

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 9

מועד אחרון להגשה : 18.5.2025

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי g פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$.

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^3$ ל- $\mathbb{R}$ שמוגדרת עלידי:

$$f : (x, y, z) \mapsto g(x, y)$$

הוכיחו שאם f אינטגרבילית ב- $\bar{B}(0^{[3]}; 1)$ אז g אינטגרבילית ב- $\bar{B}(0^{[2]}; 1)$.

הצעה: אחת ממסקנות משפט פוביני יכולה להועיל. גם מבחן לבג לאינטגרביליות יכול להועיל.

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את הנפח ה-5 ממדי ואת המרכז הגיאומטרי של הקבוצה:

$$A = \left\{ (x, y, z, u, v) \in [0, \infty)^5 \mid x^2 + y^2 + z^2 + u + v \leq 1 \right\}$$

עצות: דרך אפשרית היא להשתמש במשפט 26.1.9 עם $k=3$ ו- $l=2$. יתכן שפונקציות גמא ובטא תסייענה. תוכלו להראות בעזרת שאלה 6.1.9 שחלק משיעורי המרכז הגיאומטרי של הקבוצה שווים זה לזה.

שאלה 3 (20 נקודות)

מצאו קבוצה סגורה וחסומה $A \subseteq (0, \infty)^2$ ששטחה חיובי, ושפתה מוכלת באיחוד הקבוצות

$$\{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 3\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - xy - y^2 = 1\}$$

וחשבו את האינטגרל:

$$\iint_A (x^4 - y^4) e^{xy} dx dy$$

הדרכה: היעזרו בפונקציה $\varphi : (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (0, \infty)$ המוגדרת עלידי $\varphi : (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי $k \geq 2$ טבעי. תהי $f : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $x \mapsto |x|^{2025}$.

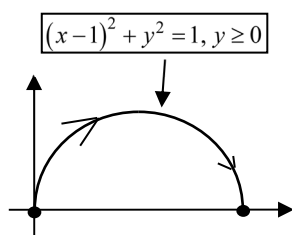
לכל מספר טבעי n נסמן $A_n = [0, \frac{1}{n}]^{k-1} \times [0, n]$, ונסמן גם $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

קבעו עבור אילו ערכים של k האינטגרל המוכלל $\int_A f$ מתכנס.

שאלה 5 (20 נקודות)

באיור מתוארת מסילה פשוטה φ שתמונתה $[0, \infty)^2 \cap S((1,0);1)$.

מוצא המסילה φ בראשית הצירים.



$$P(x, y) = \frac{y}{1+x+y} - y^3 \quad \text{יהיו:}$$

$$Q(x, y) = \frac{y}{1+x+y} + x^3 + \ln(1+x+y)$$

העזרו במשפט גרין ובהחלפת משתנים באינטגרל כפול וחשבו את האינטגרל: $\int_{\varphi} Pdx + Qdy$

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: נשתמש במסקנה 26.1.9 (עם תמורה מסויימת של סדר המשתנים).

$$A_{(x,y)} = \{z \in \mathbf{R} \mid (x,y,z) \in A\} \quad \text{נסמן } A = \bar{B}(0^{[3]};1) \text{ ולכל } (x,y) \in \mathbf{R}^2:$$

סימון זה דומה לסימון 24.1.9 עם $k=1$ ו- $l=2$, כאשר ממירים נקודה $(x,y,z) \in \mathbf{R}^3$

$$\text{ב- } \mathbf{R}^1 \times \mathbf{R}^2 \text{ ב- } (z, (x,y)).$$

$$\tilde{A} = \{(x,y) \mid A_{(x,y)} \neq \emptyset\} \quad \text{בדומה לסימון במסקנה 26.1.9, נסמן:}$$

$$z \in A_{(x,y)} \Leftrightarrow (x,y,z) \in A \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Leftrightarrow z^2 \leq 1 - x^2 - y^2 \quad \text{מתקיים}$$

$$\tilde{A} = \bar{B}(0^{[2]};1) \quad \text{ולכן } A_{(x,y)} \neq \emptyset \text{ אם ורק אם } x^2 + y^2 \leq 1, \text{ כלומר}$$

$$A_{(x,y)} = \left[-\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2} \right] \quad \text{ועבור } (x,y) \in \tilde{A} \text{ מתקיים:}$$

$$\text{אם } (x,y) \in S(0^{[2]};1) \text{ מקבלים } A_{(x,y)} = \{0\}.$$

עבור כל $(x,y) \in \mathbf{R}^2$ הפונקציה $h_{(x,y)}: z \mapsto f(x,y,z)$ היא פונקציה קבועה שמוגדרת

בקבוצה $A_{(x,y)}$ ומקיימת $h_{(x,y)}(z) = g(x,y)$ לכל $z \in A_{(x,y)}$. הקבוצה $A_{(x,y)}$ היא

קטע סגור או $\{0\}$ או קבוצה ריקה, ובכל אופן בעלת נפח חד-ממדי, ולכן $h_{(x,y)}$

אינטגרלית ב- $A_{(x,y)}$. נוכל עתה להסיק ממסקנה 26.1.9 שהפונקציה

$$(x,y) \mapsto \int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z) dz$$

אינטגרלית בקבוצה $\tilde{A}$. מהי הפונקציה הזאת? ובכן:

$$\int_{A_{(x,y)}} f(x,y,z) dz = \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} g(x,y) dz = 2g(x,y)\sqrt{1-x^2-y^2}$$

$$u: (x,y) \mapsto 2g(x,y)\sqrt{1-x^2-y^2} \quad \text{כלומר קיבלנו שהפונקציה}$$

אינטגרלית בקבוצה $\tilde{A} = \bar{B}(0^{[2]};1)$. עכשיו נרצה להסיק מכך שהפונקציה g

אינטגרלית באותה קבוצה. לשם כך נשתמש במבחן לבג לאינטגרליות, או ליתר

דיוק באחת ממסקנותיו: חלק ב של מסקנה 28.1.9. ממסקנה זאת נובע שהקבוצה

$$\bar{B}(0^{[2]};1) \setminus \text{cont}(u) \quad \text{צנומה, ולכן גם } B(0^{[2]};1) \setminus \text{cont}(u) \text{ שמוכלת בה היא צנומה.}$$

$$g(x,y) = \frac{u(x,y)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}} \quad \text{לכל } (x,y) \in B(0^{[2]};1) \text{ מתקיים:}$$

המכנה הוא פונקציה רציפה וחיובית ב- $B(0^{[2]};1)$. לכן בכל נקודה $(x,y) \in B(0^{[2]};1)$

שבה u רציפה גם g רציפה, כלומר: $B(0^{[2]}; 1) \cap \text{cont}(u) \subseteq \text{cont}(g)$

לכן: $\bar{B}(0^{[2]}; 1) \setminus \text{cont}(g) \subseteq S(0^{[2]}; 1) \cup (B(0^{[2]}; 1) \setminus \text{cont}(u))$

לפי שאלה 12.ד.9 הספירה $S(0^{[2]}; 1)$ היא קבוצה צנומה, ולכן $\bar{B}(0^{[2]}; 1) \setminus \text{cont}(g)$

היא קבוצה צנומה כאיחוד של שתי קבוצות צנומות, ולפי חלק ב של מסקנה 28.ה.9

הפונקציה g היא פונקציה אינטגרבילית בקבוצה $\bar{B}(0^{[2]}; 1)$.

לשאלה 2: בסימוני מסקנה 26.ו.9 עם $k=3$ ו- $l=2$, כאשר x מוחלף ב- (x, y, z) ו- y מוחלף ב-

(u, v) , מקבלים עבור $(u, v) \in [0, \infty)^2$:

$$A_{(u,v)} = \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + u + v \leq 1 \right\}$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 - u - v \right\}$$

אם $(u, v) \in \left\{ (u, v) \in [0, \infty)^2 \mid u + v \leq 1 \right\} = \Delta_2(1)$

$$A_{(u,v)} = [0, \infty)^3 \cap \bar{B}^3(0; \sqrt{1-u-v})$$

(כאשר $1-u-v=0$ הכוונה ל"כדור סגור ברדיוס 0, דהיינו $\{0^{[3]}\}$).

אחרת $A_{(u,v)} = \emptyset$. לכן: $\tilde{A} = \Delta_2(1) = \left\{ (u, v) \in [0, \infty)^2 \mid u + v \leq 1 \right\}$

לפי מסקנה 26.ו.9, לכל פונקציה f שאינטגרבילית ב- A מתקיים:

$$\int_A f = \iint_{\tilde{A}} \left(\iiint_{A_{(u,v)}} f(x, y, z, u, v) dx dy dz \right) du dv$$

את הנפח נחשב בעזרת הפונקציה הקבועה $1: f(x, y, z, u, v) \mapsto 1$.

$$\begin{aligned} \text{vol}_5 A &= \iint_{\tilde{A}} \left(\iiint_{A_{(u,v)}} 1 dx dy dz \right) du dv = \iint_{\tilde{A}} \text{vol}_3 A_{(u,v)} du dv \\ &= \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{8} \text{vol}_3 \bar{B}^3(0; \sqrt{1-u-v}) du dv = \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \sqrt{1-u-v}^3 du dv \\ &= \frac{1}{6} \pi \iint_{\tilde{A}} (1-u-v)^{\frac{3}{2}} du dv = \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)^{\frac{3}{2}} dv \right) du \\ &= \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(\left[-\frac{2}{5} (1-u-v)^{\frac{5}{2}} \right]_{v=0}^{1-u} \right) du = \frac{1}{3.5} \pi \int_0^1 (1-u)^{\frac{5}{2}} du \\ &= \frac{1}{3.5} \pi B\left(1, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{3.5} \pi \frac{\Gamma(1) \Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(1+\frac{7}{2})} = \frac{1}{3.5} \pi \frac{\Gamma(1) \Gamma(\frac{7}{2})}{\frac{7}{2} \Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{2}{3.5 \cdot 7} \pi \end{aligned}$$

(בחישוב נעשה שימוש בנוסחות מדוגמה 9.5.13 ומדוגמה 1.ד.4).

הפונקציה האפינית $\varphi: (x, y, z, u, v) \mapsto (y, z, x, v, u)$ היא הפיכה ובבירור מקיימת

$\varphi(A) = A$. לפי שאלה 6.1.9 אם $(\xi, \eta, \zeta, \mu, \nu)$ המרכז הגיאומטרי של A אז המרכז

הגיאומטרי של $\varphi(A)$ הוא $\varphi(\xi, \eta, \zeta, \mu, \nu) = (\eta, \zeta, \xi, \nu, \mu)$

ולכן מתקיים: $(\xi, \eta, \zeta, \mu, \nu) = (\eta, \zeta, \xi, \nu, \mu)$

מזה נובע $\xi = \eta = \zeta$ ו $\mu = \nu$. לכן המרכז הגיאומטרי של A הוא נקודה מהצורה:

$$(\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$$

ועלינו לחשב את α ואת β .

את α נחשב בעזרת הפונקציה $f: (x, y, z, u, v) \mapsto z$

$$\alpha \cdot \text{vol}_5 A = \int_A f = \iint_A \left(\iiint_{A(u,v)} z \, dx \, dy \, dz \right) du \, dv$$

נחשב את האינטגרל הפנימי בעזרת טענה 42.1.9 (החלפת משתנים לשיעורים

כדוריים):

$$\begin{aligned} \iiint_{A(u,v)} z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{[0,\infty)^3 \cap \bar{B}^3(0;\sqrt{1-u-v})} z \, dx \, dy \, dz \\ &= \iiint_{[0,\sqrt{1-u-v}] \times [0,\frac{\pi}{2}] \times [0,\frac{\pi}{2}]} r \cos \phi \, r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{1-u-v}} r^3 \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{1-u-v}} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{1-u-v}^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^4} \pi (1-u-v)^2 \end{aligned}$$

$$\alpha \cdot \text{vol}_5 A = \iint_A \frac{1}{2^4} \pi (1-u-v)^2 \, du \, dv = \frac{1}{2^4} \pi \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)^2 \, dv \right) du \quad \text{אז}$$

$$= \frac{1}{2^4} \pi \int_0^1 \left(\left[-\frac{1}{3} (1-u-v)^3 \right]_{v=0}^{1-u} \right) du = \frac{1}{2^4 \cdot 3} \pi \int_0^1 (1-u)^3 \, du = \frac{1}{2^4 \cdot 3} \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^6 \cdot 3} \pi$$

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2^6 \cdot 3} \pi}{\text{vol}_5 A} = \frac{\frac{1}{2^6 \cdot 3} \pi}{\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} \pi} = \frac{5 \cdot 7}{2^7} = \frac{35}{128} \quad \text{ולכן:}$$

נחשב את β בעזרת הפונקציה $f: (x, y, z, u, v) \mapsto u$

$$\begin{aligned}
\beta \cdot \text{vol}_5 A &= \int_A f = \iint_A \left(\iiint_{A(u,v)} u \, dx dy dz \right) du dv = \iint_A \left(u \cdot \text{vol}_3 A_{(u,v)} \right) du dv \\
&= \iint_A u \cdot \frac{1}{8} \text{vol}_3 \bar{B}^3(0; \sqrt{1-u-v}) du dv = \iint_A u \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \sqrt{1-u-v}^3 du dv \\
&= \frac{1}{6} \pi \iint_A u \cdot (1-u-v)^{\frac{3}{2}} du dv = \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} u \cdot (1-u-v)^{\frac{3}{2}} dv \right) du \\
&= \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(u \cdot \int_0^{1-u} (1-u-v)^{\frac{3}{2}} dv \right) du = \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(u \cdot \left[-\frac{2}{5} (1-u-v)^{\frac{5}{2}} \right]_{v=0}^{1-u} \right) du \\
&= \frac{1}{3.5} \pi \int_0^1 u \cdot (1-u)^{\frac{5}{2}} du = \frac{1}{3.5} \pi B\left(2, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{3.5} \pi \frac{\Gamma(2) \Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(2 + \frac{7}{2})} \\
&= \frac{1}{3.5} \pi \frac{1 \cdot \Gamma(\frac{7}{2})}{\frac{7}{2} \Gamma(\frac{9}{2})} = \frac{1}{3.5} \pi \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\frac{7}{2} \cdot \frac{9}{2} \Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{2^2}{3.5 \cdot 7 \cdot 9} \pi
\end{aligned}$$

$$\beta = \frac{2^2}{3.5 \cdot 7 \cdot 9} \pi = \frac{\frac{2^2}{3.5 \cdot 7 \cdot 9} \pi}{\frac{2}{3.5 \cdot 7} \pi} = \frac{2}{9} \quad \text{אז:}$$

לכן המרכז הגיאומטרי של A הוא: $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta) = \left(\frac{35}{128}, \frac{35}{128}, \frac{35}{128}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9}\right)$

(בכתיב עשרוני מקבלים: $\alpha = \frac{35}{128} = 0.2734375$ ו- $\beta = \frac{2}{9} = 0.2222\ldots$).

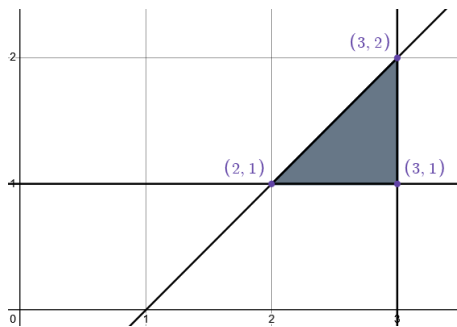
שאלה 3: על-פי 5\16\2011. יש רק קבוצה אחת המקיימת את הנתונים אבל לא דרשתי להוכיח

שזאת חייבת להיות הקבוצה כי זה נראה בעייתי ולא רצוי במסגרת הממ"ן.

נגדיר פונקציה $\varphi: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbf{R} \times (0, \infty)$ עלידי: $\varphi: (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$

נקודה $(x, y) \in (0, \infty)^2$ נמצאת באיחוד שלוש הקבוצות הנתון בשאלה אם ורק אם

$$\varphi(x, y) \in \{(u, v) \mid v=1\} \cup \{(u, v) \mid u=3\} \cup \{(x, y) \mid u-v=1\}$$



כלומר אם ורק אם $\varphi(x, y)$ נמצאת על

אחד משלושה ישרים. כל שניים מהישרים

האלה נחתכים ונקודות החיתוך הן $(3,1)$,

$(3,2)$ ו- $(2,1)$. שלושת הישרים יוצרים

משולש שאלה קודקודיו. המשולש הזה הוא

הקבוצה: $B = \{(u, v) \mid u \leq 3, v \geq 1, u - v \geq 1\}$

השפה של הקבוצה B מורכבת מאיחוד של שלושה קטעים שמוכלים בישרים דלעיל

(ממסקנה 2.ד.25 נובע בבירור ש- ∂B מוכלת באיחוד שלוש הישרים האלה).

נראה אפוא שקבוצה שמתאימה למבוקש בשאלה היא: $A = \{(x, y) \mid \varphi(x, y) \in B\}$

נוכיח זאת, ונחשב את האינטגרל המבוקש בשאלה.

ראשית נוכיח שהפונקציה φ היא דיפאומורפיזם מ- $(0, \infty)^2$ ל- $\mathbf{R} \times (0, \infty)$.

נסמן $U = (0, \infty)^2$. אם $(x, y) \in U$ אז $xy > 0$ ולכן $[\varphi(x, y)]_2 = xy > 0$ ולכן $\varphi(x, y) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$ ומכאן ש- $\varphi(U) \subseteq \mathbf{R} \times (0, \infty)$.

נראה שלכל $(u, v) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$ יש $(x, y) \in (0, \infty)^2$ יחיד כך ש- $\varphi(x, y) = (u, v)$.

זה יראה שהפונקציה חד-חד ערכית וש- $\varphi(U) = \mathbf{R} \times (0, \infty)$.

ובכן המשוואה $\varphi(x, y) = (u, v)$ פירושה:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= u \\ xy &= v \end{aligned}$$

אם זה מתקיים אז $y = \frac{v}{x}$ ולכן $x^2 - \frac{v^2}{x^2} = u$ ומכאן:

מנוסחת השורשים של משוואה ריבועית נקבל שמתקיים:

$$x^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}$$

או:

$$x^2 = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}$$

השוויון השני לא ייתכן, כי $\sqrt{u^2 + 4v^2} > \sqrt{u^2} = u$ ומכאן:

$$x^2 = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} < 0$$

לכן נכון השוויון הראשון, ולכן $x = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}$ ו- $y = \frac{v}{x} = \frac{v}{\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}}$.

זה כבר מראה שלי- $(u, v) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$ יש לכל היותר $(x, y) \in U$ יחיד כך שמתקיים

$\varphi(x, y) = (u, v)$, ולכן הפונקציה φ היא חד-חד ערכית.

כדי לראות ש- $\varphi(U) = \mathbf{R} \times (0, \infty)$ עבור $(u, v) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$ נגדיר (עלפי מה שקיבלנו

לעיל) $x = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}$ ו- $y = \frac{v}{x} = \frac{v}{\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}}$. ברור ש- x ו- y שהם חיוביים,

ולכן $(x, y) \in U$, ברור ש- $xy = v$ וכן:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} - \frac{v^2}{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}} = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} - \frac{2v^2}{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}} \\ &= \frac{(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})^2 - 4v^2}{2(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})} = \frac{(u^2 + 2u\sqrt{u^2 + 4v^2} + u^2 + 4v^2) - 4v^2}{2(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})} \\ &= \frac{2u^2 + 2u\sqrt{u^2 + 4v^2}}{2(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})} = \frac{2u(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})}{2(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})} = u \end{aligned}$$

ולכן $\varphi(x, y) = (u, v)$.

אז לכל $(u, v) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$ יש מקור $(x, y) \in U$ ולכן $\varphi(U) = \mathbf{R} \times (0, \infty)$.

זאת פונקציה פולינומית ולכן היא כמוברן רציפה והיא גם גזירה ברציפות ומתקיים:

$$J\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\det J\varphi_{(x,y)} = 2x^2 + 2y^2 > 0 \quad \text{אם } (x, y) \in U$$

ולכן מטריצת היעקוביאן $J\varphi_{(x,y)}$ הפיכה.

לכן לפי טענה 17.9.17 היא דיפאומורפיזם, מ- $U = (0, \infty)^2$ ל- $\varphi(U) = \mathbf{R} \times (0, \infty)$.

לכן היא גם הומאומורפיזם מ- U ל- $\varphi(U)$.

$$B = \{(u, v) \mid u \leq 3, v \geq 1, u - v \geq 1\} \quad \text{הקבוצה}$$

סגורה לפי חלק א של מסקנה 25.2.2, ולפי חלק ב של מסקנה 25.2.2 מתקיים $\partial B \subseteq C$

$$C = \{(u, v) \mid v = 1\} \cup \{(u, v) \mid u = 3\} \cup \{(x, y) \mid u - v = 1\} \quad \text{עם:}$$

$$2 = 1 + 1 \leq v + 1 \leq u \leq 3 \quad \text{הקבוצה } B \text{ היא חסומה: אם } (u, v) \in B \text{ אז}$$

$$1 \leq v \leq u - 1 \leq 3 - 1 = 2 \quad \text{וכן}$$

ולכן $B \subseteq [2, 3] \times [1, 2]$, וכיוון שהיא מוכלת בקבוצה חסומה (תיבה סגורה) היא עצמה

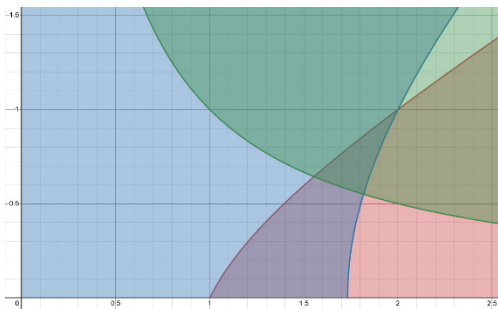
חסומה. הקבוצה C היא איחוד של שלושה ישרים ולכן היא צנומה. לפי מסקנה

9.13, הקבוצה B היא בעלת נפח. הקבוצה $A = \varphi^{-1}(B)$ סגורה וחסומה לפי טענה

29.2.29 והיא בעלת נפח לפי 21.9.21.

לפי שאלה 27.2.27 מתקיים $\varphi(\partial A) \subseteq \partial(\varphi(A)) = \partial B \subseteq C$ ולכן:

$$\partial A \subseteq \varphi^{-1}(C) = \{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 3\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - xy - y^2 = 1\}$$



נותר להראות ששטחה של הקבוצה A

(המתוארת על ידי השטח הכהה באיור)

חיובי, ולחשב את האינטגרל המבוקש.

מתקיים $B = \varphi^{-1}(A)$ לפי משפט 23.9.23

לכל פונקציה f שרציפה בקבוצה A

$$\int_A f = \int_B (f \circ \varphi^{-1}) |\det J\varphi^{-1}| \quad \text{מתקיים:}$$

נציב בנוסחה את הפונקציה $f: (x, y) \mapsto (x^4 - y^4)e^{xy}$:

$$\int_A (x^4 - y^4)e^{xy} dx dy = \int_A f = \int_B (f \circ \varphi^{-1}) |\det J\varphi^{-1}|$$

נשים לב שאם $\varphi(x, y) = (u, v)$ אז:

$$\begin{aligned}(f \circ \varphi^{-1})(u, v) &= f(\varphi^{-1}(u, v)) = f(x, y) = (x^4 - y^4)e^{xy} \\ &= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)e^{xy} = \frac{1}{2}ue^v \left| \det J\varphi_{(x,y)} \right|\end{aligned}$$

$$(f \circ \varphi^{-1})(u, v) \left| \det J\varphi^{-1}_{(u,v)} \right| = \frac{1}{2}ue^v \left| \det J\varphi_{(x,y)} \right| \left| \det J\varphi^{-1}_{(u,v)} \right| \quad \text{לכן:}$$

$$\left| \det J\varphi_{(x,y)} \right| \left| \det J\varphi^{-1}_{(u,v)} \right| = \left| \det \left(J\varphi_{(x,y)} J\varphi^{-1}_{(u,v)} \right) \right| \quad \text{מכפלות הדטרמיננטה:}$$

לפי מסקנה 2.3.2 (כלל השרשרת מנוסח ככפל מטריצות):

$$J\varphi_{(x,y)} J\varphi^{-1}_{(u,v)} = J\varphi_{\varphi^{-1}(u,v)} J\varphi^{-1}_{(u,v)} = J(\varphi^{-1} \circ \varphi)_{(u,v)}$$

וכיון ש- $\varphi \circ \varphi^{-1}$ היא פונקציית הזהות, מטריצת היעקוביאן שלה היא מטריצת

$$(f \circ \varphi^{-1})(u, v) \left| \det J\varphi^{-1}_{(u,v)} \right| = \frac{1}{2}ue^v \quad \text{היחידה, ולכן}$$

$$(f \circ \varphi^{-1}) \left| \det J\varphi^{-1} \right| : (u, v) \mapsto \frac{1}{2}ue^v \quad \text{או בצורת כתיבה אחרת:}$$

$$\iint_A (x^4 - y^4)e^{xy} dx dy = \int_A f = \int_B (f \circ \varphi^{-1}) \left| \det J\varphi^{-1} \right| = \iint_B \frac{1}{2}ue^v du dv \quad \text{קיבלנו שמתקיים:}$$

$$B = \{(u, v) \mid 2 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq u-1\} \quad \text{נציג את } B \text{ בצורה:}$$

נחשב את האינטגרל האחרון בעזרת מסקנה 20.1.9:

$$\begin{aligned}\iint_B ue^v du dv &= \int_2^3 \left(\int_1^{u-1} ue^v dv \right) du = \int_2^3 \left(u \int_1^{u-1} e^v dv \right) du = \int_2^3 \left(u \left[e^v \right]_{v=1}^{u-1} \right) du \\ &= \int_2^3 \left(u(e^{u-1} - e^1) \right) du = \int_2^3 (ue^{u-1} - eu) du \\ &= e^{-1} \int_2^3 ue^u du - e \int_2^3 u du = e^{-1} \left[(u-1)e^u \right]_2^3 - e \left[\frac{1}{2}u^2 \right]_2^3 \\ &= e^{-1} \left((3-1)e^3 - (2-1)e^2 \right) - \frac{1}{2}e(e^3 - e^2) = 2e^2 - e - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e^3\end{aligned}$$

לכן:

$$\iint_A (x^4 - y^4)e^{xy} dx dy = \iint_B \frac{1}{2}ue^v du dv = \frac{1}{2} \left(2e^2 - e - \frac{1}{2}e^4 + \frac{1}{2}e^3 \right) = e^2 - \frac{1}{2}e - \frac{1}{4}e^4 + \frac{1}{4}e^3$$

אפשר לבדוק שהמספר שקיבלנו אינו אפס, ולכן לפי שאלה 8.7.9 הקבוצה A אינה

בעלת שטח אפס. לכן שטחה חיובי. אפשר גם יותר בקלות לראות שאם $(u, v) \in B$ אז

$$\frac{1}{2}ue^v \geq \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot e^1 = e \quad \text{ולכן } u \geq 2 \text{ ו- } v \geq 1$$

$$\iint_A (x^4 - y^4)e^{xy} dx dy = \iint_B \frac{1}{2}ue^v du dv \geq e \operatorname{vol}_2 B = \frac{e}{2} > 0$$

שאלה 4: 5\85\2024. באופן כללי עבור $f: x \mapsto |x|^\alpha$ האינטגרל הזה מתכנס אם ורק אם

$$k > \alpha + 3, \text{ ובנתוני השאלה אם ורק אם } k > 2028 \text{ דהיינו } k \geq 2029.$$

הפונקציה f אישלילית והסדרה $\left(\int_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f \right)_{N=1}^{\infty}$ היא סדרת קירוב ל- $\int_A f$.

נשים לב ש- $B_n = A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m = \left[0, \frac{1}{n}\right]^{k-1} \times (n-1, n]$ ו- $\int_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f = \int_{\bigcup_{n=1}^N B_n} f = \sum_{n=1}^N \int_{B_n} f$.

אם $x \in B_n$ אז בבירור $[x]_k > n-1$ וכן $[x]_i \leq n$ ו- $[x]_i \leq n$ עבור $i = 1, \dots, k$ ולכן

$$|x| \leq |[x]_1| + \dots + |[x]_k| \leq kn \quad \text{גם:}$$

$$\left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} n^{\alpha} = (n-1)^{\alpha} < f(x) \leq k^{\alpha} n^{\alpha} \quad \text{לכן:}$$

$$\int_{B_n} f \leq \int_{B_n} k^{\alpha} n^{\alpha} = k^{\alpha} n^{\alpha} \text{vol}_k(B_n) = k^{\alpha} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} n = k^{\alpha} n^{\alpha+2-k} \quad \text{נקבל}$$

$$\int_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f = \sum_{n=1}^N \int_{B_n} f \leq k^{\alpha} \sum_{n=1}^N n^{\alpha+2-k} \quad \text{ולכן:}$$

לכן אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+2-k}$ מתכנס אז סדרת הקירוב $\left(\int_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f \right)_{N=1}^{\infty}$ חסומה.

כמוכן עבור $n \geq 2$ מתקיים

$$\int_{B_n} f \geq \int_{B_n} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} n^{\alpha} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} n^{\alpha} \text{vol}_k(B_n) = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{\alpha} n^{\alpha} \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} n \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} n^{\alpha+2-k}$$

$$\int_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f = \sum_{n=1}^N \int_{B_n} f \geq \int_{B_1} f + \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \sum_{n=2}^N n^{\alpha+2-k} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha} \sum_{n=2}^N n^{\alpha+2-k} \quad \text{ולכן:}$$

אם סדרת הקירוב $\left(\int_{\bigcup_{n=1}^N A_n} f \right)_{N=1}^{\infty}$ חסומה אז גם הסדרה $\left(\sum_{n=2}^N n^{\alpha+2-k} \right)_{N=2}^{\infty}$ חסומה

ולכן הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+2-k}$ מתכנס. הטור הזה מתכנס אם ורק אם $\alpha + 2 - k < -1$ דהיינו

אם ורק אם $k > \alpha + 3 = 2028$, כלומר אם ורק אם $k \geq 2029$.

לשאלה 5: 3\16ב2013 עם התאמות ניסוח קלות מאוד.

המסילה $\varphi_1: [0, \pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ הנתונה על ידי $t \mapsto (1 + \cos t, \sin t)$ היא מסילה פשוטה

שתמונתה שווה לתמונת המסילה φ . לפי טענה 8.א.13 המסילה φ_1 שקולה למסילה φ

או למסילה $\bar{\varphi}$. מאחר שנקודת המוצא של φ היא $(0, 0) = \varphi_1(\pi)$, כלומר נקודת היעד

של φ_1 , המסילה φ_1 שקולה למסילה $\bar{\varphi}$. נגדיר מסילה נוספת $\varphi_2: [0, 2] \rightarrow \mathbf{R}^2$ על ידי

$$K = (\mathbf{R} \times [0, \infty)) \cap \bar{B}((1, 0); 1) \quad \text{: וקבוצה } t \mapsto (t, 0)$$

הקבוצה K היא קבוצה סגורה כחיתוך של שתי קבוצות סגורות, והיא חסומה כי היא

מוכלת בכדור. לפי שאלה 27.א.2 אפשר לראות ש- $\partial K \subseteq (\mathbf{R} \times \{0\}) \cup S((1,0);1)$ וכיוון

שגם $\partial K \subseteq K$ מתקיים:

$$\begin{aligned}\partial K &\subseteq K \cap ((\mathbf{R} \times \{0\}) \cup S((1,0);1)) \\ &= ([0,2] \cap \{0\}) \cup ((\mathbf{R} \times [0,\infty)) \cap S((1,0);1)) = \text{Im } \varphi_1 \cup \text{Im } \varphi_2\end{aligned}$$

מצד שני, לא קשה לבדוק שכל נקודה בקבוצה $\text{Im } \varphi_1 \cup \text{Im } \varphi_2$ היא נקודת שפה של K .

נותר עוד לבדוק שהקבוצה K שוכנת לשמאל המסילה φ_1 ולשמאל המסילה φ_2 כדי

לראות ש המסילות φ_1 ו- φ_2 והקבוצה K מקיימות יחד את הנחות משפט גרין (מינוח

9.ט.14). אפשר לקבל את החסר עלידי הפעלת ההזזה $(x,y) \mapsto (x+1,y)$ על נתוני

שאלה 9.ט.10. לכן לפי משפט גרין (משפט 9.ט.17):

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \int_{\varphi_1} Pdx + Qdy + \int_{\varphi_2} Pdx + Qdy$$

ראינו ש- φ_1 שקולה ל- $\bar{\varphi}$ ולפי טענה 15.1.8:

$$\int_{\varphi} Pdx + Qdy = - \int_{\varphi_1} Pdx + Qdy = \int_{\varphi_2} Pdx + Qdy - \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$$

ממשפט 24.1.8 נקבל:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi_2} Pdx + Qdy &= \int_0^2 (P(\varphi_2(t)), Q(\varphi_2(t))) \cdot \dot{\varphi}_2(t) dt \\ &= \int_0^2 (P(t,0), Q(t,0)) \cdot (1,0) dt = \int_0^2 P(t,0) dt = \int_0^2 0 dt = 0\end{aligned}$$

נותר לחשב את האינטגרל הכפול:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \left(-\frac{y}{(1+x+y)^2} + 3x^2 + \frac{1}{1+x+y} \right) - \left(\frac{(1+x+y)-y}{(1+x+y)^2} - 3y^2 \right) \\ &= -\frac{y}{(1+x+y)^2} + 3x^2 + \frac{1}{1+x+y} - \frac{1+x}{(1+x+y)^2} + 3y^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 + \frac{1}{1+x+y} - \frac{1+x+y}{(1+x+y)^2} = 3x^2 + 3y^2\end{aligned}$$

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 \iint_K (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{אז:}$$

את האינטגרל האחרון נחשב בעזרת החלפת משתנים לשיעורים קוטביים במישור,

דהיינו לפי מסקנה 36.1.9. לשם כך דרושה לנו קבוצה $A \subseteq [0,\infty) \times [0,2\pi]$ (שהיא

סגורה חסומה ובעלת שטח) כך שמתקיים: $K = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid (r, \theta) \in A\}$

מתקיים: $K = (\mathbf{R} \times [0,\infty)) \cap \bar{B}((1,0);1) = \{(x,y) \mid y \geq 0, |(x,y) - (1,0)| \leq 1\}$

$$= \{(x,y) \mid y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x,y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x\}$$

אז $(r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \leq r \cos \theta$ וגם $r \sin \theta \geq 0$ אם ורק אם $(r \cos \theta, r \sin \theta) \in K$

המגבלה הראשונה $r \sin \theta \geq 0$ תתקבל מ- $\theta \in [0, \pi]$.

מאחר ש- $r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2$ המגבלה השנייה שקולה ל-

$r^2 \leq r \cos \theta$, ולמעט $r = 0$ זה שקול ל- $r \leq \cos \theta$.

לכן נגדיר $A = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \mid r \leq \cos \theta\}$

ונקבל: $K = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid (r, \theta) \in A\}$

אז: $\iint_K (x^2 + y^2) dx dy = \iint_A r^2 \cdot r dr d\theta$

$$= \int_0^\pi \left(\int_0^{\cos \theta} r^3 dr \right) d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta$$

נשתמש בנוסחה $\cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1$ אז

אז $\cos^4 \theta = (\cos^2 \theta)^2 = \frac{1}{4} (1 + \cos 2\theta)^2 = \frac{1}{4} (1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta)$

$$= \frac{1}{4} \left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2} (1 + \cos 4\theta) \right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2\theta + \frac{1}{8} \cos 4\theta$$

ולכן $\int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta = \int_0^\pi \frac{3}{8} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos 4\theta d\theta$

$$= \frac{3}{8} \pi + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^\pi = \frac{3}{8} \pi$$

ולבסוף: $\int_{\varphi} P dx + Q dy = \int_{\varphi_2} P dx + Q dy - \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$

$$= 0 - 3 \iint_K (x^2 + y^2) dx dy = -3 \cdot \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta = -3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8} \pi = -\frac{9}{32} \pi$$