

מתווה לפתרון ממ"ן 14

סמסטר: 1א2025

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה: 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה: פרק 8

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ב- $\mathbb{R}^k$ וגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$. נניח ש- $f(0^{[k]}) = 0$ וכן

$$f(x) > 0 \text{ לכל } x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}. \text{ נניח גם ש-} x \cdot \nabla f(x) > 0 \text{ לכל } x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}.$$

א. הוכיחו שהקבוצה $U = \{x \in \mathbb{R}^k \mid f(x) < 1\}$ היא קבוצה כוכבית.

הערה: ניתן להוכיח זאת גם בהנחה החלשה יותר ש- $x \cdot \nabla f(x) > 0$ בנקודות בהן $f(x) = 1$.

ב. אם $k = 2$ והקבוצה U חסומה הראו שהקבוצה $S = \{x \in \mathbb{R}^2 \mid f(x) = 1\}$ היא תמונת לולאה פשוטה וסדירה שמספר הליפוף שלה סביב ראשית הצירים הוא 1.

הדרכה: אפשר לרשום את נקודות S בצורה $x = (r \cos t, r \sin t)$, ולהיעזר במשפט ההגדרה הסתומה עם

$$f(r \cos t, r \sin t) = 1.$$

פתרון סעיף א

לפי הנתון $f(0^{[k]}) = 0 < 1$ ולכן $0^{[k]} \in U$. נראה שלכל $u \in U \setminus \{0^{[k]}\}$ הקטע בין הנקודות $0^{[k]}$ ו- u

מוכל בקבוצה U , ומכאן לפי הגדרה 19.8 הקבוצה U היא כוכבית.

ובכן, יהי $u \in U \setminus \{0^{[k]}\}$. נגדיר פונקציה $g: [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי $t \mapsto f(tu)$. כהרכבת רציפות היא

$$g'(t) = \nabla f(tu) \cdot u = \frac{1}{t} tu \cdot \nabla f(tu) > 0 \quad \text{רציפה ב-} [0, \infty). \text{ עבור } t > 0 \text{ מתקיים:}$$

אז g פונקציה עולה.¹ לכן לכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים:

$$f((1-\lambda)0^{[k]} + \lambda u) = f(\lambda u) = g(\lambda) \leq g(1) = f(u) < 1$$

ולכן $(1-\lambda)0^{[k]} + \lambda u \in U$, כלומר U מכילה את כל נקודות הקטע שבין $0^{[k]}$ ו- u .²

פתרון סעיף ב

נתון שהקבוצה U חסומה ולכן יש $M \in (0, \infty)$ כך ש- $U \subseteq B((0,0); M)$.

אם $|v| \geq M$ אז $v \notin U$ ולכן $f(v) \geq 1$.

¹ בהנחה החלשה יותר מתקיים $g'(t) > 0$ רק בנקודות בהן $g(t) = 1$. מכך אפשר להסיק שיש לכל היותר נקודה אחת $c \in (0, \infty)$ שבה $g(c) = 1$, ולכן הקבוצה $\{t \mid g(t) < 1\}$ היא $[0, c)$ או $[0, \infty)$.

² שימו לב שהנתון ש- $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מיותר, ולא עשינו בו שימוש. עובדה זאת נובעת מכך ש- g היא פונקציה עולה.

יהי $t \in \mathbf{R}$ כלשהו. נסמן $u = (\cos t, \sin t)$. תהי g הפונקציה שהוגדרה בפתרון סעיף א. ראינו שם שהיא פונקציה עולה. לכן היא חד־חד־ערכית, ויש לכל היותר $r \in [0, \infty)$ יחיד עבורו $g(r) = 1$. מצד שני $|Mu| = M|u| = M$ ולכן $g(M) = f(Mu) \geq 1$ וממשפט ערך הביניים נקבל שיש $r \in (0, M]$ עבורו $g(r) = 1$.

נגדיר פונקציה $F: \mathbf{R} \times (0, \infty) \rightarrow \mathbf{R}$ על־ידי:

$$F: (t, r) \mapsto f(r \cos t, r \sin t)$$

זאת פונקציה רציפה כהרכבת פונקציות רציפות, ומכלל השרשרת זאת גם פונקציה גזירה ברציפות ב־ $\mathbf{R} \times (0, \infty)$.

לפי מה שראינו לכל $t \in \mathbf{R}$ יש $r > 0$ יחיד כך שמתקיים

$$F(t, r) = f(r \cos t, r \sin t) = 1$$

דהיינו המשוואה $F(t, r) = 1$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ את r כפונקציה של t . נסמן את הפונקציה הזאת ב־ ρ , כלומר $\rho: \mathbf{R} \rightarrow (0, \infty)$ ומתקיים:

$G(\rho) = \{(t, r) \in \mathbf{R} \times (0, \infty) \mid F(t, r) = 1\}$

בבירור $F(t + 2\pi, r) = F(t, r)$ לכל $(t, r) \in \mathbf{R} \times (0, \infty)$. נתבונן בפונקציה $\rho \circ \tau_{2\pi}$ כאשר $\tau_{2\pi}: t \mapsto t + 2\pi$. מתקיים

$G(\rho \circ \tau_{2\pi}) = \{(t, \rho(t + 2\pi)) \mid t \in \mathbf{R}\} = \{(t, r) \mid (t + 2\pi, r) \in G(\rho)\}$

$$= \{(t, r) \in \mathbf{R} \times (0, \infty) \mid F(t + 2\pi, r) = 1\} = \{(t, r) \in \mathbf{R} \times (0, \infty) \mid F(t, r) = 1\} = G(\rho)$$

ולכן $\rho \circ \tau_{2\pi} = \rho$, כלומר לכל $t \in \mathbf{R}$ מתקיים $\rho(t + 2\pi) = \rho(t)$. עבור $x = (r \cos t, r \sin t)$ נקבל מהנתון ומכלל השרשרת:

$\frac{\partial F}{\partial r}(t, r) = \nabla f(r \cos t, r \sin t) \cdot (\cos t, \sin t) = \frac{1}{r} x \cdot \nabla f(x) > 0$

ממשפט ההגדרה הסתומה (למשל בגרסה הפשוטה שבחלק א של מסקנה 8.ב.7) נקבל שהפונקציה ρ גזירה ברציפות ב־ $\mathbf{R}$.

נגדיר מסילה $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ על ידי:

$$\varphi: t \mapsto \rho(t)(\cos t, \sin t)$$

זאת לולאה כי:

$$\varphi(2\pi) = \rho(2\pi)(\cos 2\pi, \sin 2\pi) = \rho(0)(\cos 0, \sin 0) = \varphi(0)$$

לכל $t \in [0, 2\pi]$ מתקיים

$$f(\varphi(t)) = f(\rho(t) \cos t, \rho(t) \sin t) = F(t, \rho(t)) = 1$$

ולכן $\varphi(t) \in S$ כלומר $\text{Im } \varphi \subseteq S$.

מצד שני, יהי $x \in S$. אז $f(x) = 1$ ובפרט $x \neq (0, 0)$. לפי דוגמה 4.ו.1 יש $r > 0$ ו־ $\theta \in [0, 2\pi)$ שנקבעים ביחידות עבורם $x = r(\cos \theta, \sin \theta)$. מתקיים

$$F(\theta, r) = f(r \cos \theta, r \sin \theta) = f(x) = 1$$

ומאחר שהמשוואה $F(t, r) = 1$ מגדירה באופן סתום בקבוצה $\mathbf{R} \times (0, \infty)$ את הפונקציה שסימנו ב־ $\rho(t)$ בהכרח $r = \rho(\theta)$ כלומר:

$$x = \rho(\theta)(\cos \theta, \sin \theta) = \varphi(\theta) \in \text{Im } \varphi$$

לכן $S \subseteq \text{Im } \varphi$, ומשתי ההכלות שהוכחנו נובע ש־ $S = \text{Im } \varphi$. היחידות של θ בדוגמה 4.ו.1 מראה גם שהפונקציה $\varphi|_{[0, 2\pi)}$ חד־חד־ערכית, כלומר הלולאה φ היא

לולאה פשוטה. כדי להראות שהיא לולאה סדירה צריך להראות ש- $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ לכל t .

$$\varphi(t) = \rho(t)u(t) \quad \text{נסמן } u(t) = (\cos t, \sin t) \text{ אז}$$

$$u'(t) = (-\sin t, \cos t) \quad \text{וכן:}$$

$$u(t) \cdot u'(t) = (\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) = 0 \quad \text{מתקיים}$$

$$|u(t)| = |u'(t)| = \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} = 1 \quad \text{וכן:}$$

$$\dot{\varphi}(t) = \rho'(t)u(t) + \rho(t)u'(t) \quad \text{בעזרת שאלה 15.3 ז.לממשל נקבל}$$

$$|\dot{\varphi}(t)|^2 = \rho'(t)^2 |u(t)|^2 + 2\rho(t)\rho'(t)u(t) \cdot u'(t) + \rho(t)^2 |u'(t)|^2 = \rho'(t)^2 + \rho(t)^2 > 0 \quad \text{ולכן:}$$

אז $\dot{\varphi}(t) \neq 0$ והלולאה φ היא לולאה סדירה.

$$H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \quad \text{לבסוף נראה שהפונקציה}$$

$$(t, \lambda) \mapsto (1 - \lambda + \lambda\rho(t))(\cos t, \sin t)$$

היא הומוטופיה של לולאות.

מכך ינבע, בעזרת טענה 13.8 ח.נ, שלכל פונקציה גזירה ברציפות $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ כך

$$\oint_{H_0} F \cdot dx = \oint_{H_1} F \cdot dx \quad \text{שהמטריצה } JF_a \text{ סימטרית לכל } a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \text{ מתקיים:}$$

בפרט זה נכון עבור $F = \frac{1}{2\pi}G$ עם G מהערה 9.8 ח.נ, ולכן ללולאות H_0 ו- H_1 אותו מספר ליפוף

סביב הראשית. ידוע שמספר הליפוף של הלולאה $H_0: t \mapsto (\cos t, \sin t)$ הוא 1, ולכן זה גם מספר

הליפוף של הלולאה $H_1 = \varphi$.

נותר להראות ש- H היא אכן הומוטופיה של לולאות, כלומר לבדוק שמתקיימות הדרישות

מהערה 16.8 א.נ. מאחר ש- ρ פונקציה רציפה (ואפילו גזירה ברציפות) ב- $\mathbb{R}$ הפונקציה H רציפה

במלבן $[0, 2\pi] \times [0, 1]$.

$$H_\lambda(2\pi) = H(2\pi, \lambda) = (1 - \lambda + \lambda\rho(2\pi))(\cos 2\pi, \sin 2\pi) \quad \text{לכל } \lambda \in [0, 1] \text{ מתקיים}$$

$$= (1 - \lambda + \lambda\rho(0))(\cos 0, \sin 0) = H(0, \lambda) = H_\lambda(0)$$

ולכן H_λ היא לולאה.

לבסוף, עוד דבר שחשוב לבדוק הוא שתמונת H אכן מוכלת ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$:

לכל $t \in [0, 2\pi]$ מתקיים $\rho(t) \in (0, \infty)$ וכמוכר גם $1 \in (0, \infty)$. הקבוצה $(0, \infty)$ קמורה ולכן מכילה

את כל נקודות הקטע שקצותיו 1 ו- $\rho(t)$. לכן לכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים $1 - \lambda + \lambda\rho(t) \in (0, \infty)$. אז

$$|H(t, \lambda)| = |(1 - \lambda + \lambda\rho(t))(\cos t, \sin t)| = (1 - \lambda + \lambda\rho(t))|\cos t, \sin t| = 1 - \lambda + \lambda\rho(t) > 0$$

ולכן $H(t, \lambda) \neq (0, 0)$ לכל $(t, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ מסילה שאורכה סופי ומתקיים: $L(\varphi) \leq |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|$
 נתון גם ש- φ אינה קבועה בשום קטע שהיא מוגדרת בו.
 הראו ש- φ היא מסילה פשוטה ששקולה למסילה אפינית.
 הערה: מסילה אפינית היא צמצום של פונקציה אפינית מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}^k$ לקטע סגור. ראו שאלה 13.ב.8.

פתרון

הפונקציה Λ_φ מטענה 30.ב.8 היא פונקציה רציפה, ומשאלה 29.ב.8 נובע שהיא פונקציה עולה במובן הרחב. הנתון ש- φ אינה קבועה בשום קטע מאפשר להראות ש- Λ_φ עולה במובן הצר:
 נניח $\alpha \leq t' < t'' \leq \beta$. הפונקציה φ אינה קבועה באף קטע ולכן יש $t \in (t', t'')$ כך ש- $\varphi(t) \neq \varphi(t')$ ומכאן:

$$\Lambda_\varphi(t'') - \Lambda_\varphi(t') = L(\varphi|_{[t', t'']}) = L(\varphi|_{[t', t]}) + L(\varphi|_{[t, t'']}) \geq L(\varphi|_{[t', t]}) \geq |\varphi(t') - \varphi(t)| > 0$$

 לכן $\Lambda_\varphi(t') < \Lambda_\varphi(t'')$. אז Λ_φ היא פונקציה הפיכה מ- $[\alpha, \beta]$ ל- $[0, L(\varphi)]$ וההופכית שלה היא פונקציה עולה ורציפה $\Lambda_\varphi^{-1}: [0, L(\varphi)] \rightarrow [\alpha, \beta]$.
 לפי הגדרה 3.א.8 הפונקציה $\varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}$ היא מסילה ששקולה למסילה φ .
 נראה ש- $\varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}$ היא מסילה אפינית. היא אינה פונקציה קבועה כי φ ששקולה לה אינה קבועה.
 מסילה אפינית שאינה קבועה היא מסילה פשוטה, ולפי אבחנה 4.א.8 גם φ מסילה פשוטה.

אנו נוכיח שלכל $t \in [\alpha, \beta]$ מתקיים:

$$\varphi(t) = \varphi(\alpha) + \frac{\Lambda_\varphi(t)}{L(\varphi)}(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$$

מכך נובע

$$\varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}(s) = \varphi(\alpha) + \frac{\Lambda_\varphi(\Lambda_\varphi^{-1}(s))}{L(\varphi)}(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)) = \varphi(\alpha) + \frac{s}{L(\varphi)}(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$$

ולכן כלומר $\varphi \circ \Lambda_\varphi^{-1}$ היא הצמצום של פונקציה אפינית לקטע הסגור $[0, L(\varphi)]$.

מאחר ש- $\Lambda_\varphi(\alpha) = 0$ ו- $\Lambda_\varphi(\beta) = L(\varphi)$ ברור שעבור $t = \alpha$ ו- $t = \beta$ מתקיים השוויון:

$$\varphi(t) = \varphi(\alpha) + \frac{\Lambda_\varphi(t)}{L(\varphi)}(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha))$$

אז די להוכיחו כאשר $t \in (\alpha, \beta)$. נתחיל: נסמן $u = \varphi(t) - \varphi(\alpha)$ ו- $v = \varphi(\beta) - \varphi(t)$.

$$u + v = \varphi(t) - \varphi(\alpha) + \varphi(\beta) - \varphi(t) = \varphi(\beta) - \varphi(\alpha) \quad \text{אז:}$$

$$L(\varphi|_{[\alpha, t]}) \geq |\varphi(t) - \varphi(\alpha)| = |u| \quad \text{לפי אבחנה 12.ב.8 מתקיים}$$

$$L(\varphi|_{[t, \beta]}) \geq |\varphi(\beta) - \varphi(t)| = |v| \quad \text{וגם}$$

$$|u + v| = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| \geq L(\varphi) = L(\varphi|_{[\alpha, t]}) + L(\varphi|_{[t, \beta]}) \geq |u| + |v| \geq |u + v| \quad \text{ולכן:}$$

שני קצות שרשרת האי-שוויונות זהים ולכן כל האי-שוויונות בדרך הם שוויונות.

בפרט $L(\varphi) = |u+v| = |\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)|$, $L(\varphi|_{[\alpha,t]}) = |u|$ ו- $|u+v| = |u| + |v|$. השוויון האחרון פירושו

ש"באישוויון המשולש מתקיים שוויון". זה אפשרי רק אם הוקטורים u ו- v תלויים לינארית,

ויותר מזה: הם באותו כיוון. נראה שאם $|u+v| = |u| + |v|$ אז יש $\lambda \in [0,1]$ כך ש- $u = \lambda(u+v)$. זה

בבירור נכון אם $u = 0$. אם $u \neq 0$ אז $|u+v| = |u| + |v| \geq |u| > 0$.

$$|u+v|^2 = (u+v) \cdot (u+v) = u \cdot (u+v) + v \cdot (u+v) \quad \text{אז}$$

$$\leq |u| \cdot |u+v| + |v| \cdot |u+v| = (|u| + |v|) \cdot |u+v| = |u+v|^2$$

כאשר האישוויון באמצע השרשרת נובע מאישוויון קושי-שוורץ (משפט 13.ד.1) עבור כל אחד משני המחוברים, ושוב, מאחר ששני קצות השרשרת הם אותו מספר בהכרח האישוויונות האלה הם שוויונות. לפי שאלה 14.ד.1 יש שוויון באישוויון קושי-שוורץ רק אם הוקטורים תלויים

לינארית. בפרט, מהשוויון $|u \cdot (u+v)| = |u| \cdot |u+v|$ ומכך ש- $u+v \neq 0$ נובע שיש $\lambda \in \mathbf{R}$ כך ש-

$$u = \lambda(u+v) \quad \text{ומהשוויון } v \cdot (u+v) = |v| \cdot |u+v| \text{ נובע שיש } \mu \in \mathbf{R} \text{ כך ש- } v = \mu(u+v).$$

$$\lambda|u+v|^2 = \lambda(u+v) \cdot (u+v) = u \cdot (u+v) = |u| \cdot |u+v| \geq 0 \quad \text{כמוכן}$$

$$(\lambda + \mu)(u+v) = \lambda(u+v) + \mu(u+v) = u+v \quad \text{ולכן } \lambda \geq 0 \text{ ובדומה } \mu \geq 0 \text{ וכן:}$$

$$\text{ולכן } \lambda + \mu = 1 \text{ ובפרט } \lambda \leq 1.$$

$$\Lambda_\varphi(t) = L(\varphi|_{[\alpha,t]}) = |u| = |\lambda(u+v)| = \lambda|u+v| = \lambda|\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)| = \lambda L(\varphi) \quad \text{קיבלנו}$$

$$\varphi(t) = \varphi(\alpha) + u = \varphi(\alpha) + \lambda(u+v) = \varphi(\alpha) + \frac{\Lambda_\varphi(t)}{L(\varphi)}(\varphi(\beta) - \varphi(\alpha)) \quad \text{ולבסוף}$$

ובזאת הסתיימה ההוכחה.

שאלה 3 (20 נקודות)

הגרף של הפונקציה $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ הוא תמונת מסילה

פשוטה וסדירה במישור. מצאו את המרכז הגיאומטרי של מסילה זאת.

הערה: הפונקציה הזאת נקראת קוסינוס ההיפרבולי, ונהוג לסמן $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.

נגזרתה נקראת פונקציית הסינוס ההיפרבולי ומסומנת $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.

כל אחת משתי הפונקציות האלה היא הנגזרת של האחרת, ויש ביניהן קשרים רבים, כגון $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

פתרון

$$\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

המסילה היא

$$t \mapsto (t, f(t))$$

ונגזרתה $\dot{\varphi}(t) = (1, f'(t))$ רציפה ואינה אפס, ולכן המסילה סדירה.

אורך המסילה הוא $L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} |\dot{\varphi}(t)| dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt$ ויש לחשבו. המרכז הגיאומטרי הוא:

$$\begin{aligned} \frac{1}{L(\varphi)} \left(\int_{\varphi} x |d(x, y)|, \int_{\varphi} y |d(x, y)| \right) &= \frac{1}{L(\varphi)} \left(\int_{\alpha}^{\beta} [\varphi]_1(t) |\dot{\varphi}(t)| dt, \int_{\alpha}^{\beta} [\varphi]_2(t) |\dot{\varphi}(t)| dt \right) \\ &= \frac{1}{L(\varphi)} \left(\int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt, \int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt \right) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt} \cosh t = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t - e^{-t}}{2} = \sinh t$$

ניגש לחישוב:

$$\frac{d}{dt} \sinh t = \frac{d}{dt} \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2} \right) = \frac{e^t + e^{-t}}{2} = \cosh t$$

$$\sqrt{1 + f'(t)^2} = \sqrt{1 + \sinh^2 t} = \sqrt{1 + \frac{(e^t - e^{-t})^2}{4}} = \sqrt{\frac{4 + e^{2t} - 2 + e^{-2t}}{4}}$$

ולכן:

$$= \sqrt{\frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4}} = \sqrt{\frac{(e^t + e^{-t})^2}{4}} = \sqrt{\cosh^2 t} = \cosh t$$

$$L(\varphi) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh t dt = \sinh \beta - \sinh \alpha = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta} - e^{\alpha} + e^{-\alpha}}{2}$$

אז

$$\int t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int t \cosh t dt = t \sinh t - \int \sinh t dt = t \sinh t - \cosh t$$

וכן

$$\int_{\alpha}^{\beta} t \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} t \cosh t dt = \beta \sinh \beta - \cosh \beta - \alpha \sinh \alpha + \cosh \alpha$$

ולכן:

$$\cosh^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2} \right)^2 = \frac{e^{2t} + 2e^t e^{-t} + e^{-2t}}{4} = \frac{e^{2t} + 2 + e^{-2t}}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t$$

כמוכן:

$$\int f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int \cosh^2 t dt = \int \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cosh 2t \right) dt = \frac{1}{2} t + \frac{1}{4} \sinh 2t$$

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \cosh^2 t dt = \frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sinh 2\beta - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sinh 2\alpha$$

והמרכז הגיאומטרי המבוקש הוא :

$$\left(\frac{\beta \sinh \beta - \cosh \beta - \alpha \sinh \alpha + \cosh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha}, \frac{\frac{1}{2} \beta + \frac{1}{4} \sinh 2\beta - \frac{1}{2} \alpha - \frac{1}{4} \sinh 2\alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} \right)$$

$$= \left(\frac{\beta \sinh \beta - \alpha \sinh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} - \frac{\cosh \beta - \cosh \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha}, \frac{1}{2} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} + \frac{1}{4} \cdot \frac{\sinh 2\beta - \sinh 2\alpha}{\sinh \beta - \sinh \alpha} \right)$$

ואולי אפשר עוד לפשט אבל לא ניסיתי.

שאלה 4 (20 נקודות)

הראו שהפונקציה $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$(x, y) \mapsto \left(\frac{-2xy}{x^4 + y^2}, \frac{x^2}{x^4 + y^2} \right)$$

היא שדה משמר במישור הנקוב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

פתרון

יש דרכים שונות לפתור שאלה זאת. אדגים יותר מדרך אחת.

דרך א: מציאת פונקציית פוטנציאל.

לפי משפט 10.8.2, הפונקציה $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ היא פונקציית פוטנציאל עבור F בקבוצה פתוחה U אם

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{x^2}{x^4 + y^2} \quad : (x, y) \in U \quad \text{בפרט מתקיים} \quad \nabla f|_U = F|_U$$

$$\varphi'_x(y) = \frac{x^2}{x^4 + y^2} \quad : \text{אם נסמן } \varphi_x: y \rightarrow f(x, y) \text{ אז לכל } y \in U_x = \{y \mid (x, y) \in U\} \text{ מתקיים:}$$

זה מאפשר למצוא את φ_x עלידי חישוב אינטגרל בלתי-מסויים:

$$\varphi_x(y) = \int \frac{x^2}{x^4 + y^2} dy = \int \frac{x^2}{x^4 + (x^2 u)^2} x^2 du = \int \frac{du}{1 + u^2} = \arctan u + C_x = \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right) + C_x$$

חישוב זה לא נתן מידע על קבוע האינטגרציה C_x , שיכול להיות מספר שונה עבור ערכים שונים

$$f(x, y) = \varphi_x(y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right) + C_x \quad \text{של } x, \text{ אבל קיבלנו:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{-2xy}{x^4 + y^2} \quad : \text{לכל } (x, y) \in U \text{ צריך להתקיים } \nabla f(x, y) = F(x, y) \text{ ובפרט:}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\arctan\left(\frac{y}{x^2}\right) \right) = \frac{1}{1 + \left(\frac{y}{x^2}\right)^2} \cdot \frac{-2y}{x^3} = \frac{-2xy}{x^4 + y^2} \quad \text{חישוב נותן:}$$

$$f: (x, y) \mapsto \arctan\left(\frac{y}{x^2}\right) \quad \text{לכן בחירה של } C_x = 0 \text{ נותנת את הפונקציה}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{-2xy}{x^4 + y^2}, \frac{x^2}{x^4 + y^2} \right) = F(x, y) \quad \text{שמקיימת}$$

עבור כל $(x, y) \in (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

לפי משפט 10.8.2 הפונקציה הזאת מהווה פוטנציאל עבור F בקבוצה הפתוחה $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}$.

$$g_C: (x, y) \mapsto -\arctan\left(\frac{x^2}{y}\right) + C \quad \text{באופן דומה אפשר לבדוק שכל אחת מהפונקציות:}$$

היא פוטנציאל עבור F בקבוצה הפתוחה $\mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$.

$$h: (x, y) \mapsto \begin{cases} f(x, y) & x \neq 0 \\ g_{\frac{\pi}{2}}(x, y) & y > 0 \\ g_{-\frac{\pi}{2}}(x, y) & y < 0 \end{cases} \quad \text{נגדיר פונקציה } h: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R} \text{ כך:}$$

ראשית יש להראות שזאת הגדרה תקינה של פונקציה, דהיינו שלכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ מותאם רק מספר אחד. אם $y = 0$ הגדרנו באופן חד-ערכי $h(x, y) = f(x, y)$. אם $x = 0$ הגדרנו באופן חד-ערכי $h(x, y) = g_{\frac{\pi}{2}}(x, y)$ או $h(x, y) = g_{-\frac{\pi}{2}}(x, y)$ בהתאם לסימן של y . אבל אם $x \neq 0$ וגם $y \neq 0$ הערך של $h(x, y)$ הוגדר בשתי דרכים שונות, ויש להראות שבשתי הדרכים מדובר באותו מספר. נסמן: $U_1 = (0, \infty) \times (0, \infty)$, $U_2 = (-\infty, 0) \times (0, \infty)$, $U_3 = (-\infty, 0) \times (-\infty, 0)$, $U_4 = (0, \infty) \times (-\infty, 0)$. כל אחת מהקבוצות האלה היא קבוצה פתוחה וקשורה-מסילתית. בכל אחת מהקבוצות האלה ולכל קבוע $C \in \mathbb{R}$ הפונקציות f ו- g_C מהוות פוטנציאלים עבור F . לכן לפי שאלה 9.1.8 לכל $i \in \{1, 2, 3, 4\}$ ולכל $C \in \mathbb{R}$ יש קבוע $\gamma_{i,C} \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים

$$f(x, y) = g_C(x, y) + \gamma_{i,C}$$

לכל $(x, y) \in U_i$. עבור $i \in \{1, 2\}$ כיוון ש- $(1, 1) \in U_1$ ו- $(-1, 1) \in U_2$ נקבל:

$$\gamma_{i,C} = f(\pm 1, 1) - g(\pm 1, 1) = \arctan 1 + \arctan 1 - C = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} - C = \frac{\pi}{2} - C$$

אז $\gamma_{i,\frac{\pi}{2}} = 0$ ולכן לכל $(x, y) \in U_1 \cup U_2$ מתקיים $f(x, y) = g_{\frac{\pi}{2}}(x, y)$, והגדרת $h(x, y)$ חד-ערכית.

עבור $i \in \{3, 4\}$ כיוון ש- $(-1, -1) \in U_3$ ו- $(1, -1) \in U_4$ נקבל:

$$\gamma_{i,C} = f(\pm 1, -1) - g(\pm 1, -1) = \arctan(-1) + \arctan(-1) - C = -\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4} - C = -\frac{\pi}{2} - C$$

בפרט $\gamma_{i,-\frac{\pi}{2}} = 0$ ולכן לכל $(x, y) \in U_3 \cup U_4$ מתקיים $f(x, y) = g_{-\frac{\pi}{2}}(x, y)$, ולכן גם במקרה זה

הגדרת $h(x, y)$ חד-ערכית.

בכך קיבלנו ש- h היא פונקציה שמוגדרת ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

בקבוצה הפתוחה $W_1 = (\mathbb{R} \setminus \{(0, 0)\}) \times \mathbb{R}$ מתקיים $h|_{W_1} = f$ ולכן h גזירה ברציפות ב- W_1 ולכל

$$\nabla h(x, y) = \nabla f(x, y) = F(x, y) \quad (x, y) \in W_1 \text{ מתקיים:}$$

בקבוצה הפתוחה $W_2 = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ מתקיים $h|_{W_2} = g_{\frac{\pi}{2}}|_{W_2}$ ולכן h גזירה ברציפות ב- W_2 ולכל

$$\nabla h(x, y) = \nabla g_{\frac{\pi}{2}}(x, y) = F(x, y) \quad (x, y) \in W_2 \text{ מתקיים:}$$

בקבוצה הפתוחה $W_3 = \mathbb{R} \times (-\infty, 0)$ מתקיים $h|_{W_3} = g_{-\frac{\pi}{2}}|_{W_3}$ ולכן h גזירה ברציפות ב- W_3 ולכל

$$\nabla h(x, y) = \nabla g_{-\frac{\pi}{2}}(x, y) = F(x, y) \quad (x, y) \in W_3 \text{ מתקיים:}$$

קיבלנו ש- h גזירה ברציפות ב- $W_1 \cup W_2 \cup W_3 = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ולכל נקודה (x, y) בקבוצה זאת

מתקיים $\nabla h(x, y) = F(x, y)$. לכן לפי משפט 10.1.8 הפונקציה h היא פונקציית פוטנציאל עבור F

בקבוצה $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ולפי אבחנה 6.1.8 הפונקציה F היא שדה משמר בקבוצה $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

דרך ב: בעזרת שאלה 10.ח.8.

שני רכיבי הפונקציה F הם פונקציות רציונליות שמוגדרות במישור הנקוב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ולכן נוכל לגזור אותם לפי כללי הגזירה שלמדנו באינפי 1. נקבל

$$JF_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{(x^4 + y^2) \cdot (-2y) - (-2xy) \cdot 4x^3}{(x^4 + y^2)^2} & \frac{(x^4 + y^2) \cdot (-2x) - (-2xy) \cdot 2y}{(x^4 + y^2)^2} \\ \frac{(x^4 + y^2) \cdot 2x - x^2 \cdot 4x^3}{(x^4 + y^2)^2} & \frac{(x^4 + y^2) \cdot 0 - x^2 \cdot 2y}{(x^4 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{6x^4y - 2y^3}{(x^4 + y^2)^2} & \frac{2xy^2 - 2x^5}{(x^4 + y^2)^2} \\ \frac{2xy^2 - 2x^5}{(x^4 + y^2)^2} & \frac{-2x^2y}{(x^4 + y^2)^2} \end{pmatrix}$$

ולכן F גזירה ברציפות בקבוצה הפתוחה $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ומטריצת היעקוביאן $JF_{(x,y)}$ סימטרית בכל נקודה (x, y) בקבוצה הזאת. לפי חלק (ii) של שאלה 10.ח.8 אם נמצא לולאה φ_0 שתמונתה ב- U , שמספר הליפוף שלה אינו 0 ושעבורה $\int_{\varphi_0} F \cdot d(x, y) = 0$, ינבע מכך ש- F הוא שדה משמר בקבוצה הפתוחה U .

אחת הדרכים למצוא לולאה כזאת שיהיה נוח לחשב עליה את האינטגרל היא לחפש לולאה כזאת שבתמונתה המכנה בהגדרת F הוא קבוע. אפשר לראות בעזרת חלק ב של שאלה 1 במטלה זאת שיש לולאה כזאת (שהיא סדירה ומספר הליפוף שלה הוא 1), אבל אנו רוצים הצגה מפורשת של הלולאה המבוקשת, שתאפשר לחשב את האינטגרל המבוקש.

נגדיר $H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(t, \lambda) \mapsto \left((\cos t)^{\frac{1}{3}} |\cos t|^{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\lambda}, \sin t \right)$$

זאת פונקציה יסודית ולכן היא רציפה. תמונתה מוכלת ב- U : לא יתכן $H(t, \lambda) = 0$ כי זה מחייב

שגם $\sin t = 0$ וגם $\cos t = 0$, ואז $1 = \cos^2 t + \sin^2 t = 0 + 0 = 0$. ברור גם שלכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים

$$H(2\pi, \lambda) = \left((\cos 2\pi)^{\frac{1}{3}} |\cos 2\pi|^{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\lambda}, \sin 2\pi \right) = \left((\cos 0)^{\frac{1}{3}} |\cos 0|^{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}\lambda}, \sin 0 \right) = H(0, \lambda)$$

ולכן $H_\lambda : t \mapsto H(t, \lambda)$ היא לולאה. $H_1 : t \mapsto \left((\cos t)^{\frac{1}{3}} |\cos t|^{\frac{1}{6} + \frac{1}{2}}, \sin t \right) = (\cos t, \sin t)$ היא לולאה

שמספר הליפוף שלה הוא 1. מכאן אפשר להסיק בעזרת טענה 13.ח.8 שלכל $\lambda \in [0, 1]$ מספר

הליפוף של הלולאה H_λ הוא 1, ובפרט זה מספר הליפוף של הלולאה H_0 (ראו פירוט של טיעון זה בפתרון סעיף ב של שאלה 1 במטלה זאת).

לבסוף נרצה לחשב ולקבל $\int_{H_0} F \cdot d(x, y) = 0$.

לכל $t \in [0, 2\pi]$ מתקיים $H_0(t) = \left((\cos t)^{\frac{1}{3}} |\cos t|^{\frac{1}{6}}, \sin t \right)$ ולכן

כאשר הסימן $\pm$ נקבע להיות $+$ כאשר $\cos t \geq 0$ ו- $-$ כאשר $\cos t \leq 0$.

$$\frac{dH_0}{dt}(t) = \left(-\frac{1}{2} |\cos t|^{-\frac{1}{2}} \sin t, \cos t \right) = \pm \left(-\frac{y}{2x}, x^2 \right) \quad \text{אם } (x, y) = H_0(t)$$

נשים לב ש- H_0 אינה גזירה בנקודות בהן $\cos t = 0$, ובפרט אינה לולאה סדירה. בכל נקודה שבה

$$F(H_0(t)) \cdot \frac{dH_0}{dt}(t) = \pm \frac{1}{x^4 + y^2} (-2xy, x^2) \cdot \left(-\frac{y}{2x}, x^2 \right) = \pm \frac{x^4 + y^2}{x^4 + y^2} = \pm 1$$

היא גזירה מתקיים:

והסימן נקבע לפי הסימן של $\cos t$. כדי להשתמש במשפט 21.8.ה.21 או זקוקים למסילה גזירה

ברציפות. לכן נציג את H_0 כשרשור $H_0 = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4 * \varphi_5$ כאשר $0 < \delta < \frac{\pi}{2}$ ו-

$$\varphi_1 = H_0|_{[0, \frac{\pi}{2}-\delta]} \quad \varphi_2 = H_0|_{[\frac{\pi}{2}-\delta, \frac{\pi}{2}+\delta]} \quad \varphi_3 = H_0|_{[\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{3\pi}{2}-\delta]} \quad \varphi_4 = H_0|_{[\frac{3\pi}{2}-\delta, \frac{3\pi}{2}+\delta]} \quad \varphi_5 = H_0|_{[\frac{3\pi}{2}+\delta, 2\pi]}$$

עבור $i \in \{1, 3, 5\}$ המסילה φ_i גזירה ברציפות ומתקיים:

$$\int_{\varphi_1} F \cdot d(x, y) = \int_{H_0|_{[0, \frac{\pi}{2}-\delta]}} F \cdot d(x, y) = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} F(H_0(t)) \cdot \frac{dH_0}{dt}(t) dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}-\delta} 1 dt = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\int_{\varphi_3} F \cdot d(x, y) = \int_{H_0|_{[\frac{\pi}{2}+\delta, \frac{3\pi}{2}-\delta]}} F \cdot d(x, y) = \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta} F(H_0(t)) \cdot \frac{dH_0}{dt}(t) dt = \int_{\frac{\pi}{2}+\delta}^{\frac{3\pi}{2}-\delta} (-1) dt = -\pi + 2\delta$$

$$\int_{\varphi_5} F \cdot d(x, y) = \int_{H_0|_{[\frac{3\pi}{2}+\delta, 2\pi]}} F \cdot d(x, y) = \int_{\frac{3\pi}{2}+\delta}^{2\pi} F(H_0(t)) \cdot \frac{dH_0}{dt}(t) dt = \int_{\frac{3\pi}{2}+\delta}^{2\pi} 1 dt = \frac{\pi}{2} - \delta$$

$$\int_{\varphi_1} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_3} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_5} F \cdot d(x, y) = 0 \quad \text{ולכן:}$$

כמוכן F היא פונקציה רציפה ב- U ובפרט היא רציפה בתמונת הלולאה H_0 , שהיא קבוצה סגורה

וחסומה. לפי משפט וויירשטראס הפונקציה הסקלרית $|F|$ חסומה בתמונת H_0 , כלומר יש מספר

ממשי M כזה ש- $|F(H_0(y))| \leq M$ לכל $t \in [0, 2\pi]$. בעזרת טענה 29.1.8 וטענה 13.8.ה.21 נקבל:

$$\left| \int_{\varphi_i} F \cdot d(x, y) \right| \leq \int_{\varphi_i} |F(x, y)| \cdot |d(x, y)| \leq M \cdot L(\varphi_i)$$

$$\begin{aligned} \left| \int_{H_0} F \cdot d(x, y) \right| &= \left| \int_{\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4 * \varphi_5} F \cdot d(x, y) \right| = \left| \sum_{i=1}^5 \int_{\varphi_i} F \cdot d(x, y) \right| \\ &= \left| \int_{\varphi_2} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_4} F \cdot d(x, y) \right| \leq M \cdot (L(\varphi_2) + L(\varphi_4)) \end{aligned}$$

עתה נוכל להסיק:

לבסוף, אפשר להראות בעזרת טענה 30.8.ב.30 שמתקיים $L(\varphi_2) + L(\varphi_4) \xrightarrow{\delta \rightarrow 0^+} 0$

(לשם כך צריך לדעת גם שאורכה של הלולאה H_0 סופי. זה נכון למשל כי את הקטע $[0, 2\pi]$ אפשר

לחלק לארבעה חלקים שווי אורך שבכל אחד מהם רכיבי H_0 הם פונקציות מונוטוניות, ולכן

$$\left| \int_{H_0} F \cdot d(x, y) \right| = 0 \quad \text{בעלות השתנות חסומה). מכלל הכריך אפשר להסיק שמתקיים}$$

$$\int_{H_0} F \cdot d(x, y) = 0 \quad \text{ולכן גם:}$$

עוד דרך, שמנצלת את שאלה 21.1.8 ושאלה 10.ח.8, בקצרה:

לוקחים למשל את הלולאה $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ שמוגדרת עלידי $\varphi: t \mapsto (\cos t, \sin t)$ (שכידוע מספר הליפוף שלה סביב הראשית הוא 1) ואת המטריצה $M = -I$ (עם I שהיא מטריצת היחידה 2×2).

בנתונים האלה ובסימוני שאלה 21.1.8 מקבלים $\tilde{F} = -F$ ולכן $\int_{\varphi} F \cdot dx = -\int_{\Gamma^{-1} \circ \varphi} F \cdot dx$.

מצד שני $\varphi|_{[0, \pi]}$ שקולה ל- $\Gamma^{-1} \circ \varphi|_{[\pi, 2\pi]}$ ו- $\varphi|_{[\pi, 2\pi]}$ שקולה ל- $\Gamma^{-1} \circ \varphi|_{[0, \pi]}$.

מזה נובע ש- $\int_{\varphi} F \cdot dx = \int_{\Gamma^{-1} \circ \varphi} F \cdot dx$ ולכן $\int_{\varphi} F \cdot dx = 0$.

ולבסוף דרך נוספת, שמנצלת ידע מפרק 9: בעזרת משפט גרין.

דרך זאת דומה לדרך ב, אך לחישוב האינטגרל נעזרים במשפט גרין ותוצאות נוספות מפרק 9. אסקור אותה בקצרה:

בעזרת סעיף ב משאלה 1 במטלה זאת או בדרך אחרת מסיקים שיש לולאה פשוטה וסדירה φ

שתמונתה היא הקבוצה $\{(x, y) \mid x^4 + y^2 = 1\}$.

רואים שמתקיים:

$$\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \oint_{\varphi} x^2 dy - 2xy dx$$

ממשפט גרין מקבלים $\oint_{\varphi} x^2 dy - 2xy dx = \iint_K 4x dx dy$ עם הקבוצה: $K = \{(x, y) \mid x^4 + y^2 \leq 1\}$

הפונקציה האפינית $f: (x, y) \mapsto (-x, -y)$ מקיימת $f(K) = K$ ולכן אם (x, y) המרכז הגיאומטרי

של K אז $f(x, y) = (x, y)$ כלומר $(-x, -y) = (x, y)$ ומכאן $(x, y) = (0, 0)$ ובפרט: $\iint_K x dx dy = 0$

גם את העובדה שמספר הליפוף של φ אינו 0 אפשר לקבל ממשפט גרין (ראו שאלה 22.ט.9).

שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו עבור אילו ערכים של $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ ו- $r > 0$ הקבוצה $U = B((a, b); r) \setminus \bar{B}((0, 0); 45)$

היא קבוצה לא ריקה שבה הפונקציה $F: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$(x, y) \mapsto \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y)$$

היא שדה משמר.

פתרון

ראשית נבדוק ש- F גזירה ברציפות במישור הנקוב $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$, ושהמטריצה $JF_{(x, y)}$ היא

מטריצה סימטרית עבור כל $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. זה יאפשר שימוש במגוון כלים מסעיף 8.ח.

$$f: (x, y) \mapsto \frac{e^x}{x^2 + y^2} \quad \text{נסמן}$$

$$g: (x, y) \mapsto (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y) \quad \text{ר}$$

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{(x^2 + y^2)e^x - 2xe^x}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{-2ye^x}{(x^2 + y^2)^2} \right) = \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} (x^2 + y^2 - 2x, -2y) \quad \text{אז}$$

$$Jg_{(x, y)} = \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y + y \sin y - \cos y \\ \cos y & \sin y + y \cos y - x \sin y \end{pmatrix} \quad \text{וכן:}$$

מאחר ש- $F = fg$, לפי חלק ב של שאלה 15.ז.3 מתקיים:

$$\begin{aligned} JF_{(x, y)} &= g(x, y)^T \nabla f(x, y) + f(x, y) Jg_{(x, y)} \\ &= \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x \sin y - y \cos y \\ y \sin y + x \cos y \end{pmatrix} (x^2 + y^2 - 2x, -2y) \\ &\quad + \frac{e^x}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} \sin y & x \cos y + y \sin y - \cos y \\ \cos y & \sin y + y \cos y - x \sin y \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} (x \sin y - y \cos y)(x^2 + y^2 - 2x) & (x \sin y - y \cos y)(-2y) \\ (y \sin y + x \cos y)(x^2 + y^2 - 2x) & (y \sin y + x \cos y)(-2y) \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{e^x}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} (x^2 + y^2) \sin y & (x^2 + y^2)(x \cos y + y \sin y - \cos y) \\ (x^2 + y^2) \cos y & (x^2 + y^2)(\sin y + y \cos y - x \sin y) \end{pmatrix} \\ &= \frac{e^x \sin y}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 & x^2 y + y^3 - 2xy \\ x^2 y + y^3 - 2xy & x^2 - y^2 - x^3 - xy^2 \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{e^x \cos y}{(x^2 + y^2)^2} \begin{pmatrix} 2xy - x^2 y - y^3 & x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 \\ x^3 + xy^2 - x^2 + y^2 & x^2 y + y^3 - 2xy \end{pmatrix} \end{aligned}$$

רואים ש- F גזירה ברציפות ב מישור הנקוב $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ ושמטריצת היעקוביאן שלה סימטרית בכל נקודה בקבוצה זאת. לכן לפי משפט 8.11.8 הפונקציה F היא שדה משמר בכל קבוצה פתוחה ופשוטתקשר שאינה מכילה את $(0,0)$.

נתבונן עתה בקבוצה $U = B((a,b);r) \setminus \bar{B}((0,0);45)$. זאת הקבוצה של כל הנקודות בעיגול הפתוח $B_1 = B((a,b);r)$ שהן גם מחוץ לעיגול הסגור $B_2 = \bar{B}((0,0);45)$. הקבוצה U היא קבוצה פתוחה כי היא חיתוך הקבוצות הפתוחות B_1 ו- $B_2 \setminus \mathbf{R}^2$. היא אינה מכילה את $(0,0)$ כי $(0,0) \in B_2$. מהתבוננות במצבים היחסיים האפשריים בין שני העיגולים, נראה שאם העיגול הסגור B_2 מוכל כולו בעיגול הפתוח B_1 נוכל למצוא מעגל שמרכזו בראשית הצירים, שמוכל ב- U ומקיף את העיגול B_2 , ונראה אם כן שבמקרה זה U אינה פשוטתקשר. אם העיגול B_2 אינו מוכל ב- B_1 נראה שאין אפשרות להקיף את B_2 בלי לצאת מ- B_1 ולכן הקבוצה U היא פשוטתקשר (ובמקרה זה כאמור הפונקציה F היא שדה משמר). לכן נרצה תנאי השקול לכך שהעיגול B_1 מכיל את העיגול B_2 . מחלק ב של שאלה 5.1.1 בספר הלימוד נקבל שאם $|a,b| > r-45$ אז $B_2 \subset B_1$. כשתנאי זה מתקיים $|a,b| < r-45$ ולכן יש מספר ממשי s כך ש- $|a,b| < s < r-45$. אז גם $\bar{B}((0,0);s) \subset B_1$ ולכן גם $S = S((0,0);s) \subset B_1$. מאחר ש- $s < 45$ ברור גם ש- $S \cap B_2 = \emptyset$ ולכן $S \subseteq B_1 \setminus B_2 = U$.

הקבוצה S היא תמונת הלולאה $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ שמוגדרת עלידי $t \mapsto s(\cos t, \sin t)$, שידוע שמספר הליפוף שלה סביב הראשית הוא 1. אם נראה ש- $\oint_{\varphi} F \cdot d(x,y) \neq 0$ נקבל לפי שאלה 3.1.8 ש- F אינו שדה משמר ב- U . לפי חלק ב(i) של שאלה 8.10.8 אם נמצא לולאה אחרת ψ שמספר הליפוף שלה הוא 1 כך ש- $\oint_{\psi} F \cdot d(x,y) \neq 0$ (ותמונתה לאו דוקא מוכלת ב- U) נכול להסיק שגם $\oint_{\varphi} F \cdot d(x,y) \neq 0$ ולכן F אינו שדה משמר ב- U . ניקח למשל את הלולאה הידועה $\psi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי $t \mapsto (\cos t, \sin t)$ (כי המכנה שמופיע בפונקציה שלנו קבוע עליה). ננסה לחשב:

$$\oint_{\psi} F \cdot d(x,y) = \int_0^{2\pi} F(\psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) dt = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt$$

כדי לקצר בחישוב נחשב בנפרד:

$$\begin{aligned} F(x,y) \cdot (-y,x) &= \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y) \cdot (-y,x), \\ &= \frac{e^x}{x^2 + y^2} (-xy \sin y + y^2 \cos y + xy \sin y + x^2 \cos y) \\ &= \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x^2 + y^2) \cos y = e^x \cos y \end{aligned}$$

$$\oint_{\psi} F \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} F(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt \quad \text{לכן:}$$

זה לא נראה נחמד לחשב את זה, אבל אין צורך: מתקיים $-1 \leq \sin t \leq 1$, והפונקציה $\cos$ יורדת בקטע $[0, \frac{\pi}{2}]$, ולכן לכל t ממשי מתקיים $\cos(\sin t) = \cos(|\sin t|) \geq \cos 1 > \cos \frac{\pi}{2} = 0$.

אז הפונקציה $t \mapsto e^{\cos t} \cos(\sin t)$ היא פונקציה רציפה וחיובית ולכן האינטגרל שלה בקטע

$$\oint_{\psi} F \cdot d(x, y) = \int_0^{2\pi} e^{\cos t} \cos(\sin t) dt > 0 \quad \text{כלומר: } [0, 2\pi] \text{ חיובי, כלומר:}$$

נסכם מה שראינו עד כה: אם $r - 45 > |(a, b)|$ אז יש לולאה φ שתמונתה מוכלת בקבוצה U ולפי

שאלה 8.10 מתקיים $\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \oint_{\psi} F \cdot d(x, y) > 0$ ולכן F אינה שדה משמר בקבוצה U .

נראה עכשיו שאם $r - 45 \leq |(a, b)|$ אז F היא שדה משמר בקבוצה U . ניתן להראות שמתנאי זה נובע ש- U היא קבוצה פשוטתיקה, אך במקום זה נראה ש- U מוכלת בקבוצה פתוחה וכוכבית V שאינה מכילה את $(0, 0)$, ואז לפי טענה 8.4 הפונקציה F היא שדה משמר ב- V ומאחר ש-

$$U \subseteq V \quad \text{היא גם שדה משמר ב-} U.$$

נסמן $V = \mathbb{R}^2 \setminus \{t(a, b) \mid t \leq 0\}$. לפי חלק ג של שאלה 8.21 V היא קבוצה כוכבית.

אם לא מתקיים $U \subseteq V$ אז $U \cap \{t(a, b) \mid t \leq 0\} \neq \emptyset$ ולכן יש $t \leq 0$ כך ש- $t(a, b) \in U = B_1 \setminus B_2$.

בפרט $|t(a, b)| > 45$ ולכן $t(a, b) \notin B_2 = \overline{B}((0, 0); 45)$

מתקיים גם $t(a, b) \in B_1 = B((a, b); r)$ ולכן $|(t-1)(a, b)| = |t(a, b) - (a, b)| < r$

מאחר ש- $t \leq 0$ מתקיים גם $t-1 \leq 0$ ולכן $|t| = -t$ וכן $|t-1| = 1-t$.

אז $r > |(t-1)(a, b)| = |t-1| \cdot |(a, b)| = (1-t)|(a, b)| = |(a, b)| - t|(a, b)|$

$$= |(a, b)| + |t| \cdot |(a, b)| = |(a, b)| + |t(a, b)| > |(a, b)| + 45$$

כלומר $r - 45 > |(a, b)|$. לכן אם $r - 45 \leq |(a, b)|$ אז הנחת השלילה שלא מתקיים $U \subseteq V$ אינה

נכונה, כלומר $U \subseteq V$, וכאמור מאחר ש- F היא שדה משמר ב- V היא גם שדה משמר ב- U .

לסיכום, הראינו שאם $r - 45 \leq |(a, b)|$ אז F היא שדה משמר ב- U , ואחרת, אם $r - 45 > |(a, b)|$,

אז F אינה שדה משמר ב- U ולכן F היא שדה משמר ב- U אם ורק אם $r - 45 \leq |(a, b)|$.

בנוסף יש לבדוק באילו תנאים הקבוצה $U = B_1 \setminus B_2$ אינה ריקה. היא ריקה אם ורק אם $B_1 \subseteq B_2$.

תהי $x \in B_1$. מאחר ו- B_1 קבוצה פתוחה, B_1 היא סביבה של x . כיוון ש- $B_1 \subseteq B_2$ אין ב- B_1 אף נקודה

שאינה ב- B_2 ולכן x אינה נקודת שפה של B_2 . כלומר $x \notin \partial B_2$. אז $x \in B_2 \setminus \partial B_2$ ולכן $B_1 \subseteq B_2 \setminus \partial B_2$.

מתקיים $B_2 \setminus \partial B_2 = \overline{B}((0, 0); 45) \setminus S((0, 0); 45) = B((0, 0); 45)$

לכן: $B((a, b); r) \subseteq B((0, 0); 45)$

ברור גם שאם $B((a, b); r) \subseteq B((0, 0); 45)$, כלומר אם $B_1 \subseteq B_2 \setminus \partial B_2$, אז $B_1 \subseteq B_2$.

אז $U = \emptyset$ אם ורק אם $B((a,b);r) \subseteq B((0,0);45)$ ולפי חלק א של שאלה 5.ה.1 זה שקול לאי

שוויון $|a,b| \geq 45 - r$. לכן $U \neq \emptyset$ אם ורק אם $|a,b| < 45 - r$.

נסכם: U היא קבוצה שאינה ריקה ושי F שדה משמר בה אם ורק אם: $|a,b| < r - 45 \leq |a,b|$

דרך נוספת לרשום את התנאי:

אפשר לרשום את התנאי בצורה $|r - 45| \leq |a,b|$, ולדרוש בנוסף שאם מתקיים שוויון אז $r > 45$.

נשים לב ש: $|r - 45| \leq |a,b| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$$\Leftrightarrow (r - 45)^2 \leq a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow r^2 - 2 \cdot 45 \cdot r + 45^2 \leq a^2 + b^2$$

$$\Leftrightarrow a^2 + b^2 - r^2 + 90r \geq 2025$$

כלומר התנאי שמצאנו שקול לקיום האי-שוויון $a^2 + b^2 - r^2 + 90r \geq 2025$ יחד עם הדרישה הנוספת

שבמקרה שהאי-שוויון הזה הוא שוויון אז $r > 45$.