

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 8

מועד אחרון להגשה : 6.4.2025

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}^k$ וגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$. נניח ש- $f(0^{[k]}) = 0$ וכן

$$f(x) > 0 \text{ לכל } x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \text{ נניח גם ש-} x \cdot \nabla f(x) > 0 \text{ לכל } x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}.$$

א. הוכיחו שהקבוצה $U = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) < 1\}$ היא קבוצה כוכבית.

הערה: ניתן להוכיח זאת גם בהנחה החלשה יותר ש- $x \cdot \nabla f(x) > 0$ בנקודות בהן $f(x) = 1$.

ב. אם $k = 2$ והקבוצה U חסומה הראו שהקבוצה $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 1\}$ היא תמונת לולאה פשוטה וסדירה שמספר הליפוף שלה סביב ראשית הצירים הוא 1.

הדרכה: אפשר לרשום את נקודות S בצורה $x = (r \cos t, r \sin t)$, ולהיעזר במשפט ההגדרה הסתומה עם

$$f(r \cos t, r \sin t) = 1 \text{ המשוואה}$$

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ מסילה שאורכה סופי ומתקיים:

$$L(\varphi) \leq |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|$$

נתון גם ש- φ אינה קבועה בשום קטע שהיא מוגדרת בו.

הראו ש- φ היא מסילה פשוטה ששקולה למסילה אפינית.

הערה: מסילה אפינית היא צמצום של פונקציה אפינית מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}^k$ לקטע סגור. ראו שאלה 13.ב.8.

שאלה 3 (20 נקודות)

הגרף של הפונקציה $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ הוא תמונת מסילה

פשוטה וסדירה במישור. מצאו את המרכז הגיאומטרי של מסילה זאת.

הערה: הפונקציה הזאת נקראת קוסינוס ההיפרבולי, ונהוג לסמן $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

נגזרתה נקראת פונקציית הסינוס ההיפרבולי ומסומנת $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

כל אחת משתי הפונקציות האלה היא הנגזרת של האחרת, ויש ביניהן קשרים רבים, כגון $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

הראו שהפונקציה $F: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$(x,y) \mapsto \left(\frac{-2xy}{x^4+y^2}, \frac{x^2}{x^4+y^2} \right)$$

היא שדה משמר במישור הנקוב $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו עבור אילו ערכים של $(a,b) \in \mathbf{R}^2$ ו- $r > 0$ הקבוצה

$$U = B((a,b);r) \setminus \bar{B}((0,0);45)$$

היא קבוצה לא ריקה שבה הפונקציה

$$F: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^2$$

$$(x,y) \mapsto \frac{e^x}{x^2+y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y)$$

היא שדה משמר.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: בסעיף א עבור $u \in U \setminus \{0^{[k]}\}$ אפשר לקחת את הפונקציה $g: [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ שמוגדרת

על ידי $t \mapsto f(tu)$ וכהרכבת רציפות היא רציפה, ועבור $t > 0$ מתקיים

$$g'(t) = \nabla f(tu) \cdot u = \frac{1}{t} tu \cdot \nabla f(tu) > 0$$

אז g פונקציה עולה.¹ לכן לכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים:

$$f((1-\lambda)0^{[k]} + \lambda u) = f(\lambda u) = g(\lambda) \leq g(1) = f(u) < 1$$

ולכן U מכילה את כל הנקודה בקטע שבין $0^{[k]}$ ו- u , ומכאן ש- U כוכבית.

בסעיף ב, אם ניקח $u = (\cos t, \sin t)$ ונגדיר בדומה לקודם $g(r) = f(ru)$ נקבל ש- g

עולה, ויש r כך ש- $g(r) = 1$, אחרת תמונת g , שהיא קבוצה קשורה מסילתית שמכיל

את 0 ואינה מכילה את 1 היא קטע שמוכל ב- $[0, 1]$, ולכן $\{ru \mid r \geq 0\} \subseteq U$, וזה לא

יתכן כי U חסומה. ה- r הזה הוא יחיד כי g חד-חד ערכית.

אז לכל $t \in \mathbb{R}$ יש $r > 0$ יחיד כך שמתקיים

$$F(t, r) = f(r \cos t, r \sin t) = 0$$

ובמילים אחרות, המשוואה $F(t, r) = 0$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $\mathbb{R} \times (0, \infty)$ את

r כפונקציה של t . בנוסף, עבור $x = (r \cos t, r \sin t)$ נקבל מהנתון ומכלל השרשרת

$$\frac{\partial F}{\partial r}(t, r) = \nabla f(r \cos t, r \sin t) \cdot (\cos t, \sin t) = \frac{1}{r} x \cdot \nabla f(x) > 0$$

וממשפט ההגדרה הסתומה (למשל בגרסה הפשוטה מחלק א של מסקנה 8.7.8) נקבל

שהפונקציה $r(t)$ גזירה ברציפות בכל t ממשי.

עכשיו נגדיר מסילה $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow S$ על ידי:

$$\varphi: t \mapsto r(t)(\cos t, \sin t)$$

היא גזירה ברציפות וממה שהוכחנו תמונתה היא בדיוק הקבוצה S . ברור שהיא

לולאה (כי הפונקציות שהיא מוגדרת באמצעותן מחזוריות 2π). כדי להראות שהיא

לולאה סדירה צריך רק להראות ש- $\dot{\varphi}(t) \neq 0$.

נסמן $u(t) = (\cos t, \sin t)$ ואז $\varphi(t) = r(t)u(t)$ וכן $u'(t) = (-\sin t, \cos t)$ ומתקיים גם

$$|u(t)| = |u'(t)| = 1 \text{ ו- } u(t) \cdot u'(t) = 0.$$

בעזרת שאלה 15.3 ז. למשל נקבל

$$\dot{\varphi}(t) = r'(t)u(t) + r(t)u'(t)$$

ולכן:

¹ בהנחה החלשה יותר מתקבל תרגיל מעניין באינפי 1:

אם g רציפה בקטע I ולכל $t \in I$ בו $g(t) = c$ מתקיים $g'(t) > 0$ אז $|g^{-1}(c)| \leq 1$.

ניסוח חלופי לאותה טענה:

אם I הוא קטע, $g: I \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, $c \in \mathbb{R}$, $A = \{t \in I \mid g(t) = c\}$, ולכל $t \in A$ הפונקציה g גזירה ב- t .

אם $|A| \geq 2$ אז יש $a, b \in \mathbb{R}$ כך ש- $a < b$ ו- $g'(a)g'(b) \leq 0$ (זאת הכללה של משפט רול).

$$|\dot{\varphi}(t)|^2 = r'(t)^2 |u(t)|^2 + 2r(t)r'(t)u(t) \cdot u'(t) + r(t)^2 |u'(t)|^2 = r'(t)^2 + r(t)^2 > 0$$

לבסוף הפונקציה $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$

$$(t, \lambda) \mapsto (1 - \lambda + \lambda r(t))(\cos t, \sin t)$$

היא הומוטופיה של לולאות ש(בעזרת טענה 13.ד.8, דוגמה 2.ח.8 והערה 9.ח.8) מעידה

על כך שלולאות H_0 ו- H_1 אותו מספר ליפוף סביב הראשית, וידוע שמספר

הליפוף של H_0 הוא 1.

לשאלה 2: הפונקציה Λ_φ מטענה 30.ב.8 היא פונקציה רציפה ועולה במובן הרחב, והתנאי בשאלה

מבטיח שהיא גם עולה במובן הצר:

אם $\alpha \leq t' < t'' \leq \beta$ אז מאחר ש- φ אינה פונקציה קבועה באף קטע יש $t \in (t', t'')$ כך ש-

$$\begin{aligned} \Lambda_\varphi(t'') - \Lambda_\varphi(t') &= L(\varphi|_{[t', t'']}) = L(\varphi|_{[t', t]}) + L(\varphi|_{[t, t'']}) \\ &\geq L(\varphi|_{[t', t]}) \geq |\varphi(t') - \varphi(t)| > 0 \end{aligned} \quad \text{ולכן: } \varphi(t) \neq \varphi(t')$$

ומכאן $\Lambda_\varphi(t') < \Lambda_\varphi(t'')$. לכן היא פונקציה הפיכה מ- $[\alpha, \beta]$ ל- $[0, L(\varphi)]$ וההופכית

שלה היא פונקציה עולה ורציפה $\Lambda_\varphi^{-1} : [0, L(\varphi)] \rightarrow [\alpha, \beta]$. עכשיו אנחנו רוצים

להוכיח ש- $\varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}$ היא מסילה אפינית לא קבועה ששקולה ל- φ , ובפרט φ מסילה

פשוטה (כי היא שקולה למסילה פשוטה).

$$\varphi(t) = \varphi(\alpha) + \frac{\Lambda_\varphi(t) - \Lambda_\varphi(\alpha)}{L(\varphi)} (\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)) \quad \text{לשם כך נוכיח שלכל } t \in [\alpha, \beta] \text{ מתקיים}$$

ולכן:

$$\varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}(s) = \varphi(\alpha) + \frac{\Lambda_\varphi(\Lambda_\varphi^{-1}(s)) - \Lambda_\varphi(\alpha)}{L(\varphi)} (\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha) + \frac{s - \Lambda_\varphi(\alpha)}{L(\varphi)} (\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$$

כלומר $\varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}$ היא הצמצום של פונקציה אפינית לקטע הסגור $[0, L(\varphi)]$.

מאחר ש- $\Lambda_\varphi(\alpha) = 0$ ו- $\Lambda_\varphi(\beta) = L(\varphi)$ ברור שעבור $t = \alpha$ ו- $t = \beta$ מתקיים השוויון:

$$\varphi(t) = \varphi(\alpha) + \frac{\Lambda_\varphi(t) - \Lambda_\varphi(\alpha)}{L(\varphi)} (\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$$

אז די להוכיחו כאשר $t \in (\alpha, \beta)$. נתחיל:

נסמן $u = \varphi(t) - \varphi(\alpha)$ ו- $v = \varphi(\beta) - \varphi(t)$. אז:

$$u + v = \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) - \varphi(t) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha)$$

$$L(\varphi|_{[\alpha, t]}) \geq |\varphi(t) - \varphi(\alpha)| = |u| \quad \text{לפי אבחנה 12.ב.8 מתקיים}$$

$$L(\varphi|_{[t, \beta]}) \geq |\varphi(\beta) - \varphi(t)| \geq |v| \quad \text{וגם}$$

$$|u+v| = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| \geq L(\varphi) = L(\varphi|_{[\alpha,t]}) + L(\varphi|_{[t,\beta]}) \geq |u| + |v| \geq |u+v| \quad \text{ולכן:}$$

שני קצות שרשרת האי-שוויונות זהים ולכן כל האי-שוויונות בדרך הם שוויונות.

$$\text{בפרט } |u+v| = |u| + |v| \text{ ו- } L(\varphi) = |u+v| = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|, L(\varphi|_{[\alpha,t]}) = |u| \text{ השוויון}$$

האחרון פירושו ש"באי-שוויון המשולש מתקיים שוויון". זה אפשרי רק אם הוקטורים

$$u \text{ ו- } v \text{ תלויים לינארית, ויותר מזה: הם באותו כיוון. נראה שאם } |u+v| = |u| + |v| \text{ אז}$$

$$\text{יש } \lambda \in [0,1] \text{ כך ש- } u = \lambda(u+v) \text{ . זה בבירור נכון אם } u=0 \text{ . אם } u \neq 0 \text{ אז}$$

$$|u+v| = |u| + |v| \geq |u| > 0$$

$$|u+v|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot (u+v) + v \cdot (u+v) \quad \text{אז}$$

$$\leq |u| \cdot |u+v| + |v| \cdot |u+v| = (|u| + |v|) \cdot |u+v| = |u+v|^2$$

כאשר האי-שוויון באמצע השרשרת נובע מאי-שוויון קושי-שוורץ (משפט 13.ד.1) עבור

כל אחד משני המחוברים, ושוב, מאחר ששני קצות השרשרת הם אותו מספר בהכרח

האי-שוויונות האלה הם שוויונות. לפי שאלה 14.ד.1 יש שוויון באי-שוויון קושי-שוורץ

רק אם הוקטורים תלויים לינארית. בפרט, מהשוויון $|u| \cdot |u+v| = |u| \cdot (u+v)$ ומכך ש-

$$u+v \neq 0 \text{ נובע שיש } \lambda \in \mathbf{R} \text{ כך ש- } u = \lambda(u+v) \text{ ומהשוויון } |v| \cdot |u+v| = v \cdot (u+v) \text{ נובע}$$

$$\text{שיש } \mu \in \mathbf{R} \text{ כך ש- } v = \mu(u+v).$$

$$\lambda|u+v|^2 = \lambda(u+v) \cdot (u+v) = u \cdot (u+v) = |u| \cdot |u+v| \geq 0 \quad \text{כמוכן}$$

$$\text{ולכן } \lambda \geq 0 \text{ ובדומה } \mu \geq 0 \text{ וכן: } (\lambda + \mu)(u+v) = \lambda(u+v) + \mu(u+v) = u+v$$

$$\text{ולכן } \lambda + \mu = 1 \text{ ובפרט } \lambda \leq 1.$$

$$\text{קיבלנו } \Lambda_\varphi(t) = L(\varphi|_{[\alpha,t]}) = |u| = |\lambda(u+v)| = \lambda|u+v| = \lambda|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| = \lambda L(\varphi)$$

$$\text{ולבסוף: } \varphi(t) = \varphi(\alpha) + u = \varphi(\alpha) + \lambda(u+v) = \varphi(\alpha) + \frac{\Lambda_\varphi(t)}{L(\varphi)}(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$$

גישה קצת אחרת להוכחה לא מזכירה את הפונקציה Λ_φ . במקום זה מראים כמו

$$\text{שנעשה לעיל שלכל } t \in [\alpha, \beta] \text{ יש } \lambda \in [0,1] \text{ עבורו: } \varphi(t) = \varphi(\alpha) + \lambda(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$$

בדומה להוכחה ש- Λ_φ עולה־ממש מראים ש- $|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| = L(\varphi) > 0$ ולכן λ נקבע

$$\lambda(t) = \frac{|\varphi(t) - \varphi(\alpha)|}{|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|} \quad \text{ביחידות על ידי } t:$$

מראים ש- $\lambda: [\alpha, \beta] \rightarrow [0,1]$ היא פונקציה עולה־ממש ורציפה, ולכן גם הפונקציה

ההופכית $\lambda^{-1}: [0,1] \rightarrow [\alpha, \beta]$ עולה־ממש ורציפה, והמסילה $\varphi \circ \lambda^{-1}$ היא מסילה

אפינית פשוטה ששקולה ל- φ .

המסילה היא $\varphi(t) = (t, f(t))$ ונגזרתה $\dot{\varphi}(t) = (1, f'(t))$ רציפה ואינה אפס, ולכן

המסילה סדירה. אורך המסילה $L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\varphi}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ ויש לחשבו.

$$\frac{1}{L(\varphi)} \left(\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi]_1(t) |\dot{\varphi}(t)| dt, \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi]_1(t) |\dot{\varphi}(t)| dt \right) \quad \text{המרכז הגיאומטרי הוא:}$$

$$= \frac{1}{L(\varphi)} \left(\int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt, \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \right)$$

$$\sqrt{1 + f'(t)^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{1 + \frac{(e^t - e^{-t})^2}{4}} = \sqrt{\frac{4 + e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}} \quad \text{לחישוב:}$$

$$= \sqrt{\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\frac{(e^t + e^{-t})^2}{4}} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$$

$$L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh t dt = \sinh \beta - \sinh \alpha = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta} - e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2} \quad \text{אז}$$

$$\cosh^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t$$

$$\sinh^2 t = \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2t} - 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t$$

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$$

$$\frac{d}{dt} \cosh t = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

$$\frac{d}{dt} \sinh t = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

$$\int t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int t \cosh t dt = t \sinh t - \int \sinh t dt = t \sinh t - \cosh t$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} t \cosh t dt = \beta \sinh \beta - \cosh \beta - \alpha \sinh \alpha + \cosh \alpha$$

$$\int f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int \cosh^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t \right) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sinh 2t$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sinh 2\beta - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sinh 2\alpha$$

והמרכז הגיאומטרי המבוקש הוא:

$$\left(\frac{\beta \sinh \beta - \cosh \beta - \alpha \sinh \alpha + \cosh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha}, \frac{\frac{1}{2}\beta + \frac{1}{4}\sinh 2\beta - \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}\sinh 2\alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} \right) \\ = \left(\frac{\beta \sinh \beta - \alpha \sinh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} - \frac{\cosh \beta - \cosh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sinh 2\beta - \sinh 2\alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} \right) \\ \text{ואולי אפשר עוד לפשט אבל לא ניסיתי (למשל: } \sinh 2t = 2 \sinh t \cosh t \text{).}$$

שאלה 4: 2024\98\4. על פי ממ"ן מ-2010 (2010\16\3).

אפשר למשל לראות ש- $(x, y) \mapsto \arctan \frac{y}{x^2}$ פוטנציאל ב- $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ וגם
 $(x, y) \mapsto C - \arctan \frac{x^2}{y}$ פוטנציאל ב- $\mathbf{R} \times (\mathbf{R} \setminus \{0\})$ עבור כל קבוע C , ומאלה אפשר
"לתפור" פוטנציאל ב- $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. אפשר גם לראות שמטריצת היעקוביאן סימטרית,
ולבדוק שיש לולאה שמספר הליפוף שלה אינו 0 שעליה $\oint F \cdot d(x, y) = 0$. זאת למשל
לולאה פשוטה שתמונתה $\{(x, y) \mid x^4 + y^2 = 1\}$. יש כל מיני דרכים להגדיר לולאה
כזאת. אחת הדרכים: נגדיר
 $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$
 $(t, \lambda) \mapsto \left((\cos t)^{\frac{1}{3}} |\cos t|^{\frac{1}{6} + \frac{1}{3}\lambda} t, \sin t \right)$
ואז H_0 היא הלולאה המבוקשת ו- $H_1: t \mapsto (\cos t, \sin t)$ היא הומוטופיה ביניהן
שתמונתה במישור המנוקב $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ולכן לשתייהן אותו מספר ליפוף, שהוא 1.
הדרך הנוחה ביותר לחשב את האינטגרל $\oint_{H_0} F \cdot d(x, y)$ הוא לראות שהוא שווה
לאינטגרל $\oint_{H_0} x^2 dy - 2xy dx$ וזה לפי משפט גרין שווה לאינטגרל $\iint_K 4x dx dy$ בקבוצה
 $K = \{(x, y) \mid x^4 + y^2 \leq 1\}$ שמטעמי סימטריה (למשל אינווריאנטיות לפונקציה
האפינית $(x, y) \mapsto (-x, -y)$) המרכז הגיאומטרי שלה הוא $(0, 0)$, ולכן האינטגרל
דלעיל הוא 0 (אלא שהדרך הזאת דורשת ללמוד את פרק 9, ואנחנו כרגע בממ"ן על
פרק 8).

אפשר להגדיר גם כך:
 $H_0: t \mapsto \left(\pm |\cos t|^{\frac{1}{2}}, \sin t \right)$
כאשר הסימן $\pm$ נקבע להיות $+$ כאשר $\cos t \geq 0$ ו- $-$ כאשר $\cos t \leq 0$.

אם $(x, y) = H_0(t)$ אז
 $\frac{dH_0}{dt}(t) = \left(-\frac{1}{2} |\cos t|^{-\frac{1}{2}} \sin t, \cos t \right) = \pm \left(-\frac{y}{2x}, x^2 \right)$

ולכן:
 $F(H_0(t)) \cdot \frac{dH_0}{dt}(t) = \pm \frac{1}{x^4 + y^2} (-2xy, x^2) \cdot \left(-\frac{y}{2x}, x^2 \right) = \pm \frac{x^4 + y^2}{x^4 + y^2} = \pm 1$

אז מדובר באינטגרל של 1 על חצי הקטע $[0, 2\pi]$ ושל -1 על החצי האחר ויחד זה 0.
אעיר עוד שאפשר את הלולאה הדרושה כאן לקבל גם מסעיף ב של שאלה 1 בממ"ן זה.

לשאלה 5: 4\92\2024 (בשינוי מספר) שהיא וריאציה על 4\70\2021 וגם על 4\13\2020 וגם 5\13\2022 (אותה פונקציה, קבוצות שונות; אותו רעיון, הקבוצה שיש לבדוק אם היא כוכבית/פשוטת־קשר שונה). כדי שהקבוצה תהיה לא ריקה נדרש שלא יתקיים $B((a,b);r) \subseteq \bar{B}((0,0);45)$ ובדומה לשאלה 5.ה.1 זה קורה אם ורק אם $r + \sqrt{a^2 + b^2} > 45$. בודקים שמטריצת היעקוביאן סימטרית ורציפה במישור המנוקב בראשית. בודקים שיש לולאה שמספר הליפוף שלה אינו 0 שבו האינטגרל של $F \cdot d(x,y)$ אינו 0 (למשל כזאת שתמונתה מעגל היחידה). לכן גם האינטגרל על כל לולאה אחרת שמספר הליפוף שלה סביב הראשית אינו אפס האינטגרל אינו אפס. כעת אם $\bar{B}((0,0);45) \subseteq B((a,b);r)$ אז יש מעגל סביבה הראשית (ברדיוס $2024 + \delta$ עבור $\delta > 0$ קטן דיו) שמוכל ב־ U , ומכאן מסיקים ש־ F אינו שדה משמר במצב זה. אחרת אפשר לבדוק ש־ U מוכלת במישור השסוע $\{t(a,b) \mid t \leq 0\}$ שהוא קבוצה פתוחה וכוכבית שבה כמובן F הוא שדה משמר. וכמו בשאלה 5.ה.1 התנאי לאי־קיום הכלה זאת הוא בסך הכל $r - \sqrt{a^2 + b^2} \leq 45$. בסך הכל התנאי הוא:

$$45 - \sqrt{a^2 + b^2} < r \leq 45 + \sqrt{a^2 + b^2}$$

(בפרט $(a,b) \neq (0,0)$).

(יש כאן סוג של Easter egg שלא בא לידי ביטוי, והוא ש־

$$\bar{B}((0,0);45) = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 2025\}$$