{3}{2}\pi + 0 = \frac{3}{2}\pi$$

$$\int_{h \circ \varphi_R} F \cdot d(x, y, z) = \frac{3}{2}\pi c R^4 - 2\pi e^c R^2 = \frac{3}{2}\pi R^4 \sqrt{25 - R^2} - 2\pi e^{\sqrt{25 - R^2}} R^2 \quad \text{ולכן:}$$

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 &= \int_{h \circ \varphi_4} F \cdot d(x, y, z) - \int_{h \circ \varphi_3} F \cdot d(x, y, z) \\ &= \left(\frac{3}{2}\pi \cdot 3 \cdot 4^4 - 2\pi e^3 4^2\right) - \left(\frac{3}{2}\pi \cdot 4 \cdot 3^4 - 2\pi e^4 3^2\right) \\ &= 666\pi - 32\pi e^3 + 18\pi e^4 \end{aligned} \quad \text{לבסוף:}$$

סעיף ג:

$$K = \bar{B}(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times [3, 4]) \quad \text{נסמן:}$$

$$S_1 = S(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times (3, 4)) \quad \text{וכן:}$$

$$S_2 = B(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{4\}) = B(0^{[2]}; 3) \times \{4\}$$

$$S_3 = B(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{3\}) = B(0^{[2]}; 4) \times \{3\}$$

$$\tilde{S}_1 = S(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{4\}) = S(0^{[2]}; 3) \times \{4\}$$

$$\tilde{S}_2 = S(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{3\}) = S(0^{[2]}; 4) \times \{3\}$$

הקבוצה K היא סגורה, חסומה ובעלת נפח ב- $\mathbf{R}^3$. הקבוצות $\tilde{S}_1$ ו- $\tilde{S}_2$ הן יריעות

חלקות חד-ממדיות (תמונות הלולאות ψ_3 ו- ψ_4 מפתרון סעיף ב).

הקבוצה $U_1 = \mathbf{R}^2 \times (3, 4)$ היא קבוצה פתוחה.

הפונקציה $f_1: (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 25$ גזירה ברציפות ב- U_1 .

מתקיים $\nabla f_1(x, y, z) = 2(x, y, z) \neq 0^{[3]}$ עבור כל $(x, y, z) \in S_1$, וכן מתקיים:

$$\{(x, y, z) \in U_1 \mid f_1(x, y, z) \leq 0\} = K \cap U_1$$

$$\{(x, y, z) \in U_1 \mid f_1(x, y, z) = 0\} = S_1 \cap U_1$$

העובדה ש- S_1 בעלת שטח מוכלל מתקבלת מכך שהיא תמונת $B(0^{[2]}; 4) \setminus \bar{B}(0^{[2]}; 3)$

תחת המיפוי h מפתרון סעיף ב, כלומר תמונת קבוצה בעלת שטח תחת מיפוי זה.

משאלה 4.10.10 מקבלים ש- $\frac{1}{5}(x, y, z)$ $\nabla f_1(x, y, z) = \frac{1}{|\nabla f_1(x, y, z)|}$ $N_1: (x, y, z) \mapsto$ היא

נורמל יחידה רציף למשטח S_1 שפונה החוצה מ־ K .

לפי דוגמה 3.1.10 $N(x) = N_1(x)$ לכל $x \in S_1$.

הקבוצה $U_2 = B(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times (3, \infty))$ היא קבוצה פתוחה.

הפונקציה $f_2 : (x, y, z) \mapsto z - 4$ גזירה ברציפות ב־ U_2 .

מתקיים $0^{[3]} \neq \nabla f_2(x, y, z) = (0, 0, 1)$ עבור כל $(x, y, z) \in S_2$, וכן מתקיים:

$$\{(x, y, z) \in U_2 \mid f_2(x, y, z) \leq 0\} = K \cap U_2$$

$$\{(x, y, z) \in U_2 \mid f_2(x, y, z) = 0\} = S_2 \cap U_2$$

העובדה ש־ S_2 בעלת שטח מוכלל מתקבלת מכך שהיא תמונת $B(0^{[2]}; 3)$ תחת המיפוי

$h_2 : \omega \mapsto (\omega, 4)$, כלומר תמונת קבוצה בעלת שטח תחת מיפוי זה.

משאלה 4.1.10 מקבלים ש־ $\nabla f_2(x, y, z) = (0, 0, 1) \neq 0^{[3]}$ $N_2 : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{|\nabla f_2(x, y, z)|}$ היא נורמל

יחידה רציף למשטח S_2 שפונה החוצה מ־ K .

הקבוצה $U_3 = B(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times (-\infty, 4))$ היא קבוצה פתוחה.

הפונקציה $f_3 : (x, y, z) \mapsto 3 - z$ גזירה ברציפות ב־ U_3 .

מתקיים $0^{[3]} \neq \nabla f_3(x, y, z) = (0, 0, -1)$ עבור כל $(x, y, z) \in S_3$, וכן מתקיים:

$$\{(x, y, z) \in U_3 \mid f_3(x, y, z) \leq 0\} = K \cap U_3$$

$$\{(x, y, z) \in U_3 \mid f_3(x, y, z) = 0\} = S_3 \cap U_3$$

העובדה ש־ S_3 בעלת שטח מוכלל מתקבלת מכך שהיא תמונת $B(0^{[2]}; 4)$ תחת המיפוי

$h_2 : \omega \mapsto (\omega, 3)$, כלומר תמונת קבוצה בעלת שטח תחת מיפוי זה.

משאלה 4.1.10 מקבלים ש־ $\nabla f_3(x, y, z) = (0, 0, -1) \neq 0^{[3]}$ $N_3 : (x, y, z) \mapsto \frac{1}{|\nabla f_3(x, y, z)|}$ היא

נורמל יחידה רציף למשטח S_3 שפונה החוצה מ־ K .

בעזרת שאלה 27.א.2 נוכל לבדוק ש־ $\partial K \subseteq S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$. אז ממשפט

$$\iiint_K \nabla \cdot (\nabla \times F) = \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i} (\nabla \times F) \cdot N_i d\sigma_2 \quad \text{20.1.10 נובע שמתקיים:}$$

$$\iiint_K \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 \quad \text{מחלק ב של שאלה 20.ה.10 נקבל ש־} \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0 \text{ ולכן גם:}$$

הקבוצה $\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$ היא שולי הקבוצה S ב־ $B(0^{[3]}; 5)$ ומתקיים $S = S_1 \cup \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$ ו־

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot N_1 d\sigma_2 \quad \text{ומכאן אפשר להסיק ש:} \quad N = N_1$$

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = -\iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot N_2 d\sigma_2 - \iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot N_3 d\sigma_2 \quad \text{אז:}$$

$$\iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot N_2 d\sigma_2 = \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot (0, 0, 1) d\sigma_2 = \iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 \quad \text{כעת}$$

$$\iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot N_2 d\sigma_2 = \iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot (0, 0, -1) d\sigma_2 = -\iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 \quad \text{וכן}$$

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = -\iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 + \iint_{S_3} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 \quad \text{ולכן}$$

$$[(\nabla \times F)]_3(x, y, z) = 3x^2z - 2e^z + 3y^2z \quad \text{נזכר שלפי פתרון סעיף א:}$$

המשטח S_2 הוא הגרף של צמצום הפונקציה הקבועה $4 \mapsto (x, y)$ לעיגול $B(0^{[2]}; 3)$.

הגרדיאנט של הפונקציה הקבועה הוא 0, ולפי שאלה 6.10 ג.17 (או טענה 17.10 ג.17):

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 &= \iint_{B(0^{[2]}; 3)} [(\nabla \times F)]_3(x, y, 4) dx dy \\ &= \iint_{B(0^{[2]}; 3)} (12x^2 - 2e^4 + 12y^2) dx dy \\ &= 12 \iint_{B(0^{[2]}; 3)} (x^2 + y^2) dx dy - 2e^4 \text{vol}_2(B(0^{[2]}; 3)) \\ &= 12 \iint_{[0, 3] \times [0, 2\pi]} r^3 dr d\theta - 2e^4 \pi 3^2 = 12 \cdot 2\pi \int_0^3 r^3 dr - 18\pi e^4 \\ &= 24\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^3 - 18\pi e^4 = 24\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 18\pi e^4 = 6 \cdot 3^4 \pi - 18\pi e^4 \end{aligned}$$

המשטח S_3 הוא הגרף של צמצום הפונקציה הקבועה $3 \mapsto (x, y)$ לעיגול $B(0^{[2]}; 4)$.

הגרדיאנט של הפונקציה הקבועה הוא 0, ולפי שאלה 6.10 ג.17 (או טענה 17.10 ג.17):

$$\begin{aligned}
\iint_{S_3} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 &= \iint_{B(0^{[2]};4)} [(\nabla \times F)]_3(x,y,3) dx dy \\
&= \iint_{B(0^{[2]};4)} (9x^2 - 2e^3 + 9y^2) dx dy \\
&= 9 \iint_{B(0^{[2]};4)} (x^2 + y^2) dx dy - 2e^3 \text{vol}_2(B(0^{[2]};4)) \\
&= 9 \iint_{[0,4] \times [0,2\pi]} r^3 dr d\theta - 2e^3 \pi 4^2 = 9 \cdot 2\pi \int_0^4 r^3 dr - 32\pi e^3 \\
&= 18\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^4 - 32\pi e^3 = 18\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 4^4 - 32\pi e^3 = 18 \cdot 4^3 \pi - 32\pi e^3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 &= -\iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 + \iint_{S_3} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 \quad \text{אז:} \\
&= -(6 \cdot 3^4 \pi - 18\pi e^4) + (18 \cdot 4^3 \pi - 32\pi e^3) \\
&= 666\pi + 18\pi e^4 - 32\pi e^3
\end{aligned}$$

לשאלה 4: לפי דוגמה 3.1.10 נורמל יחידה רציף לספירה שמרכזה בראשית סביב הראשית שפונה

החוצה מהכדור באותו רדיוס הוא $N: x \mapsto \frac{1}{r}x$. לכל $x \in S$ מתקיים

$$\begin{aligned}
F(x) \cdot N(x) &= (x_1^3, \dots, x_k^3) \cdot \frac{1}{r}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{r}(x_1^4 + \dots + x_k^4) \\
\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} &= \frac{1}{r} \int_S (x_1^4 + \dots + x_k^4) d\sigma_{k-1} \quad \text{ולכן:}
\end{aligned}$$

דרך אחת לחשב את האינטגרל הזה, ובאופן כללי יותר לחשב עבור כל $c > 0$ את

$$I = \int_S (|x_1|^c + \dots + |x_k|^c) d\sigma_{k-1} \quad \text{האינטגרל}$$

היא ראשית משיקולי סימטריה (בעזרת חלק ה של שאלה 23.1.10 עם הפונקציה

$$I = k \int_S |x_k|^c d\sigma_{k-1} \quad \text{לקבל } (\Lambda: (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k))$$

ואז (בעזרת אותה שאלה עם $(\Lambda: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, -x_k))$ לקבל

$$I = 2k \int_{S \cap (\mathbf{R}^{k-1} \times [0, \infty))} |x_k|^c d\sigma_{k-1} = 2k \int_{G(g)} |x_k|^c d\sigma_{k-1}$$

$$g: \bar{B}^{k-1}(0^{[k-1]}; r) \rightarrow \mathbf{R} \quad \text{עם:}$$

$$x \mapsto \sqrt{r^2 - |x|^2}$$

את האינטגרל הזה אפשר להמיר בעזרת שאלה 17.1.10 באינטגרל מרובה שאותו אפשר

לחשב בעזרת נוסחת Coarea (20.1.10) שמובילה (לאחר שימוש בנוסחת "שטח-על" של

ספירה מדוגמה 22.1.10) לאינטגרל על הקטע $[0, r]$ שניתן לחישוב תוך שימוש

בפונקציית בטא (דוגמה 9.13.13). חישוב זה גם מודגם (עם $k = 5$) בשאלה במטלת

אופל 10. אבל במקרה שלנו ($c = 4$) יש גם דרך אחרת באמצעות משפט הדיברגנץ.

$$\nabla \cdot F : x \mapsto 3x_1^2 + \dots + 3x_k^2 = 3|x|^2 \quad \text{מתקיים}$$

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \int_K \nabla \cdot F = 3 \int_{\bar{B}^k(0^{[k]}; r)} |x|^2 \quad \text{וממשפט הדיברגנץ (משפט 12.1.10):}$$

כעת נשתמש בנוסחה משאלה 23.ג.10 עם הפונקציה $\varphi : t \mapsto t^2$ ונקבל:

$$\int_K |x|^2 = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r t^2 t^{k-1} dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r t^{k+1} dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot \frac{r^{k+2}}{k+2}$$

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \frac{6}{k+2} \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot r^{k+2} \quad \text{ולסיכום:}$$

ליתר דיוק, השימוש דלעיל בנוסחה משאלה 23.ג.10 נעשה כך:

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{נבחר סדרה כלשהי של מספרים חיוביים ששואפת לאפס, למשל:}$$

$$K_n = \bar{B}(0^{[k]}; r) \setminus B(0^{[k]}; \alpha_n) \quad \text{נסמן:}$$

אז K_n סדרה עולה של קבוצות סגורות וחסומות ובעלות נפח k -ממדי שעולה לקבוצה

$$\int_{K_n} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_K |x|^2 \quad \text{ולפי טענה 32.ה.9: } K \setminus \{0^{[k]}\}$$

מצד שני, לכל $n > \frac{1}{r}$ מתקיים $0 < \alpha_n < r$ ולפי שאלה 23.ג.10 (עם $\varphi : t \mapsto t^2$):

$$\int_{K_n} |x|^2 = \int_{K_n} \varphi(|x|) = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_{\alpha_n}^r \varphi(t) t^{k-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r \varphi(t) t^{k-1} dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r t^{k+1} dt$$

לשאלה 5: זאת הכללה לממדים כלליים של שאלה 2 מממ"ן 15.

בחישוב שלהלן הלכתי בדרך טיפה שונה וקצת נתקעתי בסוף...

$$A_y = \{x \mid (x, y) \in A\} = \left\{x \in [0, \infty)^k \mid \sum_{i=1}^k x_i \leq 1 - |y|^2\right\} \quad \text{נסמן כמו במסקנה 26.1.9:}$$

$$\tilde{A} = \{y \mid A_y \neq \emptyset\} = \bar{B}^l(0^{[l]}; 1) \cap [0, \infty)^l \quad \text{אז}$$

$$A_y = \Delta_k(1 - |y|^2) \quad \text{ועבור } y \in \tilde{A} \text{ מתקיים:}$$

לכל פונקציה f שהיא אינטגרלית ב- A (ובפרט כזאת שרציפה בה) מתקיים:

$$\int_A f(x, y) dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} \left(\int_{A_y} f(x, y) dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l$$

עם הפונקציה הקבועה $f : (x, y) \mapsto 1$ נקבל:

$$\begin{aligned}\text{vol}_{k+l} A &= \int_{\bar{A}} \text{vol}_k A_y dy_1 \cdots dy_l = \int_{\bar{A}} \text{vol}_k \Delta_k (1-|y|^2) dy_1 \cdots dy_l \\ &= \frac{1}{k!} \int_{\bar{B}(0^{[l]};1) \cap [0,\infty)^l} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l\end{aligned}$$

$$\text{vol}_{k+l} A = \frac{1}{2^l k!} \int_{\bar{B}(0^{[l]};1)} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l \quad \text{מטעמי סימטריה נוכל להסיק:}$$

כעת נוכל להסיק בעזרת המסקנה מנוסחת Coarea שבשאלה 23.ג.10:

$$\int_{\bar{B}(0^{[l]};1)} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^k t^{l-1} dt$$

את האינטגרל האחרון נחשב בעזרת החלפת משתנים ופונקציית בטא. נציב $z = t^2$ ובהתאם $dz = 2t dt$ ונקבל:

$$\int_0^1 (1-t^2)^k t^{l-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^k z^{\frac{l}{2}-1} dz = \frac{1}{2} B\left(\frac{l}{2}, k+1\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{l}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}$$

$$\text{vol}_{k+l} A = \frac{1}{2^l k!} \cdot \frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2})} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\Gamma(\frac{l}{2})\Gamma(k+1)}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)} = \frac{1}{2^l} \cdot \frac{\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)} \quad \text{אז:}$$

עם $f: (x, y) \mapsto x_i$ נקבל, תוך שימוש בתשובה לשאלה 37.ו.9:

$$\begin{aligned}\int_A x_i dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l &= \int_A \left(\int_{A_y} x_i dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l \\ &= \int_A \left(\int_{\Delta_k(1-|y|^2)} x_i dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l \\ &= \frac{1}{(k+1)!} \int_{\bar{B}(0^{[l]};1) \cap [0,\infty)^l} (1-|y|^2)^{k+1} dy_1 \cdots dy_l\end{aligned}$$

והחישובים דלעיל עם k מוחלף ב- $k+1$ נותנים:

$$\int_A x_i dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l = \frac{1}{2^l} \cdot \frac{\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+2)}$$

$$\frac{\int_A x_i dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l}{\text{vol}_{k+l} A} = \frac{\frac{1}{2^l} \cdot \frac{\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+2)}}{\frac{1}{2^l} \cdot \frac{\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}} = \frac{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+2)} = \frac{1}{\frac{l}{2}+k+1} \quad \text{אז עבור}$$

עבור $i = k+1, \dots, k+l$ השיעור ה- i של המרכז הגיאומטרי של A הוא:

$$\frac{\int_A x_i dx_1 \cdots dx_{k+l} dy_1 \cdots dy_l}{\text{vol}_{k+l} A} = \frac{\int_A y_{i-k} dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l}{\text{vol}_{k+l} A}$$

נסמן $j = i - k$ ונחשב את המונה. כאן החישוב הוא בעזרת $f: (x, y) \mapsto y_j$:

$$\begin{aligned} \int_A y_j dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l &= \int_{\tilde{A}} \left(\int_{A_y} y_j dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} \left(y_j \int_{A_y} 1 dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l \\ &= \int_{\tilde{A}} (y_j \text{vol}_k A_y) dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} (y_j \text{vol}_k \Delta_k (1 - |y|^2)) dy_1 \cdots dy_l \\ &= \frac{1}{k!} \int_{\bar{B}(0^{[l]}; 1) \cap [0, \infty)^l} y_j (1 - |y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l \end{aligned}$$

כאן איאפשר לעשות אותו שיקול סימטריה שהיה בחישוב הנפת, שהרחיב את החישוב

לכדור, כי הסימן של y_j משתנה בחלקים שונים של הכדור $B(0^{[l]}; 1)$. נוכל בעזרת

שיקולי סימטריה להרחיב את החישוב לחצי כדור, וגם להסיק שאין הבדל בערך

שיתקבל עבור j ים שונים, ולכן נניח בה"כ $j = l$ ונוכל לנצל את חישוב המרכז

הגיאומטרי של חצי כדור בדוגמה 36.1.9. בסימוני דוגמה 36.1.9:

$$C_l(r) = B(0^{[l]}; r) \cap (\mathbf{R}^{l-1} \times (0, \infty))$$

משיקולי סימטריה:

.....

בעצם אני מעדיף כאן לחזור לטענה 26.1.9 ולהחליף את התפקידים בין x ו- y ,

ולהשתמש בצורה שונה בנוסחת Coarea.....