

מתווה לפתרון ממ"ן 15

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 9

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי g פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$.

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^3$ ל- $\mathbb{R}$ שמוגדרת עלידי :

$$f : (x, y, z) \mapsto g(x, y) \quad \text{הוכיחו שאם } f \text{ אינטגרבילית ב- } \bar{B}(0^{[3]}; 1) \text{ אז } g \text{ אינטגרבילית ב- } \bar{B}(0^{[2]}; 1).$$

הצעה : אחת ממסקנות משפט פויבני יכולה להועיל. גם מבחן לבג לאינטגרביליות יכול להועיל.

פתרון

נשתמש במסקנה 26.1.9 (עם תמורה מסויימת של סדר המשתנים).

$$A = \bar{B}(0^{[3]}; 1) \quad \text{נסמן } A = \bar{B}(0^{[3]}; 1) \text{ ולכל } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ נסמן : } A_{(x,y)} = \{z \in \mathbb{R} \mid (x, y, z) \in A\}$$

סימון זה דומה לסימון 24.1.9 עם $k=1$ ו- $l=2$, כאשר אנו ממירים נקודה $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$\text{ב- } \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2 \text{ : } (z, (x, y)) \in \mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^2$$

$$\tilde{A} = \{(x, y) \mid A_{(x,y)} \neq \emptyset\} \quad \text{בדומה לסימון במסקנה 26.1.9, נסמן :}$$

$$z \in A_{(x,y)} \Leftrightarrow (x, y, z) \in A \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \Leftrightarrow z^2 \leq 1 - x^2 - y^2 \quad \text{מתקיים}$$

$$\tilde{A} = \bar{B}(0^{[2]}; 1) \quad \text{ולכן } A_{(x,y)} \neq \emptyset \text{ אם ורק אם } x^2 + y^2 \leq 1, \text{ כלומר}$$

$$A_{(x,y)} = \left[-\sqrt{1-x^2-y^2}, \sqrt{1-x^2-y^2} \right] \quad \text{ועבור } (x, y) \in \tilde{A} \text{ מתקיים :}$$

$$\text{אם } (x, y) \in S(0^{[2]}; 1) \text{ מקבלים } A_{(x,y)} = \{0\}.$$

עבור כל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ הפונקציה $h_{(x,y)} : z \mapsto f(x, y, z)$ היא פונקציה קבועה שמוגדרת בקבוצה

$A_{(x,y)}$ ומקיימת $h_{(x,y)}(z) = g(x, y)$ לכל $z \in A_{(x,y)}$. היא קטע סגור או $\{0\}$ או

קבוצה ריקה, ובכל אופן בעלת נפח חד-ממדי, ולכן $h_{(x,y)}$ אינטגרבילית ב- $A_{(x,y)}$.

$$u : (x, y) \mapsto \int_{A_{(x,y)}} f(x, y, z) dz \quad \text{נוכל עתה להסיק ממסקנה 26.1.9 שהפונקציה}$$

אינטגרבילית בקבוצה $\tilde{A}$. מהי הפונקציה הזאת? ובכן :

$$\int_{A_{(x,y)}} f(x, y, z) dz = \int_{-\sqrt{1-x^2-y^2}}^{\sqrt{1-x^2-y^2}} g(x, y) dz = 2g(x, y)\sqrt{1-x^2-y^2}$$

כלומר קיבלנו שהפונקציה $u : (x, y) \mapsto 2g(x, y)\sqrt{1-x^2-y^2}$

אינטגרבילית בקבוצה $\tilde{A} = \bar{B}(0^{[2]}; 1)$.

עכשיו נרצה להסיק מכך שהפונקציה g אינטגרבילית באותה קבוצה. לשם כך נשתמש במבחן לבג לאינטגרביליות, או ליתר דיוק באחת ממסקנותיו: חלק ב של מסקנה 9.ה.28. ממסקנה זאת נובע שהקבוצה $\bar{B}(0^{[2]}; 1) \setminus \text{cont}(u)$ צנומה, ולכן גם $B(0^{[2]}; 1) \setminus \text{cont}(u)$ שמוכלת בה היא צנומה.

לכל $(x, y) \in B(0^{[2]}; 1)$ מתקיים:

$$g(x, y) = \frac{u(x, y)}{2\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

המכנה הוא פונקציה רציפה וחיובית ב- $B(0^{[2]}; 1)$. לכן בכל נקודה $(x, y) \in B(0^{[2]}; 1)$ שבה u

רציפה גם g רציפה, כלומר:

$$B(0^{[2]}; 1) \cap \text{cont}(u) \subseteq \text{cont}(g)$$

לכן:

$$\bar{B}(0^{[2]}; 1) \setminus \text{cont}(g) \subseteq S(0^{[2]}; 1) \cup (B(0^{[2]}; 1) \setminus \text{cont}(u))$$

לפי שאלה 9.ד.12 הספירה $S(0^{[2]}; 1)$ היא קבוצה צנומה, ולכן $\bar{B}(0^{[2]}; 1) \setminus \text{cont}(g)$ היא קבוצה

צנומה כאיחוד של שתי קבוצות צנומות, ולפי חלק ב של מסקנה 9.ה.28 הפונקציה g היא

פונקציה אינטגרבילית בקבוצה $\bar{B}(0^{[2]}; 1)$.

שאלה 2 (20 נקודות)

חשבו את הנפח ה-5 ממדי ואת המרכז הגיאומטרי של הקבוצה:

$$A = \left\{ (x, y, z, u, v) \in [0, \infty)^5 \mid x^2 + y^2 + z^2 + u + v \leq 1 \right\}$$

עצות: דרך אפשרית היא להשתמש במשפט 26.1.9 עם $k=3$ ו- $l=2$. יתכן שפונקציות גמא ובטא תסייענה.

תוכלו להראות בעזרת שאלה 6.1.9 שחלק משיעורי המרכז הגיאומטרי של הקבוצה שווים זה לזה.

פתרון

בסימוני מסקנה 26.1.9 עם $k=3$ ו- $l=2$, כאשר x מוחלף ב- (x, y, z) ו- y מוחלף ב- (u, v) ,

$$A_{(u,v)} = \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 + u + v \leq 1 \right\} : (u, v) \in [0, \infty)^2$$

$$= \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 - u - v \right\}$$

$$A_{(u,v)} = [0, \infty)^3 \cap \bar{B}^3(0; \sqrt{1-u-v}) \quad \text{אם } (u, v) \in \left\{ (u, v) \in [0, \infty)^2 \mid u + v \leq 1 \right\}$$

$$(\text{כאשר } 1-u-v=0 \text{ הכוונה ל"כדור סגור ברדיוס 0", דהיינו } A_{(u,v)} = \{0^{[3]}\}).$$

$$\tilde{A} = \Delta_2(1) = \left\{ (u, v) \in [0, \infty)^2 \mid u + v \leq 1 \right\} \quad \text{אחרת } A_{(u,v)} = \emptyset. \text{ לכן:}$$

לפי מסקנה 26.1.9, לכל פונקציה f שאינטגרבילית ב- A מתקיים:

$$\int_A f = \iint_{\tilde{A}} \left(\iiint_{A_{(u,v)}} f(x, y, z, u, v) dx dy dz \right) du dv$$

את הנפח ה-5 ממדי של A נחשב בעזרת הפונקציה הקבועה $1 \mapsto f(x, y, z, u, v)$:

$$\begin{aligned} \text{vol}_5 A &= \iint_{\tilde{A}} \left(\iiint_{A_{(u,v)}} 1 dx dy dz \right) du dv = \iint_{\tilde{A}} \text{vol}_3 A_{(u,v)} du dv = \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{8} \text{vol}_3 \bar{B}^3(0; \sqrt{1-u-v}) du dv \\ &= \iint_{\tilde{A}} \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \sqrt{1-u-v}^3 du dv = \frac{1}{6} \pi \iint_{\tilde{A}} (1-u-v)^{\frac{3}{2}} du dv = \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)^{\frac{3}{2}} dv \right) du \\ &= \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left[-\frac{2}{5} (1-u-v)^{\frac{5}{2}} \right]_{v=0}^{1-u} du \\ &= \frac{1}{3.5} \pi \int_0^1 (1-u)^{\frac{5}{2}} du = \frac{1}{3.5} \pi B\left(1, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{3.5} \pi \frac{\Gamma(1) \Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(1+\frac{7}{2})} = \frac{1}{3.5} \pi \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\frac{7}{2} \Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{2}{3.5 \cdot 7} \pi \end{aligned}$$

(בחישוב נעשה שימוש בנוסחות מדוגמאות 31.1.9 ו-13.ח.9, 1.ד.4).

הפונקציה האפינית $\varphi: (x, y, z, u, v) \mapsto (y, z, x, v, u)$ היא הפיכה ובבירור מקיימת $\varphi(A) = A$.

לפי שאלה 6.1.9 אם $(\xi, \eta, \zeta, \mu, \nu)$ המרכז הגיאומטרי של A אז המרכז הגיאומטרי של $\varphi(A)$

$$(\xi, \eta, \zeta, \mu, \nu) = (\eta, \zeta, \xi, \nu, \mu) \quad \text{הוא } \varphi(\xi, \eta, \zeta, \mu, \nu) \text{ ולכן מתקיים:}$$

מזה נובע $\xi = \eta = \zeta$ ו- μ . לכן המרכז הגיאומטרי של A הוא נקודה מהצורה $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta)$ ועלינו לחשב את α ואת β .

את α נחשב בעזרת הפונקציה $f: (x, y, z, u, v) \mapsto z$: $\alpha \cdot \text{vol}_5 A = \int_A f = \iint_{\tilde{A}} \left(\iiint_{A(u,v)} z \, dx \, dy \, dz \right) du \, dv$

נחשב את האינטגרל הפנימי בעזרת טענה 42.2.9 (החלפת משתנים לשיעורים כדוריים):

$$\begin{aligned} \iiint_{A(u,v)} z \, dx \, dy \, dz &= \iiint_{[0,\infty)^3 \cap \bar{B}^3(0; \sqrt{1-u-v})} z \, dx \, dy \, dz = \iiint_{[0, \sqrt{1-u-v}] \times [0, \frac{\pi}{2}] \times [0, \frac{\pi}{2}]} r \cos \phi \, r^2 \sin \phi \, dr \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{\sqrt{1-u-v}} r^3 \, dr \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin \phi \cos \phi \, d\phi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\ &= \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\sqrt{1-u-v}} \cdot \left[\frac{1}{2} \sin^2 \phi \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{4} \sqrt{1-u-v}^4 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{1}{2^4} \pi (1-u-v)^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \text{vol}_5 A &= \iint_A \frac{1}{2^4} \pi (1-u-v)^2 \, du \, dv = \frac{1}{2^4} \pi \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} (1-u-v)^2 \, dv \right) du \\ &= \frac{1}{2^4} \pi \int_0^1 \left(\left[-\frac{1}{3} (1-u-v)^3 \right]_{v=0}^{1-u} \right) du = \frac{1}{2^4 \cdot 3} \pi \int_0^1 (1-u)^3 \, du = \frac{1}{2^4 \cdot 3} \pi \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2^6 \cdot 3} \pi \end{aligned}$$

$$\alpha = \frac{\frac{1}{2^6 \cdot 3} \pi}{\text{vol}_5 A} = \frac{\frac{1}{2^6 \cdot 3} \pi}{\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} \pi} = \frac{5 \cdot 7}{2^7} = \frac{35}{128}$$

ולכן:

נחשב את β בעזרת הפונקציה $f: (x, y, z, u, v) \mapsto u$

$$\begin{aligned} \beta \cdot \text{vol}_5 A &= \int_A f = \iint_{\tilde{A}} \left(\iiint_{A(u,v)} u \, dx \, dy \, dz \right) du \, dv = \iint_{\tilde{A}} \left(u \cdot \text{vol}_3 A(u,v) \right) du \, dv \\ &= \iint_{\tilde{A}} u \cdot \frac{1}{8} \text{vol}_3 \bar{B}^3(0; \sqrt{1-u-v}) \, du \, dv = \iint_{\tilde{A}} u \cdot \frac{1}{8} \cdot \frac{4}{3} \pi \sqrt{1-u-v}^3 \, du \, dv \\ &= \frac{1}{6} \pi \iint_{\tilde{A}} u \cdot (1-u-v)^{\frac{3}{2}} \, du \, dv = \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(\int_0^{1-u} u \cdot (1-u-v)^{\frac{3}{2}} \, dv \right) du \\ &= \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(u \cdot \int_0^{1-u} (1-u-v)^{\frac{3}{2}} \, dv \right) du = \frac{1}{6} \pi \int_0^1 \left(u \cdot \left[-\frac{2}{5} (1-u-v)^{\frac{5}{2}} \right]_{v=0}^{1-u} \right) du \\ &= \frac{1}{3 \cdot 5} \pi \int_0^1 u \cdot (1-u)^{\frac{5}{2}} \, du = \frac{1}{3 \cdot 5} \pi B\left(2, \frac{7}{2}\right) = \frac{1}{3 \cdot 5} \pi \frac{\Gamma(2) \Gamma(\frac{7}{2})}{\Gamma(2 + \frac{7}{2})} \\ &= \frac{1}{3 \cdot 5} \pi \frac{1 \cdot \Gamma(\frac{7}{2})}{(1 + \frac{7}{2}) \Gamma(1 + \frac{7}{2})} = \frac{1}{3 \cdot 5} \pi \frac{\Gamma(\frac{7}{2})}{\frac{9}{2} \cdot \frac{7}{2} \Gamma(\frac{7}{2})} = \frac{2^2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \pi \end{aligned}$$

$$\beta = \frac{\frac{2^2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \pi}{\text{vol}_5 A} = \frac{\frac{2^2}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9} \pi}{\frac{2}{3 \cdot 5 \cdot 7} \pi} = \frac{2}{9}$$

אז:

לכן המרכז הגיאומטרי של A הוא: $(\alpha, \alpha, \alpha, \beta, \beta) = \left(\frac{35}{128}, \frac{35}{128}, \frac{35}{128}, \frac{2}{9}, \frac{2}{9} \right)$

(בכתיב עשרוני מקבלים: $\alpha = \frac{35}{128} = 0.2734375$ ו- $\beta = \frac{2}{9} = 0.2222\ldots$).

שאלה 3 (20 נקודות)

מצאו קבוצה סגורה וחסומה $A \subseteq (0, \infty)^2$ ששטחה חיובי, ושפתה מוכלת באיחוד הקבוצות

$$\{(x, y) \mid xy=1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 3\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - xy - y^2 = 1\}$$

וחשבו את האינטגרל:

$$\iint_A (x^4 - y^4) e^{xy} dx dy$$

הדרכה: היעזרו בפונקציה $\varphi: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (0, \infty)$ המוגדרת עלידי $\varphi: (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$.

פתרון

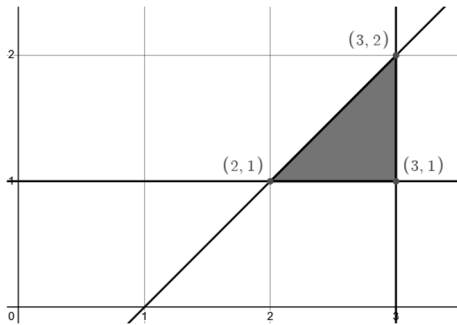
נגדיר פונקציה $\varphi: (0, \infty)^2 \rightarrow \mathbb{R} \times (0, \infty)$ עלידי:

$$\varphi: (x, y) \mapsto (x^2 - y^2, xy)$$

נקודה $(x, y) \in (0, \infty)^2$ נמצאת באיחוד שלוש הקבוצות הנתון בשאלה אם ורק אם

$$\varphi(x, y) \in \{(u, v) \mid v=1\} \cup \{(u, v) \mid u=3\} \cup \{(x, y) \mid u-v=1\}$$

כלומר אם ורק אם $\varphi(x, y)$ נמצאת על אחד משלושה ישרים. כל שניים מהישרים האלה נחתכים



ונקודות החיתוך הן $(3, 1)$, $(3, 2)$ ו- $(2, 1)$. שלושת הישרים יוצרים משולש שאלה קודקודיו. המשולש הזה

הוא הקבוצה: $B = \{(u, v) \mid u \leq 3, v \geq 1, u - v \geq 1\}$

השפה של הקבוצה B מורכבת מאיחוד של שלושה קטעים שמוכלים בישרים דלעיל (ממסקנה 25.2.2 נובע בבירור ש- ∂B מוכלת באיחוד שלושת הישרים האלה).

נראה אפוא שקבוצה שמקיימת את המבוקש בשאלה היא:

נוכיח זאת, ונחשב את האינטגרל המבוקש בשאלה.

ראשית נוכיח שהפונקציה φ היא דיפאומורפיזם מ- $(0, \infty)^2$ ל- $\mathbb{R} \times (0, \infty)$.

נסמן $U = (0, \infty)^2$. אם $(x, y) \in U$ אז $xy > 0$ ולכן $[\varphi(x, y)]_2 = xy > 0$ ולכן $\varphi(x, y) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$

ומכאן ש- $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

נראה שלכל $(u, v) \in \mathbb{R} \times (0, \infty)$ יש $(x, y) \in (0, \infty)^2$ יחיד כך ש- $\varphi(x, y) = (u, v)$.

זה יראה שהפונקציה חד-חד-ערכית וש- $\varphi(U) = \mathbb{R} \times (0, \infty)$.

ובכן המשוואה $\varphi(x, y) = (u, v)$ פירושה:

$$x^2 - y^2 = u$$

$$xy = v$$

$$x^4 - ux^2 - v^2 = 0$$

אם זה מתקיים אז $y = \frac{v}{x}$ ולכן $x^2 - \frac{v^2}{x^2} = u$ ומכאן:

$$x^2 = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} \quad \text{מנוסחת השורשים של משוואה ריבועית נקבל שמתקיים}$$

$$x^2 = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} \quad \text{או:}$$

$$x^2 = \frac{u - \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} < 0 \quad \text{השוויון השני לא ייתכן, כי } \sqrt{u^2 + 4v^2} > \sqrt{u^2} = u \text{ ומכאן:}$$

$$x = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}} \quad \text{ולכן } y = \frac{v}{\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}}$$

זה מראה של- $(u, v) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$ יש לכל היותר $(x, y) \in U$ יחיד כך שמתקיים $\varphi(x, y) = (u, v)$, ולכן הפונקציה φ היא חד-חד-ערכית. כדי לראות ש- $\varphi(U) = \mathbf{R} \times (0, \infty)$ עבור $(u, v) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$

$$x = \sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}} \quad \text{נגדיר (עלפי מה שקיבלנו לעיל)}$$

$$y = \frac{v}{\sqrt{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}}} \quad \text{ו}$$

ברור ש- x ו- y שהם חיוביים, ולכן $(x, y) \in U$. ברור ש- $xy = v$ וכן:

$$\begin{aligned} x^2 - y^2 &= \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} - \frac{v^2}{\frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2}} = \frac{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}}{2} - \frac{2v^2}{u + \sqrt{u^2 + 4v^2}} \\ &= \frac{(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})^2 - 4v^2}{2(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})} = \frac{(u^2 + 2u\sqrt{u^2 + 4v^2} + u^2 + 4v^2) - 4v^2}{2(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})} \\ &= \frac{2u^2 + 2u\sqrt{u^2 + 4v^2}}{2(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})} = \frac{2u(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})}{2(u + \sqrt{u^2 + 4v^2})} = u \end{aligned}$$

ולכן $\varphi(x, y) = (u, v)$. אז לכל $(u, v) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$ יש מקור $(x, y) \in U$ ולכן $\varphi(U) = \mathbf{R} \times (0, \infty)$. הפונקציה φ היא פולינומית ולכן היא כמובן רציפה והיא גם גזירה ברציפות ומתקיים:

$$J\varphi_{(x,y)} = \begin{pmatrix} 2x & -2y \\ y & x \end{pmatrix}$$

$$\det J\varphi_{(x,y)} = 2x^2 + 2y^2 > 0 \quad \text{אם } (x, y) \in U$$

ולכן מטריצת היעקוביאן $J\varphi_{(x,y)}$ הפיכה.

לכן לפי טענה 17.9.17 הפונקציה φ היא דיפאומורפיזם, מ- $U = (0, \infty)^2$ ל- $\varphi(U) = \mathbf{R} \times (0, \infty)$.

לכן היא גם הומאומורפיזם מ- U ל- $\varphi(U)$.

$$B = \{(u, v) \mid u \leq 3, v \geq 1, u - v \geq 1\} \quad \text{הקבוצה}$$

סגורה לפי חלק א של מסקנה 25.ד.2, ולפי חלק ב של מסקנה 25.ד.2 מתקיים $\partial B \subseteq C$ עם:

$$C = \{(u, v) \mid v = 1\} \cup \{(u, v) \mid u = 3\} \cup \{(x, y) \mid u - v = 1\}$$

$$2 = 1 + 1 \leq v + 1 \leq u \leq 3 \quad \text{הקבוצה } B \text{ היא חסומה: אם } (u, v) \in B \text{ אז}$$

$$1 \leq v \leq u - 1 \leq 3 - 1 = 2 \quad \text{וכן}$$

ולכן $B \subseteq [2, 3] \times [1, 2]$, וכיוון שהיא מוכלת בקבוצה חסומה (תיבה סגורה) היא עצמה חסומה.

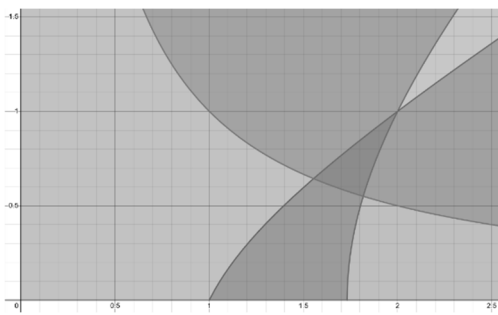
הקבוצה C היא איחוד של שלושה ישרים במישור ולכן היא צנומה. לכן ∂B צנומה, ולפי מסקנה

9.ה.13, הקבוצה B היא בעלת נפח. הקבוצה $A = \varphi^{-1}(B)$ סגורה וחסומה לפי טענה 29.ד.2 והיא

בעלת נפח לפי טענה 21.י.9.

לפי שאלה 27.ד.2 מתקיים $\varphi(\partial A) \subseteq \partial(\varphi(A)) = \partial B \subseteq C$ ולכן:

$$\partial A \subseteq \varphi^{-1}(C) = \{(x, y) \mid xy = 1\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - y^2 = 3\} \cup \{(x, y) \mid x^2 - xy - y^2 = 1\}$$



נותר להראות ששטחה של הקבוצה A (המתוארת

עלידי השטח הכהה באיור) חיובי, ולחשב את

האינטגרל המבוקש.

מתקיים $B = \varphi^{-1}(A)$. לפי משפט 23.י.9 לכל

פונקציה f שרציפה בקבוצה A מתקיים:

$$\int_A f = \int_B (f \circ \varphi^{-1}) |\det J\varphi^{-1}|$$

נציב בנוסחה את הפונקציה $f: (x, y) \mapsto (x^4 - y^4)e^{xy}$:

$$\iint_A (x^4 - y^4)e^{xy} dx dy = \int_A f = \int_B (f \circ \varphi^{-1}) |\det J\varphi^{-1}|$$

$$(f \circ \varphi^{-1})(u, v) = f(\varphi^{-1}(u, v)) = f(x, y) = (x^4 - y^4)e^{xy} \quad \text{אז } \varphi(x, y) = (u, v) \text{ נשים לב שאם}$$

$$= (x^2 + y^2)(x^2 - y^2)e^{xy} = \frac{1}{2}ue^v |\det J\varphi_{(x,y)}|$$

$$(f \circ \varphi^{-1})(u, v) |\det J\varphi^{-1}_{(u,v)}| = \frac{1}{2}ue^v |\det J\varphi_{(x,y)}| |\det J\varphi^{-1}_{(u,v)}| \quad \text{לכן:}$$

$$|\det J\varphi_{(x,y)}| |\det J\varphi^{-1}_{(u,v)}| = |\det (J\varphi_{(x,y)} J\varphi^{-1}_{(u,v)})| \quad \text{מכפלות הדטרמיננטה:}$$

לפי מסקנה 2.י.3 (כלל השרשרת מנוסח ככפל מטריצות):

$$J\varphi_{(x,y)} J\varphi^{-1}_{(u,v)} = J\varphi_{\varphi^{-1}(u,v)} J\varphi^{-1}_{(u,v)} = J(\varphi \circ \varphi^{-1})_{(u,v)}$$

וכיון ש- $\varphi \circ \varphi^{-1}$ היא פונקציית הזהות, מטריצת היעקוביאן שלה היא מטריצת היחידה, ולכן

$$(f \circ \varphi^{-1})(u, v) |\det J\varphi^{-1}_{(u,v)}| = \frac{1}{2}ue^v$$

$$(f \circ \varphi^{-1}) |\det J\varphi^{-1}| : (u, v) \mapsto \frac{1}{2}ue^v \quad \text{או בצורת כתיבה אחרת:}$$

$$\iint_A (x^4 - y^4) e^{xy} dx dy = \int_A f = \int_B (f \circ \varphi^{-1}) |\det J\varphi^{-1}| = \iint_B \frac{1}{2} u e^v du dv \quad \text{קיבלנו שמתקיים:}$$

$$B = \{(u, v) \mid 2 \leq u \leq 3, 1 \leq v \leq u-1\} \quad \text{נציג את } B \text{ בצורה:}$$

נחשב את האינטגרל האחרון בעזרת מסקנה 20.1.9:

$$\begin{aligned} \iint_B u e^v du dv &= \int_2^3 \left(\int_1^{u-1} u e^v dv \right) du = \int_2^3 \left(u \int_1^{u-1} e^v dv \right) du = \int_2^3 \left(u \left[e^v \right]_{v=1}^{u-1} \right) du \\ &= \int_2^3 \left(u (e^{u-1} - e^1) \right) du = \int_2^3 (u e^{u-1} - e u) du \\ &= e^{-1} \int_2^3 u e^u du - e \int_2^3 u du = e^{-1} \left[(u-1) e^u \right]_2^3 - e \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_2^3 \\ &= e^{-1} \left((3-1) e^3 - (2-1) e^2 \right) - \frac{1}{2} e (3^2 - 2^2) = 2e^2 - e - \frac{5}{2} e = 2e^2 - \frac{7}{2} e \end{aligned}$$

$$\iint_A (x^4 - y^4) e^{xy} dx dy = \iint_B \frac{1}{2} u e^v du dv = \frac{1}{2} \left(2e^2 - \frac{7}{2} e \right) = e^2 - \frac{7}{4} e = e(e - 1.75) > 0 \quad \text{לכן:}$$

האינטגרל אינו אפס, ולכן לפי שאלה 8.ד.9 הקבוצה A אינה בעלת שטח אפס. לכן שטחה חיובי.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי $k \geq 2$ טבעי. תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $x \mapsto |x|^{2025}$.

לכל מספר טבעי n נסמן $A_n = [0, \frac{1}{n}]^{k-1} \times [0, n]$, ונסמן גם $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

קבעו עבור אילו ערכים של k האינטגרל המוכלל מתכנס.

פתרון

נראה שאם $\alpha > 0$ ו- $f: x \mapsto |x|^\alpha$ האינטגרל $\int_A f$ מתכנס אם ורק אם $k > \alpha + 3$.

בנתוני השאלה $\alpha = 2025$ ולכן האינטגרל מתכנס אם ורק אם $k > 2028$ דהיינו $k \geq 2029$.

נסמן $K_N = \bigcup_{n=1}^N A_n$ סדרת הקבוצות $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ אינה סדרה עולה, אבל סדרת הקבוצות $(K_N)_{N=1}^{\infty}$ היא

סדרת קבוצות שעולה לקבוצה A . הקבוצות A_n הן תיבות סגורות מיושרות ולכן הן קבוצות

בעלות נפח. לפי טענה 18.9 גם הקבוצות $K_N = \bigcup_{n=1}^N A_n$ הן בעלות נפח, והפונקציה f רציפה ולכן

אינטגרלית בהן.

לפי הגדרה 2.9 ח.2 הסדרה $\left(\int_{K_N} f \right)_{N=1}^{\infty}$ היא סדרת קירוב לאינטגרל המוכלל $\int_A f$.

הפונקציה f אישלילית ולכן לפי הגדרה 5.9 ח.5 וטענה 6.9 ח.6 האינטגרל המוכלל מתכנס אם

ורק אם הסדרה $\left(\int_{K_N} f \right)_{N=1}^{\infty}$ חסומה.

נסמן $B_n = A_n \setminus \bigcup_{m=1}^{n-1} A_m$. לכל מספר טבעי N מתקיים:

הקבוצות B_n זרות זו לזו ולכן:

$$\int_{K_N} f = \int_{\bigcup_{n=1}^N B_n} f = \sum_{n=1}^N \int_{B_n} f$$

מתקיים $B_1 = A_1 = [0, 1]^{k-1} \times [0, 1]$ ואם $n \geq 2$:

אם $x \in B_n$ אז $[x]_i \leq n$ עבור $i = 1, \dots, k$ ולכן:

אז $f(x) = |x|^\alpha \leq k^\alpha n^\alpha$ ולכן $\int_{B_n} f \leq \int_{B_n} k^\alpha n^\alpha = k^\alpha n^\alpha \text{vol}_k(B_n) = k^\alpha n^\alpha \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} n = k^\alpha n^{\alpha+2-k}$

ומכאן:

$$\int_{K_N} f = \sum_{n=1}^N \int_{B_n} f \leq k^\alpha \sum_{n=1}^N n^{\alpha+2-k}$$

אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha+2-k}$ מתכנס אז הסדרה $\left(\sum_{n=1}^N n^{\alpha+2-k} \right)_{N=1}^{\infty}$ חסומה ולכן גם סדרת הקירוב

$\left(\int_{K_N} f \right)_{N=1}^{\infty}$ חסומה, ולפי מסקנה 7.9 ח.7 האינטגרל המוכלל מתכנס.

בנוסף, אם $x \in B_n$ ו- $n \geq 2$ אז $n-1 \geq \frac{1}{2}n$ ולכן $|x| \geq [x]_k > n-1 \geq \frac{1}{2}n$ ולכן $f(x) = |x|^\alpha > \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha n^\alpha$

ומכאן: $\int_{B_n} f \geq \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha n^\alpha \text{vol}_k(B_n) = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha n^\alpha \left(\frac{1}{n}\right)^{k-1} n = \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha n^{\alpha+2-k}$

לכן: $\int_{K_N} f = \sum_{n=1}^N \int_{B_n} f \geq \sum_{n=2}^N \int_{B_n} f \geq \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha \sum_{n=2}^N n^{\alpha+2-k}$

אם האינטגרל המוכלל $\int_A f$ מתכנס אז סדרת הקירוב $\left(\int_{K_N} f\right)_{N=1}^\infty$ חסומה ולכן גם הסדרה

$$\left(\sum_{n=2}^N n^{\alpha+2-k}\right)_{N=2}^\infty \text{ חסומה ולכן הטור } \sum_{n=1}^\infty n^{\alpha+2-k} \text{ מתכנס.}$$

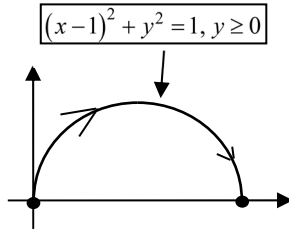
קיבלנו שהאינטגרל המוכלל $\int_A f$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^\infty n^{\alpha+2-k}$ מתכנס.

כידוע מאינפי 2 הטור הזה מתכנס אם ורק אם $\alpha+2-k < -1$ דהיינו אם ורק אם $k > \alpha+3$.

שאלה 5 (20 נקודות)

באיור מתוארת מסילה פשוטה φ שתמונתה $[0, \infty)^2 \cap S((1,0);1)$.

מוצא המסילה φ בראשית הצירים.



$$P(x, y) = \frac{y}{1+x+y} - y^3 \quad \text{יהיו:}$$

$$Q(x, y) = \frac{y}{1+x+y} + x^3 + \ln(1+x+y)$$

העזרו במשפט גרין ובהחלפת משתנים באינטגרל כפול וחשבו את האינטגרל: $\int_{\varphi} Pdx + Qdy$

פתרון

המסילה $\varphi_1: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ הנתונה על ידי $t \mapsto (1 + \cos t, \sin t)$ היא מסילה פשוטה שתמונתה שווה

לתמונת המסילה φ . לפי טענה 8.א.13 המסילה φ_1 שקולה למסילה φ או למסילה $\bar{\varphi}$. מאחר

שנקודת המוצא של φ היא $(0,0) = \varphi_1(\pi)$, שהיא נקודת היעד של φ_1 , המסילה φ_1 שקולה

למסילה $\bar{\varphi}$. נגדיר מסילה נוספת $\varphi_2: [0, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ על ידי $t \mapsto (t, 0)$, וקבוצה:

$$K = (\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap \bar{B}((1,0);1)$$

הקבוצה K היא קבוצה סגורה כחיתוך של שתי קבוצות סגורות, והיא חסומה כי היא מוכלת

בכדור. לפי שאלה 2.א.27 אפשר לראות ש- $\partial K \subseteq (\mathbb{R} \times \{0\}) \cup S((1,0);1)$ וכיוון שגם $\partial K \subseteq K$

מתקיים: $\partial K \subseteq K \cap ((\mathbb{R} \times \{0\}) \cup S((1,0);1))$

$$= ([0, 2] \times \{0\}) \cup ((\mathbb{R} \times [0, \infty)) \cap S((1,0);1)) = \text{Im } \varphi_1 \cup \text{Im } \varphi_2$$

מצד שני, לא קשה לבדוק שכל נקודה בקבוצה $\text{Im } \varphi_1 \cup \text{Im } \varphi_2$ היא נקודת שפה של K .

נותר עוד לבדוק שהקבוצה K שוכנת לשמאל המסילה φ_1 ולשמאל המסילה φ_2 כדי לראות

שהמסילות φ_1 ו- φ_2 והקבוצה K מקיימות יחד את הנחות משפט גרין (מינוח 9.ט.14). אפשר

לקבל את החסר עלידי הפעלת ההזזה $(x, y) \mapsto (x+1, y)$ על נתוני שאלה 9.ט.10. לכן לפי משפט

$$\iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) = \int_{\varphi_1} Pdx + Qdy + \int_{\varphi_2} Pdx + Qdy \quad \text{גרין (משפט 9.ט.17):}$$

ראינו ש- φ_1 שקולה ל- $\bar{\varphi}$ ולפי טענה 8.1.15:

$$\int_{\varphi} Pdx + Qdy = - \int_{\varphi_1} Pdx + Qdy = \int_{\varphi_2} Pdx + Qdy - \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right)$$

$$\int_{\varphi_2} Pdx + Qdy = \int_0^2 (P(\varphi_2(t)), Q(\varphi_2(t))) \cdot \dot{\varphi}_2(t) dt \quad \text{ממשפט 8.1.24 נקבל:}$$

$$= \int_0^2 (P(t, 0), Q(t, 0)) \cdot (1, 0) dt = \int_0^2 P(t, 0) dt = \int_0^2 0 dt = 0$$

נותר לחשב את האינטגרל הכפול:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} &= \left(-\frac{y}{(1+x+y)^2} + 3x^2 + \frac{1}{1+x+y} \right) - \left(\frac{(1+x+y)-y}{(1+x+y)^2} - 3y^2 \right) \\ &= -\frac{y}{(1+x+y)^2} + 3x^2 + \frac{1}{1+x+y} - \frac{1+x}{(1+x+y)^2} + 3y^2 \\ &= 3x^2 + 3y^2 + \frac{1}{1+x+y} - \frac{1+x+y}{(1+x+y)^2} = 3x^2 + 3y^2 \end{aligned}$$

$$\iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 3 \iint_K (x^2 + y^2) dx dy \quad \text{ולכן:}$$

את האינטגרל האחרון נחשב בעזרת החלפת משתנים לשיעורים קוטביים במישור, דהיינו לפי

מסקנה 36.1.9. לשם כך דרושה לנו קבוצה $A \subseteq [0, \infty) \times [0, 2\pi]$ (שהיא סגורה חסומה ובעלת

$$K = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid (r, \theta) \in A\} \quad \text{שטח) כך שמתקיים:}$$

$$\begin{aligned} K &= (\mathbf{R} \times [0, \infty)) \cap \bar{B}((1, 0); 1) = \{(x, y) \mid y \geq 0, |(x, y) - (1, 0)| \leq 1\} \\ &= \{(x, y) \mid y \geq 0, (x-1)^2 + y^2 \leq 1\} = \{(x, y) \mid y \geq 0, x^2 + y^2 \leq 2x\} \end{aligned}$$

$$\text{אז } (r \cos \theta, r \sin \theta) \in K \text{ אם ורק אם } r \sin \theta \geq 0 \text{ וגם } (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 \leq r \cos \theta$$

$$\text{המגבלה הראשונה } r \sin \theta \geq 0 \text{ תתקבל מ- } \theta \in [0, \pi]$$

$$\text{מאחר ש- } r^2 (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \text{ אז } (r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2 = r^2$$

$$\text{ולמעט } r=0 \text{ זה שקול ל- } r \leq \cos \theta$$

$$A = \{(r, \theta) \in [0, \infty) \times [0, \pi] \mid r \leq \cos \theta\} \quad \text{לכן נגדיר}$$

$$K = \{(r \cos \theta, r \sin \theta) \mid (r, \theta) \in A\} \quad \text{ונקבל:}$$

$$\iint_K (x^2 + y^2) dx dy = \iint_A r^2 \cdot r dr d\theta = \int_0^\pi \left(\int_0^{\cos \theta} r^3 dr \right) d\theta = \int_0^\pi \left[\frac{1}{4} r^4 \right]_0^{\cos \theta} d\theta = \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta \quad \text{אז:}$$

$$\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \quad \text{נשתמש בנוסחה } \cos 2\alpha = 2\cos^2 \alpha - 1 \text{ אז}$$

$$\begin{aligned} \cos^4 \theta &= (\cos^2 \theta)^2 = \frac{1}{4}(1 + \cos 2\theta)^2 = \frac{1}{4}(1 + 2\cos 2\theta + \cos^2 2\theta) \\ &= \frac{1}{4}\left(1 + 2\cos 2\theta + \frac{1}{2}(1 + \cos 4\theta)\right) = \frac{3}{8} + \frac{1}{2}\cos 2\theta + \frac{1}{8}\cos 4\theta \end{aligned} \quad \text{אז}$$

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta &= \int_0^\pi \frac{3}{8} d\theta + \frac{1}{2} \int_0^\pi \cos 2\theta d\theta + \frac{1}{8} \int_0^\pi \cos 4\theta d\theta \\ &= \frac{3}{8}\pi + \frac{1}{2} \left[\frac{1}{2} \sin 2\theta \right]_0^\pi + \frac{1}{8} \left[\frac{1}{4} \sin 4\theta \right]_0^\pi = \frac{3}{8}\pi \end{aligned} \quad \text{ולכן}$$

$$\int_\varphi P dx + Q dy = \int_{\varphi_2} P dx + Q dy - \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \quad \text{ולבסוף:}$$

$$= 0 - 3 \iint_K (x^2 + y^2) dx dy = -3 \cdot \frac{1}{4} \int_0^\pi \cos^4 \theta d\theta = -3 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{8}\pi = -\frac{9}{32}\pi$$