

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 7

מועד אחרון להגשה : 9.3.2025

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\{A^2 \mid A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})\}$ מכילה סביבה של מטריצת היחידה I .

(מרחב המטריצות $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^{k^2}$).

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי F פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה פעמיים ברציפות בסביבה של הנקודה (a, b) .

נתון : $F(a, b) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0$ $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$ $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) \neq 0$

הוכיחו שהמשוואה $F(x, y) = 0$ אינה מגדירה באופן סתום בסביבת (a, b) את x כפונקציה

של y . (שימו לב שהמשוואה כן מגדירה באופן סתום בסביבת (a, b) את y כפונקציה של x . הוכיחו זאת, היעזרו בנתונים כדי להסיק מסקנות על תכונות הפונקציה הזאת, ובעזרתן הוכיחו את הנדרש בשאלה).

שאלה 3 (20 נקודות)

נסמן : $S_1 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 \times (0, \frac{3}{2}) \mid z^2 = 3x^2 + 3y^2\}$

$S_2 = (\mathbb{R}^2 \times [\frac{3}{2}, \infty)) \cap S((0, 0, 2); 1)$

הוכיחו שהקבוצה $S = S_1 \cup S_2$ היא משטח חלק.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי S יריעה חלקה d -ממדית ב- $\mathbb{R}^k$, בעלת שתי תכונות :

1. כל קרן שקודקודה ב- $0^{[k]}$ מכילה לכל היותר נקודה אחת של S .

2. לכל נקודה $a \in S$ המרחב המשיק בנקודה a ל- S אינו מכיל את $0^{[k]}$.

תהי S' איחוד כל הקרניים שקודקודן ב- $0^{[k]}$ שמכילות נקודה מ- S , לא כולל $0^{[k]}$ עצמה, דהיינו :

$$S' = \bigcup_{a \in S} \{ta \mid t > 0\}$$

הראו שאם $d = k - 1$ (כלומר S היא משטח-על) אז S' היא קבוצה פתוחה.

שאלה 5 (20 נקודות)

$$(x, y, z) \mapsto xyz$$

יהי $\alpha > 0$ ותהי $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי:

הראו של- f יש ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה

$$A = \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x \leq \alpha y, x^6 + y^6 + z^6 \leq 3 \right\}$$

ומצאו אותם ואת כל נקודות הקיצון של f בקבוצה זאת. (התוצאה תלויה במספר α).

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2024\3\85.

(אפשר אולי לנצל במידה זאת או אחרת את שאלה 3 בממ"ן 12. לא ניסיתי).

משתמשים במשפט הפונקציה ההופכית עם הפונקציה $f: M_{k \times k}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbf{R})$

שמוגדרת על ידי $A \mapsto A^2$. האתגר העיקרי הוא חישוב מטריצת היעקוביאן. אפשר לקבוע גזירות ברציפות כי בבירור כל הרכיבים הם פונקציות פולינומיות. אפשר לחשב את הנגזרת החלקית של $[f]_{ij}$ לפי המשתנה mn , ובאופן כללי זה די מכוער אבל

מקבלים $\frac{\partial [f]_{ij}}{\partial x_{mn}}(X) = \delta_{im}x_{nj} + \delta_{nj}x_{im}$ ולכן $\frac{\partial [f]_{ij}}{\partial x_{mn}}(T) = 2\delta_{im}\delta_{nj}$ ולכן $Jf_I = 2I_{k^2 \times k^2}$.

יותר נוח לראות ש- $f(I+H) - f(I) = (I+H)^2 - I^2 = 2H + H^2$ ושמתקיים

ולכן f גזירה ב- I (וכאמור בכל מקום וברציפות) $D_I f(H) = 2H$ ו- $\frac{|H^2|}{|H|} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$

ולכן Df_I הפיכה.

לשאלה 2: 2017\1\13. משתמשים במשפט ההגדרה הסתומה, ועדיף בגרסתו שבחלק א של

מסקנה 8.7.8. מקבלים שיש סביבה פתוחה U של a וסביבה פתוחה W של b

ופונקציה גזירה ברציפות $f: U \rightarrow V$ כך ש- $G(f) = \{(x, y) \in U \times W \mid F(x, y) = 0\}$

וכן לכל $x \in U$ מתקיים:

$$f'(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

בפרט $f(a) = b$ ומתקיים

$$f'(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} = 0$$

כלומר a היא נקודה קריטית של f . גזירות פעמיים ברציפות פירושן שהמונה

והמכנה לעיל הם פונקציות גזירות ובעזרת כלל השרשרת מקבלים:

$$f''(x) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) \right) - \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x)) \right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x)) \right)^2}$$

ובפרט, בעזרת הנתונים ומה שמצאנו כבר ($f'(a) = 0$) נקבל:

$$f''(a) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \right)^2} = - \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} \neq 0$$

מכאן אפשר להסיק (למשל ממשפט מאינפי 1) שהנקודה a היא נקודת מינימום

מקומי של f .

.....

עכשיו נראה בעזרת זה שבכל סביבה מלבנית של (a, b) יש שתי נקודות אם אותו שיעור y ולכן לא נוכל לקבל את x כפונקציה של y .

לשאלה 3: חלק א של 6198\2024 (חלק ב של השאלה הוא שאלה 1 בממ"ן 16).

יש כאן מגוון דרכים. למשל מדובר במשטח סיבוב סביב ציר z ואפשר להשתמש (בערך) בטענה 9.ג.10 וחלק מהוכחתה (ששם מראים חלקות משטח סיבוב של מסילה סדירה) אבל זה לא בממ"ן 13. אפשר גם כך: למשל ממשפט 11.ג.7 S היא יריעה חלקה d -ממדית אם ורק אם לכל נקודה בה יש סביבה פתוחה U עבורה $S \cap U$ היא יריעה חלקה d -ממדית (דהיינו להיות יריעה חלקה היא תכונה מקומית). עבור $U_1 = \mathbf{R}^2 \times (\frac{3}{2}, \infty)$ מתקיים $S \cap U_1 = S((0, 0, 2); 1) \cap U_1$ וזה משטח חלק (ואפילו טלאי חלק דרממדי).

עבור $U_2 = \mathbf{R}^2 \times (0, 2)$ אפשר להראות ש- $S \cap U_2$ היא גרף $G(g)$ של פונקציה גזירה ברציפות $g: B((0, 0); 1) \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ ולכן היא טלאי חלק דרממדי. דרך אחת

$$f: t \mapsto \begin{cases} t\sqrt{3} & 0 < t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 - \sqrt{1-t^2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t < 1 \end{cases} \quad \text{להראות זאת: נגדיר } f: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R} \text{ עלידי:}$$

$$2 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 2 - \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{ב-} \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ההגדרה טובה כי:}$$

אז מטעמי אינפי 1 הפונקציה רציפה, וגם הנגזרת שלה היא:

$$f'(t) = \begin{cases} \sqrt{3} & 0 < t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t < 1 \end{cases}$$

וגם כאן הנוסחה בסדר בנקודה $\frac{\sqrt{3}}{2}$ מטעמי שוויון נגזרות חד-צדדיות, והנגזרת רציפה.

כעת נגדיר את g עלידי:

$$(x, y) \mapsto f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)$$

זאת הרכבה של פונקציות גזירות ברציפות ולכן היא גזירה ברציפות. אפשר גם לחשב:

$$\nabla g(x, y) = f'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) & 0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}(x, y) & \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \end{cases}$$

קיבלנו ש- $S \subseteq U_1 \cup U_2$ ו- $S \cap U_1$ וגם $S \cap U_2$ משטחים חלקים, ולכן S משטח חלק.

לשאלה 4: רציתי לשאול:

תהי S יריעה חלקה d -ממדית ב- $\mathbf{R}^k$, בעלת שתי תכונות:

1. כל קרן שקודקודה ב- $0^{[k]}$ מכילה לכל היותר נקודה אחת של S .
2. לכל נקודה $a \in S$ המרחב המשיק בנקודה a ל- S אינו מכיל את $0^{[k]}$.

תהי S' איחוד כל הקרניים שקודקודן ב- $0^{[k]}$ שמכילות נקודה מ- S , לא כולל $0^{[k]}$
 עצמה, דהיינו: $S' = \bigcup_{a \in S} \{ta \mid t > 0\}$

א. הראו שאם $d = k - 1$ (כלומר S היא משטח-על) אז S' היא קבוצה פתוחה.
 ב. הראו שאם $d < k - 1$ ו- S היא קבוצה סגורה וחסומה אז S' היא טלאי חלק $d + 1$ -ממדי. במקרה זה הראו גם שאם $a \in S$ והתת-מרחב האפייני A הוא המרחב המשיק בנקודה a ל- S אז המרחב המשיק בנקודה a ל- S' הוא $Sp(A)$ (כלומר התת-מרחב הלינארי הנפרש עלידי הקבוצה A).
 ג. (רשות) מצאו דוגמה המראה שטענת סעיף ב אינה נכונה ללא ההנחה ש- S סגורה וחסומה.

הקושי ב-ב הוא לקבל לכל נקודה של S' סביבה פתוחה שחיתוכה עם S' הוא טלאי. אם $a \in S$ אז לפי חלק ג של משפט 11.ג.7 יש סביבה פתוחה U של a כך ש- $S \cap U$ היא טלאי חלק. לכן יש Ω פתוחה ב- $\mathbb{R}^d$ ו- $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ שהיא הומאומורפיזם מ- Ω ל- $S \cap U$, ושהיא גזירה ברציפות ב- Ω ולכל $\omega \in \Omega$ דרגת המטריצה Jh_ω היא d . זאת מטריצה $k \times d$ שעמודותיה בלתי-לוליות לינאריות. כמובן לכל $\omega \in \Omega$ לפי אבחנה 8.ד.7 $T_{h(\omega)}(S) = \{vJh_\omega^T \mid v \in \mathbb{R}^d\}$, שזה מרחב השורות של המטריצה Jh_ω^T . המרחב המשיק בנקודה $h(\omega)$ ל- S הוא $A = h(\omega) + T_{h(\omega)}(S)$. נתון ש- $0^{[k]} \notin A$ ולכן $h(\omega) \notin T_{h(\omega)}(S)$, וכיוון ש- $T_{h(\omega)}(S)$ מרחב לינארי גם $h(\omega) \notin T_a(S)$. אז $h(\omega)$ אינו במרחב השורות של המטריצה Jh_ω^T , ולכן $h(\omega)^T$ אינו במרחב העמודות של המטריצה Jh_ω .

נגדיר $\Omega' = \Omega \times (0, \infty)$ ופונקציה $f: \Omega' \rightarrow \mathbb{R}^k$ על ידי: $f: (\omega, t) \mapsto th(\omega)$
 כמובן $h(\omega) \in S$ ולכן $th(\omega)$ נמצא על קרן שקודקודה בראשית ומכילה נקודה של S ולכן $f(\omega, t) \in S'$. לכן $f(\Omega') \subseteq S'$.

מתקיים $Jf_{(\omega, t)} = \begin{pmatrix} tJh_\omega & h(\omega)^T \end{pmatrix}$ וכיוון ש- $h(\omega)^T$ אינה במרחב העמודות של Jh_ω ועמודות של Jh_ω בלתי-לוליות לינאריות גם עמודות $Jf_{(\omega, t)}$ בלתי-לוליות לינאריות, ודרגתה היא $d + 1$ כלומר דרגתה מלאה.

אם S הוא משטח-על, כלומר אם $d = k - 1$ אז $d + 1 = k$ והמטריצה $Jf_{(\omega, t)}$ היא מטריצה $k \times k$ ש- k עמודותיה בלתי-לוליות לינאריות, כלומר היא הפיכה.

כעת תהי $b \in S'$. היא נמצאת על קרן שקודקודה ב- $0^{[k]}$ ושעוברת באיזושהי $a \in S$, ולכן יש $\lambda > 0$ כך ש- $b = \lambda a$. בסימונים לעיל, יש ω כך ש- $a = h(\omega)$ והפונקציה f גזירה ברציפות ב- Ω' שהיא סביבה של (ω, λ) . המטריצה $Jf_{(\omega, \lambda)}$ הפיכה, ולכן

הפונקציה הלינארית $Df_{(\omega,\lambda)}$ הפיכה. לפי משפט הפונקציה ההופכית (משפט 4.7 א.4) יש

כדור פתוח $B \subseteq \Omega'$ כך ש- $f(B)$ קבוצה פתוחה. אז $f(B)$ היא סביבה של

$$f(B) \subseteq f(\Omega') \subseteq S' \text{ ו- } f(\omega, \lambda) = \lambda h(\omega) = \lambda a = b$$

הראינו שלכל $b \in S'$ יש סביבה שמוכלת ב- S' , ולכן S' היא קבוצה פתוחה.

אפשר להמשיך ולהוכיח עוד דברים (במקור סימנתי ב- g מה שמסומן לעיל ב- f).

כמוכן במקור הנחתי ש- S עצמה היא טלאי חלק):

הפונקציה g היא חד-חד-ערכית, כי אם $g(\omega_1, t_1) = g(\omega_2, t_2)$ אז $t_1 h(\omega_1) = t_2 h(\omega_2)$

ולכן $h(\omega_1)$ ו- $h(\omega_2)$ נמצאות על אותה קרן שקודקודה בראשית, אבל יש לכל היותר

נקודה אחת של S בקרן הזאת, ולכן בהכרח $h(\omega_1) = h(\omega_2)$, ויחד עם השוויון

$$t_1 h(\omega_1) = t_2 h(\omega_2) \text{ מקבלים } t_1 = t_2, \text{ ומחד-חד-ערכיות הפונקציה } h \text{ מקבלים } \omega_1 = \omega_2.$$

(עכשיו ניתקלתי בבעיה: לא ברור בכלל שההופכית של g רציפה, ולמעשה אפשר

למצוא דוגמה שבה g^{-1} אינה רציפה. אז זה לא הומאומורפיזם ולכן לא מיפוי לטלאי.

מה שכן זה

לכן אם במקרה g כן הומאומורפיזם, אז תמונתו S' היא טלאי חלק $d+1$ ממדי.

עבור $a \in S$ נקבל שהמרחב הלינארי $T_a(S')$ הוא מרחב $d+1$ ממדי שהוא מרחב

השורות של $Jg_{(\omega,1)}$ שנפרש על ידי שורות Jh_ω ו- a . בפרט הוא מכיל את a ולכן הוא

שווה למרחב האפייני $a + T_a(S')$. הוא מכיל את $A = a + T_a(S)$ ולכן את $Sp(A)$,

שממדו גדול מ- d ולכן $Sp(A) = T_a(S') = a + T_a(S')$.

לשאלה 5: 3\921\2024. דומה ל5\13\2024 (לא אותה פונקציה, לא אותה קבוצה, אבל די דומה,

ושם לא היה פרמטר).

הקבוצה סגורה וחסומה (למשל מוכלת ב- $[0,2]^3$) והפונקציה פולינומית ולכן רציפה,

ולכן יש ערך מזערי וערך מרבי. ברור שהערך המזערי הוא 0 (הפונקציה אישילית

בקבוצה) והוא מתקבל בכל נקודה בקבוצה בה מתאפס אחד משיעורי הנקודה. אין

נקודות קריטיות בפנים הקבוצה, ולכן נקודות המקסימום הן נקודות שפה שבהן אף

אחד משיעורי הנקודה אינו 0. את אלה מוצאים בשיטת כופלי לגרנז' עם אילוץ אחד או

שני אילוצים.

$$\nabla f = f(x) \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right) \quad \text{האילוץ הם } \varphi = x^6 + y^6 + z^6 = 3 \text{ ו- } \psi = \alpha x - y = 0 \text{ וכן:}$$

$$\nabla \varphi = 6(x^5, y^5, z^5)$$

$$\nabla \psi = (\alpha, -1, 0)$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ x^5 & y^5 & z^5 \\ \alpha & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{נקודות קיצון תחת שני האילוצים מחייבות:}$$

$$(x, y, z) = \left(\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6 + 1}}, \alpha \sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6 + 1}}, 1 \right) \quad \text{ויחד עם האילוצים מקבלים:}$$

$$f \left(\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6 + 1}}, \alpha \sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6 + 1}}, 1 \right) = \sqrt[3]{\frac{2\alpha^3}{\alpha^6 + 1}} \quad \text{ערך הפונקציה בנקודה הוא:}$$

תחת האילוץ $\varphi = 3$ מקבלים $x^6 = y^6 = z^6$ ומכאן $3 = \varphi = 3x^6$ ומכאן:

$$(x, y, z) = (1, 1, 1)$$

ערך הפונקציה בנקודה הוא $f(1, 1, 1) = 1$ והנקודה בקבוצה אם ורק אם $\alpha \geq 1$.

תחת האילוץ $\psi = 0$ לא מקבלים נקודת קיצון.

אפשר לבדוק שתמיד $\frac{2\alpha^3}{\alpha^6 + 1} \leq 1$ (או לפי חקירת פונקציה, או לפי אישוויון

הממוצעים, או לפי $(\alpha^3 - 1)^2 \geq 0 \Leftrightarrow \alpha^6 + 1 \geq 2\alpha^3$). לכן אם $\alpha \geq 1$ הערך המרבי

הוא 1 ונקודת המקסימום היחידה היא $(1, 1, 1)$, ואם $\alpha < 1$ נקודת המקסימום

היחידה היא הנקודה $\left(\sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6 + 1}}, \alpha \sqrt[6]{\frac{2}{\alpha^6 + 1}}, 1 \right)$ והערך המרבי הוא $\sqrt[3]{\frac{2\alpha^3}{\alpha^6 + 1}}$.