

מתווה לפתרון ממ"ן 16

סמסטר : 2025

הקורס : 2024 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 10

שאלה 1 (25 נקודות)

יהי S המשטח החלק משאלה 3 בממ"ן 13.

עבור כל $\alpha > 0$ מצאו את השטח של הקבוצה $K = S \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \infty))$.

פתרון

הנתונים משאלה 3 בממ"ן 13 הם :

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \left(0, \frac{3}{2}\right) \mid z^2 = 3x^2 + 3y^2 \right\}$$

$$S_2 = \left(\mathbf{R}^2 \times \left[\frac{3}{2}, \infty\right) \right) \cap S((0, 0, 2); 1)$$

ו- $S = S_1 \cup S_2$, והוכח בפתרון ממ"ן 13 שהקבוצה S היא משטח חלק.

אם $\alpha \geq 3$ אז $K \subseteq \{(0, 0, 3)\}$ (ודאו זאת) ולכן $\sigma_2(K) = 0$.

אם $\frac{3}{2} \leq \alpha < 3$ אז $K \cap S_1 = \emptyset$ ולכן :

$$K = S((0, 0, 2); 1) \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \infty))$$

מחלק ה של שאלה 10.ב.23 עם ההזזה $\Lambda = \tau_{(0,0,-2)} : (x, y, z) \mapsto (x, y, z - 2)$ נקבל

$$\sigma_2(K) = \sigma_2(\tau_{(0,0,-2)}(K)) = \sigma_2(S((0, 0, 0); 1) \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha - 2, \infty)))$$

$$\sigma_2(S((0, 0, 0); 1) \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha - 2, \infty))) = 2\pi((2 - \alpha) + 1) = 2\pi(3 - \alpha) \quad \text{וממסקנה 10.ג.15}$$

ולכן אם $\frac{3}{2} \leq \alpha < 3$ אז :

$$\sigma_2(K) = 2\pi(3 - \alpha)$$

אם $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ אז $\sigma_2(K) = \sigma_2(K_1) + \sigma_2(K_2)$ כאשר :

$$K_1 = K \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \frac{3}{2}])$$

$$K_2 = K \cap (\mathbf{R}^2 \times [\frac{3}{2}, \infty))$$

לפי מה שקיבלנו עבור $\alpha = \frac{3}{2}$ מתקיים :

$$\sigma_2(K_2) = 2\pi(3 - \frac{3}{2}) = 3\pi$$

כמוכן מתקיים

$$K_1 = S \cap (\mathbf{R}^2 \times [\alpha, \frac{3}{2}]) = G(g|_\Gamma)$$

עם $\Gamma = \bar{B}((0, 0); \frac{\sqrt{3}}{2}) \setminus B((0, 0); \frac{\alpha}{\sqrt{3}})$ והפונקציה :

$$g : (x, y) \mapsto \sqrt{3x^2 + 3y^2}$$

לכל $(x, y) \in \Gamma$ מתקיים :

$$\nabla g(x, y) = \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + 3y^2}}(6x, 6y) = \sqrt{3} \cdot \frac{1}{|(x, y)|}(x, y) \Rightarrow |\nabla g(x, y)| = \sqrt{3}$$

משאלה 10.ג.6 נקבל :

$$\sigma_2(K_1) = \sigma_2(G(g|_\Gamma)) = \iint_\Gamma \sqrt{|\nabla g|^2 + 1} = \iint_\Gamma \sqrt{3 + 1} = 2 \text{vol}_2 \Gamma$$

כמוכן

$$\text{vol}_2 \Gamma = \text{vol}_2 \bar{B}((0, 0); \frac{\sqrt{3}}{2}) - \text{vol}_2 B((0, 0); \frac{\alpha}{\sqrt{3}}) = \pi \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 - \pi \left(\frac{\alpha}{\sqrt{3}}\right)^2 = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\alpha^2\right)\pi$$

ולכן אם $0 < \alpha < \frac{3}{2}$ אז :

$$\sigma_2(K) = \sigma_2(K_1) + \sigma_2(K_2) = 2\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\alpha^2\right)\pi + 3\pi = \left(\frac{9}{2} - \frac{2}{3}\alpha^2\right)\pi$$

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי φ לולאה פשוטה שתמונתה: $\{(x, y, z) \in S(0^{[3]}; 2) \mid x + y + z = 3\}$

מצאו את המספר: $\left| \oint_{\varphi} (y^2 - z^2) dx + (z^2 - x^2) dy + (x^2 - y^2) dz \right|$

(מומלץ להשתמש במשפט קלויין-סטוקס).

פתרון

הקבוצה $\text{Im } \varphi = \{(x, y, z) \in S(0^{[3]}; 2) \mid x + y + z = 3\}$ היא החיתוך בין הספירה $S(0^{[3]}; 2)$

והמישור $H = \{(x, y, z) \mid x + y + z = 3\}$

ולכן היא מעגל. מכל מיני טעמים אפשר להבין שמרכז המעגל הוא הנקודה $(1, 1, 1)$ (למשל כי לפי

הנתון בברור הפונקציה $(x, y, z) \mapsto (y, z, x)$ היא העתקת חפיפה שמעבירה את המעגל הזה לעצמו,

ולכן גם את מרכז המעגל לעצמו, ולכן מרכז המעגל הוא נקודה (x, y, z) המקיימת $x = y = z$ וגם

$x + y + z = 3$. ביתר פירוט: נסמן $c = (1, 1, 1)$. לנקודה $a = (x, y, z) \in H$ מתקיים:

$$\begin{aligned} |a - c|^2 &= |(x, y, z) - (1, 1, 1)|^2 = (x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 \\ &= x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 + z^2 - 2z + 1 \\ &= (x^2 + y^2 + z^2) - 2(x + y + z) + (1 + 1 + 1) = (x^2 + y^2 + z^2) - 2 \cdot 3 + 3 = |a|^2 - 3 \end{aligned}$$

נקודה $a \in H$ שייכת למעגל במישור H שמרכזו c ורדיוסו 1 אם ורק אם $|a|^2 - 3 = |a - c|^2 = 1$

כלומר אם ורק אם $|a|^2 = 4$ ובאופן שקול $|a| = 2$, כלומר אם ורק אם $a \in S(0^{[3]}; 2)$. לכן מעגל זה

הוא $H \cap S(0^{[3]}; 2) = \text{Im } \varphi$. באופן דומה $a \in H$ שייכת לעיגול הסגור במישור H שמרכזו c

ורדיוסו 1 אם ורק אם $|a|^2 - 3 = |a - c|^2 \leq 1$ כלומר אם ורק אם $|a|^2 \leq 4$ ובאופן שקול $|a| \leq 2$,

כלומר אם ורק אם $a \in \bar{B}(0^{[3]}; 2)$. לכן העיגול הסגור הזה הוא $H \cap \bar{B}(0^{[3]}; 2)$.

המספר המבוקש בשאלה הוא $\left| \oint_{\varphi} F \cdot d(x, y, z) \right|$ עם: $F : (x, y, z) \mapsto (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$

אנו נרצה להשתמש במשפט קלויין-סטוקס (משפט 12.ה.10, בניסוח שכלול בהערה 19.ה.10), עם

$h(K)$ שהיא העיגול ב- H שמרכזו $(1, 1, 1)$ ורדיוסו 1. שולי עיגול זה ב- H הם: $\partial_H(h(K)) = \text{Im } \varphi$

אחד הנורמלים למישור H הוא $(1, 1, 1)$, ולכן נורמל יחידה רציף ל- H הוא: $N = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}(1, 1, 1)$

מתקיים $\nabla \times F(x, y, z) = -2(y + z, z + x, x + y)$

ולכן: $\nabla \times F \cdot N = \mp \frac{2}{\sqrt{3}}(y + z, z + x, x + y) \cdot (1, 1, 1) = \mp \frac{4}{\sqrt{3}}(x + y + z) = \mp \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot 3 = \mp 4\sqrt{3}$

העובדה ששטח עיגול שרדיוסו 1 הוא π יחד משפט קלויין-סטוקס יתנו שהמספר המבוקש הוא :

$$\left| \oint_{\varphi} F \cdot d(x, y, z) \right| = \left| \iint_{h(K)} \nabla \times F \cdot N d\sigma_2 \right| = \left| \iint_{h(K)} (\mp 4\sqrt{3}) d\sigma_2 \right| = 4\sqrt{3} \cdot \sigma_2(h(K)) = 4\pi\sqrt{3}$$

כדי להצדיק את השימוש במשפט קלויין-סטוקס נוכל למשל להשתמש במיפוי $(\mathbb{R}^2, h)$ המוגדר על

$$h: (x, y) \mapsto (x, y, 3 - x - y) \quad \text{ידי:}$$

תמונת המיפוי היא $h(\mathbb{R}^2) = H$. מתקיים $h(x, y) \in \text{Im } \varphi$ אם ורק אם $(x, y, 3 - x - y) \in S(0^{[3]}; 2)$

$$x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2 = 2^2 \quad \text{כלומר אם ורק אם}$$

קבוצת הנקודות האלה היא בדיוק תמונת הלולאה הפשוטה $\varphi_1 = h^{-1} \circ \varphi$.

$$K = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 + (3 - x - y)^2 \leq 2^2\} \quad \text{הקבוצה}$$

היא קבוצה סגורה וחסומה ששפתה בדיוק תמונת הלולאה φ_1 . אפשר גם לראות שמתקיים

$$K = \{(x, y) \mid h(x, y) \in \bar{B}(0^{[3]}; 2)\}$$

ולכן $h(K) = H \cap \bar{B}(0^{[3]}; 2)$ היא בדיוק העיגול שמתקבל מחיתוך העיגול הסגור $\bar{B}(0^{[3]}; 2)$ עם

המישור H , ששוליו ב- H היא הקבוצה הנתונה כתמונת הלולאה φ .

תוכלו לבדוק את כל הפרטים האלה, ולסיים את ההוכחה, כמעט. למה רק כמעט? אנו הוכחנו ששטח עיגול שרדיוסו r במישור האוקלידי $\mathbb{R}^2$ הוא πr^2 (דוגמה 31.1.9), אך לא הוכחנו ששטח עיגול שרדיוסו r במישור במרחב האוקלידי $\mathbb{R}^3$ גם הוא πr^2 . אשתמש במיפוי אחר למישור H שיאפשר לקבל די בקלות את שטח העיגול. הרעיון הוא לבנות מיפוי $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow H$ על ידי כך שנעביר את וקטורי הבסיס הסטנדרטי e_1 ו- e_2 לבסיס אורתונורמלי של מישור דרך הראשית המקביל למישור H , ועל זה נרכיב הזזה שתעביר את הראשית $(0, 0)$ לנקודה $c = (1, 1, 1)$ שנמצאת ב- H . זאת פונקציה שומרת מרחקים ולכן היא תעביר את עיגול היחידה ב- $\mathbb{R}^2$ לעיגול ברדיוס 1 סביב c במישור H .

המישור המקביל ל- H דרך ראשית הצירים $(0, 0, 0)$ הוא:

$$\{(x, y, z) \mid x + y + z = 0\} \quad \text{בסיס אורתונורמלי למישור זה הוא למשל } \{u, v\} \text{ עם:}$$

$$u = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, -1, -1)$$

$$v = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -1)$$

(הוא מתקבל למשל מהפעלת תהליך גרם-שמידט על סדרת הוקטורים (c, e_1, e_2)).

$$h: (s, t) \mapsto c + su + tv \quad \text{נגדיר אפוא את } h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \text{ על ידי:}$$

זאת פונקציה אפינית שתמונתה היא מישור אפיני (כי u ו- v בלתי-לויים לינארית). תמונת h

מוכלת במישור האפיני $H = \{x \mid c \cdot x = 3\}$ כי לכל $(s, t) \in \mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$c \cdot h(s, t) = c \cdot (c + su + tv) = c \cdot c + sc \cdot u + tc \cdot v = 3 + s \cdot 0 + t \cdot 0 = 3$$

מצד שני אם $x \in H$ אז $c \cdot x = 3 = c \cdot c$ ולכן $(x - c) \cdot c = x \cdot c - c \cdot c = 3 - 3 = 0$, כלומר $x - c \perp c$ ולכן

$$x - c \in (Sp\{c\})^\perp = Sp\{u, v\} \quad \text{ולכן יש } s, t \in \mathbb{R} \text{ כך ש- } x - c = su + tv, \text{ ולכן: } x = c + su + tv = h(s, t)$$

אז H מוכל בתמונת h ולכן תמונת h היא המישור האפייני H . מטריצת היעקוביאן $Jh_{(s,t)}$ היא

מטריצה 3×2 שעמודותיה הן u^T ו- v^T (ראו דוגמה 8.1.3). העמודות בלתי-תלויות לינארית ולכן דרגת מטריצת היעקוביאן היא 2, ולכן h הוא מיפוי מלא למישור H .

$$|h(s,t)|^2 = |c + su + tv|^2 = |c|^2 + s^2|u|^2 + t^2|v|^2 + 2sc \cdot u + 2tc \cdot v + 2stu \cdot v = 3 + s^2 + t^2 \quad \text{מתקיים:}$$

$$h(s,t) \in H \cap \bar{B}(0^{[3]}; 2) \Leftrightarrow |h(s,t)| \leq 2 \Leftrightarrow |h(s,t)|^2 \leq 4 \quad \text{ולכן:}$$

$$\Leftrightarrow 3 + s^2 + t^2 \leq 4 \Leftrightarrow s^2 + t^2 \leq 1 \Leftrightarrow (s,t) \in \bar{B}(0^{[2]}; 1)$$

$$h(A) = H \cap \bar{B}(0^{[3]}; 2) \quad \text{נסמן } A = \bar{B}(0^{[2]}; 1) \text{ קיבלנו:}$$

$$\sigma_2(H \cap \bar{B}(0^{[3]}; 2)) = \sigma_2(h(A)) = \iint_A |v_h| \quad \text{לפי טענה 1.ג.10 מתקיים}$$

$$v_h = u \times v = \frac{1}{\sqrt{6}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot (2, -1, -1) \times (0, 1, -1) = \frac{1}{2\sqrt{3}} (2, 2, 2) = \frac{1}{\sqrt{3}} (1, 1, 1) \quad \text{כאשר:}$$

$$\sigma_2(H \cap \bar{B}(0^{[3]}; 2)) = \iint_A |v_h| = \iint_A 1 = \text{vol}_2 A = \pi \quad \text{אז } |v_h| = 1 \text{ ומכאן:}$$

הערה: תוכלו באופן דומה להראות שעם H הוא תת-מרחב אפייני d -ממדי של $\mathbb{R}^k$ אז נפח כדור

$$d\text{-ממדי שרדיוסו } r \text{ ב-} H \text{ שווה לנפח כדור שרדיוסו } r \text{ ב-} \mathbb{R}^d, \text{ שלפי דוגמה 31.1.9 הוא: } \frac{\pi^{\frac{d}{2}}}{\Gamma(\frac{d}{2})} r^d$$

אפשר גם להראות שאם $d < k$ ו- $h: \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^k$ היא פונקציה שומרת מרחקים אז תמונת h היא תת-מרחב אפייני d -ממדי של $\mathbb{R}^k$, ואם A היא קבוצה סגורה וחסומה ובעלת נפח d -ממדי

$$\text{ב-} \mathbb{R}^d, \text{ אז } h(A) \text{ היא קבוצה סגורה וחסומה ובעלת נפח } d\text{-ממדי ב-} \mathbb{R}^k \text{ וכן: } \sigma_d(h(A)) = \text{vol}_d A$$

כמוכן עבור אותה h אם $0 < r < d$ ו- S היא יריעה חלקה r -ממדית ב- $\mathbb{R}^d$ אז $h(S)$ היא יריעה

$$\text{חלקה } r\text{-ממדית ב-} \mathbb{R}^k \text{ ולכל קבוצה סגורה וחסומה ובעלת נפח } r\text{-ממדי } K \text{ שמוכלת ב-} S \text{ הקבוצה } h(K) \text{ היא קבוצה סגורה וחסומה ובעלת נפח } r\text{-ממדי שמוכלת ב-} h(S) \text{ וכן: } \sigma_r(h(K)) = \sigma_r(K)$$

שאלה 3 (25 נקודות)

$$S = S^2(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times [3, 4]) \quad \text{נסמן:}$$

$$(x, y, z) \mapsto (xe^{-z} + ye^z - y^3z, x^3z - xe^z + ye^{-z}, e^z \sin xy) \quad \text{תהי } F: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ הנתונה עלידי:}$$

$$\text{נסמן ב- } N \text{ נורמל יחידה רציף לספירה } S^2(0^{[3]}; 5) \text{ שפונה החוצה מהקבוצה } \bar{B}^3(0^{[3]}; 5).$$

א. חשבו את הרוטור $\nabla \times F$.

$$\text{ב. חשבו את את האינטגרל המשטחי } \iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 \text{ בעזרת משפט קלויין-סטוקס.}$$

$$\text{ג. חשבו שוב את האינטגרל } \iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 \text{ והפעם בעזרת משפט 20.1.10.}$$

פתרון סעיף א

חישוב מייגע של $\nabla \times F(x, y, z)$ לפי הגדרה 17.10 ה.10 נותן:

$$(xe^z \cos xy - x^3 + xe^z + ye^{-z}, -xe^{-z} + ye^z - y^3 - ye^z \cos xy, 3x^2z - 2e^z + 3y^2z)$$

פתרון סעיף ב

יש מיפויים שונים לתוך הספירה $S^2(0^{[3]}; 5)$ שתמונתם מכילה את S וכל אחד מהם יכול לשמש

אותנו. כיוון ש- S מוכלת כולה בחצי המרחב העליון נשתמש למשל במיפוי:

$$h: B(0^{[2]}; 5) \rightarrow \mathbf{R}^3$$

$$\omega \mapsto \left(\omega, \sqrt{25 - |\omega|^2} \right)$$

$$|h(\omega)| = \sqrt{|\omega|^2 + (25 - |\omega|^2)} = \sqrt{25} = 5 \quad \text{לכל } \omega \in B(0^{[2]}; 5) \text{ מתקיים}$$

$$\text{ולכן } h(\omega) \in S(0^{[3]}; 5) \text{ אז } h(\omega) \in S \text{ אם ורק אם } 3 \leq \sqrt{25 - |\omega|^2} \leq 4 \text{ דהיינו } 9 \leq 25 - |\omega|^2 \leq 16$$

$$K = \bar{B}(0^{[2]}; 4) \setminus B(0^{[2]}; 3) \quad \text{מה ששקול ל- } |\omega|^2 \geq 9 \text{ כלומר } |\omega| \geq 3. \text{ נסמן:}$$

$$\text{אז } h(\omega) \in S \text{ אם ורק אם } \omega \in K, \text{ כלומר } S = h(K).$$

$$\partial K = S(0^{[2]}; 4) \cup S(0^{[2]}; 3) = \text{Im } \varphi_4 \cup \text{Im } \bar{\varphi}_3 \quad \text{כמוכן}$$

$$\varphi_R: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2 \quad \text{כאשר עבור כל מספר חיובי } R \text{ נגדיר:}$$

$$t \mapsto R(\cos t, \sin t)$$

$$\text{לפי דוגמה 9.ט.9 המסילה } \varphi_R \text{ היא לולאה סדירה שהעיגול } \bar{B}(0^{[2]}; R) \text{ שוכן לשמאלה. מכך נסיק}$$

$$\text{ש- } K \text{ שוכנת לשמאל הלולאה הסדירה } \varphi_4, \text{ ובעזרת שאלה 11.ט.9 נסיק גם ש- } K \text{ שוכנת לשמאל}$$

הלולאה הסדירה $\bar{\varphi}_3$. אם כך הקבוצה K יחד עם המסילות φ_4 ו- $\bar{\varphi}_3$ מקיימות יחד את הנחות משפט גרין (מינוח 9.ט.14).

לפי שאלה 10.ד.22 נורמל היחידה הרציף שמשרה המיפוי h הוא אחד מבין $\pm N$. כדי לבדוק איזה מהשניים נתבונן בנקודה $(0,0,5)$. לפי דוגמה 3.ו.10 $N(0,0,5) = (0,0,1)$. לפי הגדרה 10.ד.20 נורמל היחידה הרציף שמשרה המיפוי h הוא:

$$\rho_3 \circ \nu_h \circ h^{-1}(0,0,1) = \rho_3(\nu_h(0,0))$$

$$Jh_{(0,0)}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{הוקטור } \nu_h(0,0) \text{ הוא המכפלה הוקטורית של שורות המטריצה}$$

ולכן $\nu_h(0,0) = (1,0,0) \times (0,1,0) = (0,0,1)$. זה וקטור יחידה ולכן זה גם $\rho_3(\nu_h(0,0))$. אם גם בנקודה אחת מתלכדים נורמל היחידה הרציף N ונורמל היחידה הרציף ששרה המיפוי h , וכיוון שהאחרון הוא בהכרח אחד מבין $\pm N$ הוא בהכרח N .

כעת נוכל לקבוע לפי משפט קלויין-סטוקס (משפט 10.ה.12) יחד עם הסימון בהערה 10.ה.19

$$\iint_{h(K)} (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = \int_{h \circ \varphi_4} F \cdot d(x,y,z) + \int_{h \circ \bar{\varphi}_3} F \cdot d(x,y,z) \quad \text{שמתקיים:}$$

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = \int_{h \circ \varphi_4} F \cdot d(x,y,z) - \int_{h \circ \varphi_3} F \cdot d(x,y,z) \quad \text{אם כך:}$$

$$\text{נסמן } \psi_R = h \circ \varphi_R$$

$$\begin{aligned} \psi_R(t) &= h \circ \varphi_R(t) = \left(\varphi_R(t), \sqrt{25 - |\varphi_R(t)|^2} \right) = \left(R \cos t, R \sin t, \sqrt{25 - R^2} \right) \\ \dot{\psi}_R(t) &= (-R \sin t, R \cos t, 0) \end{aligned} \quad \text{אז:}$$

$$\text{לנוחיות הכתיבה נסמן: } c = \sqrt{25 - R^2}$$

$$\begin{aligned} F(\psi_R(t)) \cdot \dot{\psi}_R(t) &= R \cos t [F(\psi_R(t))]_2 - R \sin t [F(\psi_R(t))]_1 \\ &= R \cos t [F(R \cos t, R \sin t, c)]_2 - R \sin t [F(R \cos t, R \sin t, c)]_1 \\ &= R \cos t (cR^3 \cos^3 t - e^c R \cos t + e^{-c} R \sin t) \\ &\quad - R \sin t (e^{-c} R \cos t + e^c R \sin t - cR^3 \sin^3 t) \\ &= cR^4 (\cos^4 t + \sin^4 t) - e^c R^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_{h \circ \varphi_R} F \cdot d(x,y,z) &= \int_{\psi_R} F \cdot d(x,y,z) = \int_0^{2\pi} F(\psi_R(t)) \cdot \dot{\psi}_R(t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (cR^4 (\cos^4 t + \sin^4 t) - e^c R^2) dt = cR^4 \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt - 2\pi e^c R^2 \end{aligned}$$

$$1 = (\cos^2 t + \sin^2 t)^2 = \cos^4 t + \sin^4 t + 2 \sin^2 t \cos^2 t \quad \text{נוכל לרשום}$$

$$\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - 2 \sin^2 t \cos^2 t = 1 - \frac{1}{2} (2 \sin t \cos t)^2 = 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2t \quad \text{ולכן:}$$

$$\cos 4t = 1 - 2\sin^2 2t \Rightarrow \sin^2 2t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t \quad \text{כמוכן}$$

$$\cos^4 t + \sin^4 t = 1 - \frac{1}{2}\sin^2 2t = 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 4t\right) = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t \quad \text{ולכן}$$

$$\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt = \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4}\cos 4t\right) dt = \frac{3}{4} \cdot 2\pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 4t dt = \frac{3}{2}\pi + 0 = \frac{3}{2}\pi \quad \text{ומקבלים}$$

$$\int_{h \circ \varphi_R} F \cdot d(x, y, z) = \frac{3}{2}\pi c R^4 - 2\pi e^c R^2 = \frac{3}{2}\pi R^4 \sqrt{25 - R^2} - 2\pi e^{\sqrt{25 - R^2}} R^2 \quad \text{לכן}$$

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 &= \int_{h \circ \varphi_4} F \cdot d(x, y, z) - \int_{h \circ \varphi_3} F \cdot d(x, y, z) \\ &= \left(\frac{3}{2}\pi \cdot 3 \cdot 4^4 - 2\pi e^3 4^2\right) - \left(\frac{3}{2}\pi \cdot 4 \cdot 3^4 - 2\pi e^4 3^2\right) \\ &= 666\pi - 32\pi e^3 + 18\pi e^4 \end{aligned} \quad \text{ולבסוף:}$$

פתרון סעיף ג

$$K = \bar{B}(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times [3, 4]) \quad \text{נסמן}$$

$$S_1 = S(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times (3, 4)) \quad \text{וכן:}$$

$$S_2 = B(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{4\}) = B(0^{[2]}; 3) \times \{4\}$$

$$S_3 = B(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{3\}) = B(0^{[2]}; 4) \times \{3\}$$

$$\tilde{S}_1 = S(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{4\}) = S(0^{[2]}; 3) \times \{4\}$$

$$\tilde{S}_2 = S(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times \{3\}) = S(0^{[2]}; 4) \times \{3\}$$

הקבוצה K היא סגורה, חסומה ובעלת נפח ב- $\mathbf{R}^3$. הקבוצות $\tilde{S}_1$ ו- $\tilde{S}_2$ הן יריעות חלקות חד-

ממדיות (למשל כי הן תמונות הלולאות ψ_3 ו- ψ_4 מפתרון סעיף ב).

הקבוצה $U_1 = \mathbf{R}^2 \times (3, 4)$ היא קבוצה פתוחה.

הפונקציה $f_1: (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2 - 25$ גזירה ברציפות ב- U_1 .

מתקיים $\nabla f_1(x, y, z) = 2(x, y, z) \neq 0^{[3]}$ עבור כל $(x, y, z) \in S_1$, וכן מתקיים:

$$\{(x, y, z) \in U_1 \mid f_1(x, y, z) \leq 0\} = K \cap U_1$$

$$\{(x, y, z) \in U_1 \mid f_1(x, y, z) = 0\} = S_1 \cap U_1$$

העובדה ש- S_1 בעלת שטח מוכלל מתקבלת מכך שהיא תמונת $B(0^{[2]}; 4) \setminus \bar{B}(0^{[2]}; 3)$ תחת

המיפוי h מפתרון סעיף ב, כלומר תמונת קבוצה בעלת שטח תחת מיפוי זה.

משאלה 4.10.10 מקבלים ש- $N_1: (x, y, z) \mapsto \frac{1}{|\nabla f_1(x, y, z)|} \nabla f_1(x, y, z) = \frac{1}{5}(x, y, z)$ היא נורמל יחידה

רציף למשטח S_1 שפונה החוצה מ- K . לפי דוגמה 3.10.10 $N(x) = N_1(x)$ לכל $x \in S_1$.

הקבוצה $U_2 = B(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times (3, \infty))$ היא קבוצה פתוחה.

הפונקציה $f_2 : (x, y, z) \mapsto z - 4$ גזירה ברציפות ב- U_2 .

מתקיים $\nabla f_2(x, y, z) = (0, 0, 1) \neq 0^{[3]}$ עבור כל $(x, y, z) \in S_2$, וכן מתקיים:

$$\{(x, y, z) \in U_2 \mid f_2(x, y, z) \leq 0\} = K \cap U_2$$

$$\{(x, y, z) \in U_2 \mid f_2(x, y, z) = 0\} = S_2 \cap U_2$$

העובדה ש- S_2 בעלת שטח מוכלל מתקבלת מכך שהיא תמונת $B(0^{[2]}; 3)$ תחת המיפוי

$h_2 : \omega \mapsto (\omega, 4)$, כלומר תמונת קבוצה בעלת שטח תחת מיפוי זה.

משאלה 4.10.10 מקבלים ש- $\nabla f_2(x, y, z) = (0, 0, 1)$ היא נורמל יחידה

רציף למשטח S_2 שפונה החוצה מ- K .

הקבוצה $U_3 = B(0^{[3]}; 5) \cap (\mathbf{R}^2 \times (-\infty, 4))$ היא קבוצה פתוחה.

הפונקציה $f_3 : (x, y, z) \mapsto 3 - z$ גזירה ברציפות ב- U_3 .

מתקיים $\nabla f_3(x, y, z) = (0, 0, -1) \neq 0^{[3]}$ עבור כל $(x, y, z) \in S_3$, וכן מתקיים:

$$\{(x, y, z) \in U_3 \mid f_3(x, y, z) \leq 0\} = K \cap U_3$$

$$\{(x, y, z) \in U_3 \mid f_3(x, y, z) = 0\} = S_3 \cap U_3$$

העובדה ש- S_3 בעלת שטח מוכלל מתקבלת מכך שהיא תמונת $B(0^{[2]}; 4)$ תחת המיפוי

$h_2 : \omega \mapsto (\omega, 3)$, כלומר תמונת קבוצה בעלת שטח תחת מיפוי זה.

משאלה 4.10.10 מקבלים ש- $\nabla f_3(x, y, z) = (0, 0, -1)$ היא נורמל יחידה

רציף למשטח S_3 שפונה החוצה מ- K .

בעזרת שאלה 27.א.2 נוכל לבדוק ש- $\partial K \subseteq S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$.

אז ממשפט 20.1.10 נובע שמתקיים:

$$\iiint_K \nabla \cdot (\nabla \times F) = \sum_{i=1}^3 \iint_{S_i} (\nabla \times F) \cdot N_i d\sigma_2$$

מחלק ב של שאלה 20.ה.10 נקבל ש- $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ ולכן גם:

$$\iiint_K \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

הקבוצה $\tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$ היא שולי הקבוצה S ב- $B(0^{[3]}; 5)$ ומתקיים $N = N_1$ ו- $S = S_1 \cup \tilde{S}_1 \cup \tilde{S}_2$

ביריעה S_1 ומכאן אפשר להסיק ש:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = \iint_{S_1} (\nabla \times F) \cdot N_1 d\sigma_2$$

אז:

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = -\iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot N_2 d\sigma_2 - \iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot N_3 d\sigma_2$$

$$\iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot N_2 d\sigma_2 = \iint_{S_2} (\nabla \times F) \cdot (0,0,1) d\sigma_2 = \iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 \quad \text{כעת}$$

$$\iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot N_2 d\sigma_2 = \iint_{S_3} (\nabla \times F) \cdot (0,0,-1) d\sigma_2 = -\iint_{S_3} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 \quad \text{וכן}$$

$$\iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 = -\iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 + \iint_{S_3} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 \quad \text{ולכן}$$

$$[(\nabla \times F)]_3(x, y, z) = 3x^2z - 2e^z + 3y^2z \quad \text{נזכר שלפי פתרון סעיף א:}$$

המשטח S_2 הוא הגרף של צמצום הפונקציה הקבועה $4 \mapsto (x, y)$ לעיגול $B(0^{[2]}; 3)$. הגרדיאנט

של הפונקציה הקבועה הוא 0, ולפי שאלה 6.ג.10 (או טענה 17.ג.10):

$$\begin{aligned} \iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 &= \iint_{B(0^{[2]}; 3)} [(\nabla \times F)]_3(x, y, 4) dx dy \\ &= \iint_{B(0^{[2]}; 3)} (12x^2 - 2e^4 + 12y^2) dx dy \\ &= 12 \iint_{B(0^{[2]}; 3)} (x^2 + y^2) dx dy - 2e^4 \text{vol}_2(B(0^{[2]}; 3)) \\ &= 12 \iint_{[0,3] \times [0,2\pi]} r^3 dr d\theta - 2e^4 \pi 3^2 = 12 \cdot 2\pi \int_0^3 r^3 dr - 18\pi e^4 \\ &= 24\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^3 - 18\pi e^4 = 24\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 3^4 - 18\pi e^4 = 6 \cdot 3^4 \pi - 18\pi e^4 \end{aligned}$$

המשטח S_3 הוא הגרף של צמצום הפונקציה הקבועה $3 \mapsto (x, y)$ לעיגול $B(0^{[2]}; 4)$. הגרדיאנט

של הפונקציה הקבועה הוא 0, ולפי שאלה 6.ג.10 (או טענה 17.ג.10):

$$\begin{aligned} \iint_{S_3} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 &= \iint_{B(0^{[2]}; 4)} [(\nabla \times F)]_3(x, y, 3) dx dy \\ &= \iint_{B(0^{[2]}; 4)} (9x^2 - 2e^3 + 9y^2) dx dy \\ &= 9 \iint_{B(0^{[2]}; 4)} (x^2 + y^2) dx dy - 2e^3 \text{vol}_2(B(0^{[2]}; 4)) \\ &= 9 \iint_{[0,4] \times [0,2\pi]} r^3 dr d\theta - 2e^3 \pi 4^2 = 9 \cdot 2\pi \int_0^4 r^3 dr - 32\pi e^3 \\ &= 18\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^4 - 32\pi e^3 = 18\pi \cdot \frac{1}{4} \cdot 4^4 - 32\pi e^3 = 18 \cdot 4^3 \pi - 32\pi e^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \iint_S (\nabla \times F) \cdot N d\sigma_2 &= -\iint_{S_2} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 + \iint_{S_3} [(\nabla \times F)]_3 d\sigma_2 \quad \text{אז:} \\ &= -(6 \cdot 3^4 \pi - 18\pi e^4) + (18 \cdot 4^3 \pi - 32\pi e^3) \\ &= 666\pi + 18\pi e^4 - 32\pi e^3 \end{aligned}$$

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי $r > 0$, נסמן $S = S^{k-1}(0^{[k]}; r)$ ותהי $F: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ הפונקציה המוגדרת על ידי:

$$F: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1^3, \dots, x_k^3)$$

חשבו את האינטגרל $\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1}$ כאשר N הוא נורמל יחידה רציף למשטח על S הפונה החוצה

$$K = \bar{B}^k(0^{[k]}; r)$$

פתרון

$$\nabla \cdot F: x \mapsto 3x_1^2 + \dots + 3x_k^2 = 3|x|^2 \quad \text{מתקיים}$$

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \int_K \nabla \cdot F = 3 \int_{\bar{B}^k(0^{[k]}; r)} |x|^2 \quad \text{וממשפט הדיברגנץ (משפט 12.1.10):}$$

כעת נשתמש בנוסחה משאלה 23.ג.10 עם הפונקציה $\varphi: t \mapsto t^2$ ונקבל

$$\int_K |x|^2 = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r t^2 t^{k-1} dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r t^{k+1} dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot \frac{r^{k+2}}{k+2}$$

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \frac{6}{k+2} \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot r^{k+2} \quad \text{ולסיכום:}$$

ליתר דיוק, השימוש דלעיל בנוסחה משאלה 23.ג.10 נעשה כך:

$$\alpha_n = \frac{1}{n} \quad \text{נבחר סדרה יורדת כלשהי של מספרים חיוביים ששואפת לאפס, למשל:}$$

$$K_n = \bar{B}(0^{[k]}; r) \setminus B(0^{[k]}; \alpha_n) \quad \text{נסמן:}$$

אז $(K_n)_{n=1}^\infty$ סדרה של קבוצות סגורות וחסומות ובעלות נפח k -ממדי שעולה לקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$,

$$\int_{K_n} |x|^2 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_K |x|^2 \quad \text{ולפי טענה 32.ה.9:}$$

מצד שני, לכל $n > \frac{1}{r}$ מתקיים $0 < \alpha_n < r$ ולפי שאלה 23.ג.10 (עם $\varphi: t \mapsto t^2$)

$$\int_{K_n} |x|^2 = \int_{K_n} \varphi(|x|) = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_{\alpha_n}^r \varphi(t) t^{k-1} dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r \varphi(t) t^{k-1} dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^r t^{k+1} dt$$

דרך נוספת בקצרה:

לפי דוגמה 3.1.10 מתקיים $N: x \mapsto \frac{1}{r}x$. לכל $x \in S$ מתקיים

$$F(x) \cdot N(x) = (x_1^3, \dots, x_k^3) \cdot \frac{1}{r}(x_1, \dots, x_k) = \frac{1}{r}(x_1^4 + \dots + x_k^4)$$

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \frac{1}{r} \int_S (x_1^4 + \dots + x_k^4) d\sigma_{k-1} \quad \text{ולכן:}$$

יהי $c > 0$ ונחשב את האינטגרל

$$I_c = \int_S \left(|x_1|^c + \dots + |x_k|^c \right) d\sigma_{k-1}$$

האינטגרל המבוקש בשאלה הוא $\frac{1}{r} I_4$.

מחלקה של שאלה 10.ב.23 עם הפונקציה $\Lambda: (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_k)$

נקבל $I_c = k \int_S |x_k|^c d\sigma_{k-1}$ ולכן $\int_S |x_i|^c d\sigma_{k-1} = \int_S |x_j|^c d\sigma_{k-1}$

שוב בעזרת אותה שאלה עם $\Lambda: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, -x_k)$ נקבל

$$\int_{S \cap (\mathbf{R}^{k-1} \times [0, \infty))} |x_k|^c d\sigma_{k-1} = \int_{S \cap (\mathbf{R}^{k-1} \times (-\infty, 0])} |x_k|^c d\sigma_{k-1}$$

ולכן $I_c = 2k \int_{S \cap (\mathbf{R}^{k-1} \times [0, \infty))} |x_k|^c d\sigma_{k-1} = 2k \int_{G(g)} |x_k|^c d\sigma_{k-1}$

עם $g: \bar{B}^{k-1}(0^{[k-1]}; r) \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי $x \mapsto \sqrt{r^2 - |x|^2}$.

את האינטגרל הזה אפשר להמיר בעזרת שאלה 10.ג.17 באינטגרל מרובה:

מחשבים $\nabla g(x) = -\frac{1}{\sqrt{r^2 - |x|^2}} x$ ומקבלים $\sqrt{1 + |\nabla g(x)|^2} = \frac{r}{|g(x)|}$ ולכן:

$$I_c = 2k \int_{\bar{B}^{k-1}(0^{[k-1]}; r)} |g|^c \sqrt{1 + |\nabla g|^2} = 2kr \int_{\bar{B}^{k-1}(0^{[k-1]}; r)} (r^2 - |x|^2)^{\frac{c-1}{2}} dx_1 \dots dx_{k-1}$$

את האינטגרל האחרון אפשר לחשב בעזרת הנוסחה משאלה 10.ג.23 ולקבל:

$$I_c = 2kr \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \int_0^r (r^2 - t^2)^{\frac{c-1}{2}} t^{k-2} dt$$

באינטגרל האחרון מציבים $t^2 = r^2 z$ (ובהתאם $2t dt = r^2 dz$) ומקבלים

$$2 \int_0^r (r^2 - t^2)^{\frac{c-1}{2}} t^{k-2} dt = \int_0^1 (r^2 - r^2 z)^{\frac{c-1}{2}} (r^2 z)^{\frac{k-3}{2}} r^2 dz = r^{c-1+k-3+2} \int_0^1 (1-z)^{\frac{c-1}{2}} z^{\frac{k-3}{2}} dz$$

ומכאן: $I_c = kr \frac{2\pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} r^{c-1+k-3+2} \int_0^1 (1-z)^{\frac{c-1}{2}} z^{\frac{k-3}{2}} dz$

$$= \frac{2kr^{c+k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} B\left(\frac{k-1}{2}, \frac{c+1}{2}\right) = \frac{2kr^{c+k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right) \cdot \Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2} + \frac{c+1}{2}\right)} = 2kr^{c+k-1} \pi^{\frac{k-1}{2}} \frac{\Gamma\left(\frac{c+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{c+k}{2}\right)}$$

(כשבסוף יש שימוש תוך שימוש בפונקציית בטא מדוגמה 9.ח.13 ובפונקציית גמא).

שאלה 5 (רשות – 0 נקודות)

חשבו את הנפח ה־ $(k+l)$ ־ממדי ואת המרכז הגיאומטרי של הקבוצה:

$$A = \left\{ x \in [0, \infty)^{k+l} \mid \sum_{i=1}^k x_i + \sum_{i=k+1}^{k+l} x_i^2 \leq 1 \right\}$$

תוכלו להיעזר בידע על סימפלקסים ועל כדורים, בנוסחת Coarea בתוצאות משפט פוביני, ובפונקציות בטא וגמא.

פתרון

אם $a = (a_1, \dots, a_{k+l})$ הוא המרכז הגיאומטרי אז משיקולי סימטריה אפשר להסיק שעבור $i \leq k$

מתקיים $a_i = a_1$ ועבור $u > k$ מתקיים $a_i = a_{k+l}$. מהם אותם "שיקולי סימטריה"?

ובכן, אם φ היא פונקציה אפינית הפיכה, אז לפי שאלה 6.ג.9 המרכז הגיאומטרי של $\varphi(A)$ הוא

$\varphi(a)$. לכן אם $\varphi(A) = A$ אז $\varphi(a) = a$.

בפרט עבור $1 < i \leq k$ והפונקציה $\varphi: (x_1, \dots, x_{k+l}) \mapsto (x_i, x_2, \dots, x_{i-1}, x_1, x_{i+1}, \dots, x_{k+l})$

(שמחליפה בין השיעורים ה־1 וה־ i של נקודה) בבירור מתקיים $\varphi(A) = A$ ולכן $\varphi(a) = a$ והשוויון

בשיעור הראשון של שני האגפים בשוויון האחרון נותן $a_i = a_1$.

בדומה עבור $k < i \leq k+l$ והפונקציה $\varphi: (x_1, \dots, x_{k+l}) \mapsto (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{k+l}, x_{i+1}, \dots, x_{k+l-1}, x_i)$

(שמחליפה בין השיעורים ה־ i וה־ $k+l$ של נקודה) בבירור מתקיים $\varphi(A) = A$ ולכן $\varphi(a) = a$

והשוויון בשיעור האחרון של שני האגפים בשוויון האחרון נותן $a_i = a_{k+l}$.

אז עבור $i \leq k$ מתקיים $a_i = a_1$ ועבור $u > k$ מתקיים $a_i = a_{k+l}$, וכדי למצוא את המרכז

הגיאומטרי של A די לחשב את a_1 ואת a_{k+l} , וכמובן גם את $\text{vol}_{k+l} A$.

$$A_y = \{x \mid (x, y) \in A\} = \left\{ x \in [0, \infty)^k \mid \sum_{i=1}^k x_i \leq 1 - |y|^2 \right\} \quad \text{נסמן כמו במסקנה 26.ו.9:}$$

$$\tilde{A} = \{y \mid A_y \neq \emptyset\} = \bar{B}^l(0^{[l]}; 1) \cap [0, \infty)^l \quad \text{אז}$$

$$A_y = \Delta_k(1 - |y|^2) \quad \text{ועבור } y \in \tilde{A} \text{ מתקיים:}$$

לכל פונקציה f שהיא אינטגרלית ב־ A (ובפרט כזאת שרציפה בה) מתקיים:

$$\int_A f(x, y) dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} \left(\int_{A_y} f(x, y) dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l \quad (*)$$

לחישוב הנפח $\text{vol}_{k+l} A$ נשתמש בפונקציה הקבועה $f: (x, y) \mapsto 1$ בנוסחה (*) ונקבל:

$$\begin{aligned}\text{vol}_{k+l} A &= \int_A 1 dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} \left(\int_{A_y} 1 dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} \text{vol}_k A_y dy_1 \cdots dy_l \\ &= \int_{\tilde{A}} \text{vol}_k \Delta_k \left(1 - |y|^2\right) dy_1 \cdots dy_l = \frac{1}{k!} \int_{\bar{B}(0^{[l]}, 1) \cap [0, \infty)^l} \left(1 - |y|^2\right)^k dy_1 \cdots dy_l\end{aligned}$$

כאשר במעבר האחרון נעשה שימוש בנוסחה $\text{vol}_k (\Delta_k(\alpha)) = \frac{1}{k!} \alpha^k$ משאלה 32.1.9.

$$\text{vol}_{k+l} A = \frac{I_{k,l}}{k!} \quad \text{קיבלנו אם כן}$$

$$I_{k,l} = \int_{\bar{B}(0^{[l]}, 1) \cap [0, \infty)^l} \left(1 - |y|^2\right)^k dy_1 \cdots dy_l \quad \text{כאשר:}$$

את חישוב האינטגרל $I_{k,l}$ נדחה להמשך, וניגש קודם לחישוב a_1 ו- a_{k+l} .

$$a_i \text{vol}_{k+l} A = \int_A x_i dx_1 \cdots dx_{k+l} \quad \text{לפי הגדרה 33.1.9 לכל } i \text{ מתקיים:}$$

לחישוב $a_1 \text{vol}_{k+l} A$ נשתמש בפונקציה $f: (x, y) \mapsto x_1$ בנוסחה (*) ונקבל:

$$a_1 \text{vol}_{k+l} A = \int_A x_1 dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} \left(\int_{A_y} x_1 dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l$$

כזכור $A_y = \Delta_k \left(1 - |y|^2\right)$. בפתרון שאלה 37.1.9 מחושב המרכז הגיאומטרי של $\Delta_k(\alpha)$ ומקבלים

$$\int_{\Delta_k(\alpha)} x_i dx_1 \cdots dx_k = \frac{1}{(k+1)!} \alpha^{k+1} \quad \text{שם שלכל } i \text{ מתקיים:}$$

$$\int_{A_y} x_i dx_1 \cdots dx_k = \frac{1}{(k+1)!} \left(1 - |y|^2\right)^{k+1} \quad \text{אז}$$

$$a_1 \text{vol}_{k+l} A = \int_{\tilde{A}} \left(\int_{A_y} x_1 dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} \frac{1}{(k+1)!} \left(1 - |y|^2\right)^{k+1} dy_1 \cdots dy_l \quad \text{ולכן}$$

$$= \frac{1}{(k+1)!} \int_{\bar{B}(0^{[l]}, 1) \cap [0, \infty)^l} \left(1 - |y|^2\right)^{k+1} dy_1 \cdots dy_l = \frac{I_{k+1,l}}{(k+1)!}$$

$$a_1 = \frac{a_1 \text{vol}_{k+l} A}{\text{vol}_{k+l} A} = \frac{\frac{I_{k+1,l}}{(k+1)!}}{\frac{I_{k,l}}{k!}} = \frac{I_{k+1,l}}{(k+1)I_{k,l}} \quad \text{אז:}$$

נעבור לחישוב a_{k+l} . נשתמש בפונקציה $f: (x, y) \mapsto y_l$ בנוסחה (*) ונקבל:

$$\begin{aligned} a_{k+l} \text{vol}_{k+l} A &= \int_A y_l dx_1 \cdots dx_k dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} \left(\int_{A_y} y_l dx_1 \cdots dx_k \right) dy_1 \cdots dy_l \\ &= \int_{\tilde{A}} y_l \text{vol}_k A_y dy_1 \cdots dy_l = \frac{1}{k!} \int_{\tilde{A}} y_l (1 - |y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l \end{aligned}$$

לחישוב האינטגרל האחרון כאשר $l > 1$ נשתמש שוב במסקנה 26.1.9.

לפני כן, במקרה $l = 1$ מתקיים $\tilde{A} = \bar{B}^1(0^{[1]}; 1) \cap [0, \infty)^1 = [-1, 1] \cap [0, \infty) = [0, 1]$ ולכן במקרה זה

$$\int_A y_l (1 - |y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \int_0^1 y (1 - y^2)^k dy \stackrel{\substack{s=1-y^2 \\ ds=-2ydy \\ ydy=-\frac{1}{2}ds}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 s^k ds = \frac{1}{2(k+1)} \quad \text{מתקיים:}$$

לכן עבור $l = 1$ מתקיים $a_{k+l} \text{vol}_{k+l} A = \frac{1}{2(k+1)!}$ כמוכן במקרה זה

$$I_{k,l} = \int_{\bar{B}(0^{[l]}; 1) \cap [0, \infty)^l} (1 - |y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \int_0^1 (1 - y^2)^k dy \stackrel{\substack{s=y^2 \\ y=\frac{1}{2}s \\ dy=\frac{1}{2}s^{-\frac{1}{2}}ds}}{=} \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - s)^k s^{-\frac{1}{2}} ds$$

$$= \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{2}, k+1\right) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma(k+1)}{2\Gamma(k+\frac{3}{2})} = \frac{k! \sqrt{\pi}}{2\Gamma(k+\frac{3}{2})}$$

$$a_{k+l} = \frac{a_{k+l} \text{vol}_{k+l} A}{\text{vol}_{k+l} A} = \frac{\frac{1}{2(k+1)!}}{\frac{I_{k,l}}{k!}} = \frac{\frac{1}{2(k+1)!}}{\frac{\sqrt{\pi}}{2\Gamma(k+\frac{3}{2})}} = \frac{\Gamma(k+\frac{3}{2})}{(k+1)! \sqrt{\pi}} \quad \text{ולכן אם } l=1 \text{ אז:}$$

אם $l > 1$ נפרק $y = (z, t)$ עם $z \in \mathbf{R}^{l-1}$ ו- $t \in \mathbf{R}$. נסמן

$$B = \tilde{A} = \bar{B}^l(0^{[l]}; 1) \cap [0, \infty)^l$$

ובדומה לסימונים במסקנה 26.1.9 נסמן $B_z = \{t \mid (z, t) \in B\}$ ו- $\tilde{B} = \{z \mid B_z \neq \emptyset\}$. אז לכל $z \in \tilde{B}$

$$B_z = \left\{ t \in [0, \infty) \mid |z|^2 + t^2 \leq 1 \right\} = \left[0, \sqrt{1 - |z|^2} \right]$$

וכן: $\tilde{B} = \left\{ z \in [0, \infty)^{l-1} \mid |z| \leq 1 \right\} = \bar{B}^{l-1}(0^{[l-1]}; 1) \cap [0, \infty)^{l-1}$

$$\int_A y_l (1 - |y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \int_B t (1 - |z|^2 - t^2)^k dz_1 \cdots dz_{l-1} dt \quad \text{אז}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{\tilde{B}} \left(\int_{B_z} t (1 - |z|^2 - t^2)^k dt \right) dz_1 \cdots dz_{l-1} \\ &= \int_{\tilde{B}} \left(\int_0^{\sqrt{1-|z|^2}} t (1 - |z|^2 - t^2)^k dt \right) dz_1 \cdots dz_{l-1} \end{aligned}$$

את האינטגרל הפנימי נחשב בעזרת ההצבה $s = 1 - |z|^2 - t^2$ אז $ds = -2t dt$ ולכן נציב $t dt = -\frac{1}{2} ds$

$$\int_0^{\sqrt{1-|z|^2}} t(1-|z|^2-t^2)^k dt = -\frac{1}{2} \int_{1-|z|^2}^0 s^k ds = \frac{1}{2} \int_0^{1-|z|^2} s^k ds = \frac{1}{2(k+1)} (1-|z|^2)^{k+1} \quad \text{ונקבל:}$$

נציב זאת באינטגרל הקודם ונמשיך את החישוב:

$$\int_A y_l (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \frac{1}{2(k+1)} \int_{\tilde{B}} (1-|z|^2)^{k+1} dz_1 \cdots dz_{l-1} = \frac{I_{k+1,l-1}}{2(k+1)}$$

$$a_{k+l} \text{vol}_{k+l} A = \frac{1}{k!} \int_A y_l (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \frac{I_{k+1,l-1}}{2(k+1)!}$$

$$a_{k+l} = \frac{a_{k+l} \text{vol}_{k+l} A}{\text{vol}_{k+l} A} = \frac{\frac{I_{k+1,l-1}}{2(k+1)!}}{\frac{I_{k,l}}{k!}} = \frac{I_{k+1,l-1}}{2(k+1)I_{k,l}}$$

$$I_{k,l} = \int_{\tilde{B}(0^{[l]};1) \cap [0,\infty)^l} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l \quad \text{כדי לסיים את החישוב נותר לחשב את האינטגרלים:}$$

$$2^l I_{k,l} = \int_{\tilde{B}(0^{[l]};1)^l} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l \quad \text{משיקולי סימטריה אפשר לקבוע שמתקיים:}$$

מהם אותם "שיקולי סימטריה"?

$$\varphi_\eta : (y_1, \dots, y_l) \mapsto (\eta_1 y_1, \dots, \eta_l y_l) \quad \text{עבור } (\eta_1, \dots, \eta_l) \in \{\pm 1\}^l \text{ נסמן:}$$

נזכור שסימנו קודם $\tilde{A} = \tilde{B}(0^{[l]};1) \cap [0,\infty)^l$. לפי שאלה 9.ג.9 נקבל:

$$\int_{\varphi_\eta(\tilde{A})} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \int_{\tilde{A}} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l$$

אם $\eta' \neq \eta''$ אז יש i כך ש- $\eta'_i \neq \eta''_i$ ולכן $\varphi_{\eta'}(\tilde{A}) \cap \varphi_{\eta''}(\tilde{A}) \subseteq \{y \in \mathbf{R}^l \mid y_i = 0\}$ ולכן החיתוכים בין כל

שתיים מהקבוצות $\varphi_\eta(\tilde{A})$ הם קבוצות צנומות. איחוד כל הקבוצות $\varphi_\eta(\tilde{A})$ הוא הכדור $\tilde{B}(0^{[l]};1)$

ומספר הקבוצות האלה הוא 2^l ולכן:

$$\int_{\tilde{B}(0^{[l]};1)^l} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \sum_{\eta \in \{\pm 1\}^l} \int_{\varphi_\eta(\tilde{A})} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = 2^l \int_{\tilde{A}} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = 2^l I_{k,l}$$

כעת נוכל להסיק בעזרת המסקנה מנוסחת Coarea שבשאלה 23.ג.10:

$$\int_{\tilde{B}(0^{[l]};1)} (1-|y|^2)^k dy_1 \cdots dy_l = \frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2})} \int_0^1 (1-t^2)^k t^{l-1} dt$$

את האינטגרל באגף ימין נחשב בעזרת החלפת משתנים ופונקציית בטא. נציב $z = t^2$ ובהתאם

$$\int_0^1 (1-t^2)^k t^{l-1} dt = \frac{1}{2} \int_0^1 (1-z)^k z^{\frac{l}{2}-1} dz = \frac{1}{2} B\left(\frac{l}{2}, k+1\right) = \frac{\Gamma(\frac{l}{2})\Gamma(k+1)}{2\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)} \quad \text{ונקבל: } dz = 2t dt$$

$$2^l I_{k,l} = \int_{\bar{B}(0^l;1)'} \left(1-|y|^2\right)^k dy_1 \cdots dy_l = \frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2})} \int_0^1 \left(1-t^2\right)^k t^{l-1} dt = \frac{2\pi^{\frac{l}{2}}}{\Gamma(\frac{l}{2})} \cdot \frac{\Gamma(\frac{l}{2})\Gamma(k+1)}{2\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)} = \frac{\pi^{\frac{l}{2}}k!}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)} \quad \text{אז}$$

$$I_{k,l} = \frac{\pi^{\frac{l}{2}}k!}{2^l \Gamma(\frac{l}{2}+k+1)} \quad \text{ולכן}$$

עכשיו אפשר לסיים את החישוב של המבוקש בשאלה :

$$\text{vol}_{k+l} A = \frac{I_{k,l}}{k!} = \frac{\pi^{\frac{l}{2}}}{2^l \Gamma(\frac{l}{2}+k+1)} \quad \text{ראשית :}$$

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{I_{k+1,l}}{(k+1)I_{k,l}} = \frac{\frac{\pi^{\frac{l}{2}}(k+1)!}{2^l \Gamma(\frac{l}{2}+k+2)}}{(k+1) \frac{\pi^{\frac{l}{2}}k!}{2^l \Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}} = \frac{\pi^{\frac{l}{2}}(k+1)!}{2^l \Gamma(\frac{l}{2}+k+2)} \cdot \frac{2^l \Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}{\pi^{\frac{l}{2}}(k+1)!} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}{\Gamma(\frac{l}{2}+k+2)} = \frac{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}{(\frac{l}{2}+k+1)\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)} = \frac{1}{(\frac{l}{2}+k+1)} \end{aligned} \quad \text{שנית :}$$

ולבסוף, עבור $l > 1$:

$$\begin{aligned} a_{k+l} &= \frac{I_{k+1,l-1}}{2(k+1)I_{k,l}} = \frac{\frac{\pi^{\frac{l-1}{2}}(k+1)!}{2^{l-1}\Gamma(\frac{l-1}{2}+k+2)}}{2(k+1) \frac{\pi^{\frac{l}{2}}k!}{2^l \Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}} = \frac{\pi^{\frac{l-1}{2}}(k+1)!}{2^{l-1}\Gamma(\frac{l-1}{2}+k+2)} \cdot \frac{2^l \Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}{2\pi^{\frac{l}{2}}(k+1)!} \\ &= \frac{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}{\pi^{\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{l-1}{2}+k+2)} = \frac{\Gamma(\frac{l}{2}+k+1)}{\pi^{\frac{1}{2}}(\frac{l}{2}+k+1)\Gamma(\frac{l-1}{2}+k+1)} = \frac{1}{(\frac{l}{2}+k+1)\sqrt{\pi}} \end{aligned}$$