

# מתווה לפתרון ממ"ן 13

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 7

## שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה  $\{A^2 \mid A \in M_{k \times k}(\mathbf{R})\}$  מכילה סביבה של מטריצת היחידה  $I$ .

(מרחב המטריצות  $M_{k \times k}(\mathbf{R})$  מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי  $\mathbf{R}^{k^2}$ ).

### פתרון

משתמשים במשפט הפונקציה ההופכית עם הפונקציה  $f: M_{k \times k}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbf{R})$  שמוגדרת על

ידי  $A \mapsto A^2$ . האתגר העיקרי הוא חישוב מטריצת היעקוביאן. מחלק ב של דוגמה 6.1.1 אפשר להסיק ש- $f$  היא פונקציה פולינומית, ולכן היא גזירה ברציפות. אפשר לחשב את הנגזרת החלקית של  $[f]_{ij}$  לפי המשתנה ה- $mn$ , וכך לקבל את מטריצת היעקוביאן של  $f$ , אבל זה חישוב מכוער ולכן נלך בדרך אחרת.

יותר נוח לראות ש- $f(I+H) = (I+H)^2 = I + 2H + H^2$  ושמתיקים:

$$\frac{|H^2|}{|H|} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$$

הפונקציה  $H \mapsto 2H$  היא פונקציה לינארית ומתקיים:

$$\left| \frac{f(I+H) - f(I) - 2H}{|H|} \right| = \frac{|(I+H)^2 - I^2 - 2H|}{|H|} = \frac{|H^2|}{|H|} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$$

ולכן לפי הגדרה 1.1.3 הפונקציה  $f$  גזירה ב- $I$  ו- $D_I f(H) = 2H$  ולכן  $Df_I$  הפיכה.

כאמור זאת פונקציה פולינומית ולכן היא גזירה ברציפות בכל המרחב  $M_{k \times k}(\mathbf{R})$ , ובפרט בסביבה

של  $I$ . לכן לפי משפט הפונקציה ההופכית (משפט 4.7.4) יש סביב  $I$  כדור פתוח  $B$  כך ש- $f(B)$

היא קבוצה פתוחה. כיוון ש- $I = f(I) \in f(B)$  הקבוצה  $f(B)$  היא סביבה של  $I$ , והיא מוכלת

בקבוצה  $f(M_{k \times k}(\mathbf{R})) = \{A^2 \mid A \in M_{k \times k}(\mathbf{R})\}$ .

$$\frac{\partial [f]_{ij}}{\partial x_{mn}}(X) = \delta_{im} x_{nj} + \delta_{nj} x_{im} \quad : \text{מסמנים } \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases} \text{ גוזרים את } [f]_{ij} : X \mapsto \sum_{l=1}^k x_{il} x_{lj} \text{ לפי } x_{mn} \text{ ומקבלים:}$$

$$Jf_I = 2I_{k^2 \times k^2} \text{ ומכאן } \frac{\partial [f]_{ij}}{\partial x_{mn}}(I) = 2\delta_{im} \delta_{nj} \text{ לכן}$$

## שאלה 2 (20 נקודות)

תהי  $F$  פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$  ל- $\mathbb{R}$  שגזירה פעמיים ברציפות בסביבה של הנקודה  $(a, b)$ . נתון:

$$F(a, b) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \quad \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) \neq 0$$

הוכיחו שהמשוואה  $F(x, y) = 0$  אינה מגדירה באופן סתום בסביבת  $(a, b)$  את  $x$  כפונקציה של  $y$ . (שימו לב שהמשוואה כן מגדירה באופן סתום בסביבת  $(a, b)$  את  $y$  כפונקציה של  $x$ . הוכיחו זאת, היעזרו בנתונים כדי להסיק מסקנות על תכונות הפונקציה הזאת, ובעזרתן הוכיחו את הנדרש בשאלה).

### פתרון

נניח בשלילה שמה שנטען אינו נכון, כלומר נניח שהמשוואה  $F(x, y) = 0$  מגדירה באופן סתום בסביבת  $(a, b)$  את  $x$  כפונקציה של  $y$ , ונגיע בסופו של דבר לסתירה, ומכאן שהטענה נכונה. לפי מינוח 4.ב.7, הערה 7.ב.7 והגדרה 22.י.1 פירוש הדבר הוא שיש סביבה  $U'$  של  $a$  וסביבה  $W'$  של  $b$  ופונקציה  $g: W' \rightarrow U'$  כך שמתקיים:

$$G(g) = \{(y, x) \in W' \times U' \mid F(x, y) = 0\}$$

כעת נראה שהמשוואה  $F(x, y) = 0$  מגדירה באופן סתום בסביבת  $(a, b)$  את  $y$  כפונקציה של  $x$ , ונראה מה אפשר להסיק מנתוני השאלה על הפונקציה הזאת. נשתמש במשפט ההגדרה הסתומה, בגרסתו שבחלק א של מסקנה 8.ב.7. מכך ש- $F$  היא פונקציה סקלרית של שני משתנים שגזירה פעמיים ברציפות בסביבה של הנקודה  $(a, b)$  נסיק בפרט שהיא גזירה ברציפות באותה סביבה (ראו אבחנה 4.ב.5), ולכן בפרט היא מוגדרת בסביבת  $(a, b)$  וגזירה ברציפות ב- $(a, b)$ .

נתון  $\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$  וגם  $F(a, b) = 0$ . לכן מתקיימים כל התנאים המאפשרים לקבוע לפי חלק א של מסקנה 8.ב.7 שהמשוואה  $F(x, y) = 0$  מגדירה באופן סתום בסביבת  $(a, b)$  את  $y$  כפונקציה של  $x$ . פירוש הדבר שיש סביבה פתוחה  $U$  של  $a$  וסביבה פתוחה  $W$  של  $b$  ופונקציה  $f: U \rightarrow W$  כך שמתקיים:

$$G(f) = \{(x, y) \in U \times W \mid F(x, y) = 0\}$$

יתר על-כן, הפונקציה  $f$  גזירה בסביבת הנקודה  $a$  ולכל  $x$  בסביבה זאת מתקיים:

$$f'(x) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))}$$

$$f'(a) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} = 0 \quad \text{נסמן את הסביבה הזאת ב-} U_1. \text{ בפרט } f(a) = b \text{ ומתקיים:}$$

אז  $a$  היא נקודה קריטית של  $f$ . נחשב את הנגזרת השניה של  $f$ . כדי לפשט את הסימונים נסמן

$$f'(x) = -\frac{u(x)}{v(x)} \quad \text{אז:} \quad u(x) = \frac{\partial F}{\partial x}(x, f(x)) \quad v(x) = \frac{\partial F}{\partial y}(x, f(x))$$

$$u(a) = \frac{\partial F}{\partial x}(a, f(a)) = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0 \quad \text{מתקיים}$$

$$v(a) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, f(a)) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0 \quad \text{וגם}$$

לפי הנתון יש סביבה  $V$  של  $(a, b)$  שבה  $F$  גזירה פעמיים. אז הפונקציות  $\frac{\partial F}{\partial x}$  ו- $\frac{\partial F}{\partial y}$  גזירות ב- $V$ .

הפונקציה  $x \mapsto (x, f(x))$  רציפה בסביבת  $a$  ולכן יש סביבה  $U_2$  של  $a$  כזאת שלכל  $x \in U_2$

מתקיים  $(x, f(x)) \in V$  מכלל השרשרת נקבל שלכל  $x \in U_1 \cap U_2$  מתקיים

$$u'(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x))$$

$$v'(x) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(x, f(x)) + f'(x) \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(x, f(x)) \quad \text{וכן:}$$

מאחר ש- $v$  גזירה ב- $U_1 \cap U_2$  היא גם רציפה ב- $U_1 \cap U_2$ , וכיוון שזאת סביבה של  $a$  ו- $v(a) \neq 0$

יש סביבה  $U_3$  של  $a$  כך שלכל  $x \in U_3$  מתקיים  $v(x) \neq 0$ . לפי כלל הנגזרת של מנה נקבל שלכל

$$f''(x) = -\frac{v(x)u'(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} \quad \text{מתקיים: } x \in U_1 \cap U_2 \cap U_3$$

$$u'(a) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, f(a)) + f'(a) \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a, f(a)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) + 0 \cdot \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}(a, b) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) \neq 0 \quad \text{כעת}$$

$$f''(a) = -\frac{v(a)u'(a) - u(a)v'(a)}{v(a)^2} = -\frac{v(a)u'(a) - 0 \cdot v'(a)}{v(a)^2} = -\frac{u'(a)}{v(a)} \neq 0 \quad \text{ולכן:}$$

ידוע לנו כבר ש- $f'(a) = 0$  ו- $f''(a) \neq 0$ , ולפי משפט מאינפי 1 (או לפי טענה 17.ד.6) נוכל להסיק

ש- $a$  היא נקודת קיצון של  $f$  (מינימום מקומי או מקסימום מקומי לפי סימן  $f''(a)$ ).

אבל נתאמץ עוד קצת ונקבל קצת יותר:

מכך ש- $F$  גזירה פעמיים ברציפות ב- $V$  נובע שכל נגזרותיה החלקיות מסדר ראשון ושני רציפות ב-

$V$ , ומהנוסחות שקיבלנו עבור  $f'$  ועבור  $u'$  ו- $v'$ , והנוסחה עבור  $f''$  אנו מקבלים שכל אלה

רציפות ב- $U \cap U_1 \cap U_2 \cap U_3$ . כמוכן  $f''(a) \neq 0$ . נניח מעתה ש- $f''(a) > 0$ . ההוכחה במקרה ש-

$f''(a) < 0$  דומה. מרציפות  $f''$  נובע שיש סביבה  $U_4$  של  $a$  כך ש- $f''(x) > 0$  לכל  $x \in U_4$ .

יש לנו כבר המון סביבות של  $a$ , אז נעשה קצת סדר לפני שנמשיך:

הקבוצה  $U \cap U' \cap U_1 \cap U_2 \cap U_3 \cap U_4$  היא סביבה של  $a$  ולכן היא מכילה כדור סגור  $\bar{B}(a; r)$ .

מאחר שמדובר בכדור ב- $\mathbf{R}$  (דהיינו חד־ממדי) הרי  $\bar{B}(a; r) = [a - r, a + r]$ .

אנו יודעים שלכל  $x \in [a - r, a + r]$  מתקיים  $f''(x) > 0$ . לכן  $f'$  היא פונקציה עולה בקטע הזה.

לכל  $x \in [a - r, a]$  מתקיים  $f'(x) < f'(a) = 0$  ולכן  $f$  יורדת ב- $[a - r, r]$ .

לכל  $x \in (a, a + r]$  מתקיים  $0 = f'(a) < f'(x)$  ולכן  $f$  עולה ב- $[a, a + r]$ .

בפרט לכל  $x \in [a - r, a + r] \setminus \{a\}$  מתקיים  $f(x) > f(a)$ .

עכשיו נוכל סוף סוף לסיים את ההוכחה, שהתחילה בהנחת שלילה, ולקבל סתירה

כיוון ש- $W'$  היא סביבה של  $b$  יש  $\delta > 0$  כך ש- $(b - \delta, b + \delta) = B(b; \delta) \subseteq W'$ .

ראינו ש- $f(a - r) > f(a) = b$  וגם  $f(a - r) > 0 = b$  ולכן:  $\min\{b + \delta, f(a - r), f(a + r)\} > b$

אז יש  $t \in \mathbf{R}$  כך ש:  $b < t < \min\{b + \delta, f(a - r), f(a + r)\}$

הפונקציה  $f$  רציפה בקטע  $[a-r, a]$  ומתקיים  $f(a-r) > t > b = f(a)$  ולכן, לפי משפט ערך הביניים, יש  $c \in (a-r, a)$  כך ש- $f(c) = t$ . הפונקציה  $f$  רציפה גם בקטע  $[a-r, a]$  ומתקיים  $f(a) = b < t < f(a+r)$  ולכן, לפי משפט ערך הביניים, יש  $d \in (a, a+r)$  כך ש- $f(d) = t$ . מתקיים:

$$(c, t) = (c, f(c)) \in G(f) = \{(x, y) \in U \times W \mid F(x, y) = 0\}$$

ולכן  $F(c, t) = 0$ . באופן דומה

$$(d, t) = (d, f(d)) \in G(f) = \{(x, y) \in U \times W \mid F(x, y) = 0\}$$

ולכן  $F(d, t) = 0$ . כמוכן  $c, d \in (a-r, a+r) \subseteq U'$  ו- $t \in (b-\delta, b+\delta) \subseteq W'$ . אז  $(t, c) \in W' \times U'$  וגם  $(t, d) \in W' \times U'$ . אבל:

$$G(g) = \{(y, x) \in W' \times U' \mid F(x, y) = 0\}$$

לכן  $(t, c) \in G(g)$  כלומר  $g(t) = c$  וגם  $(t, d) \in G(g)$  כלומר  $g(t) = d$ . אז  $c = d$ , וזאת סתירה לכך ש- $c < a < d$ . וזהו. קיבלנו סתירה, ולכן בניגוד להנחת השלילה הטענה שבשאלה הוכחה.

כל זה היה בכפוף להנחה נוספת שקיבלנו בדרך, ש- $f''(a) > 0$ . במקרה ש- $f''(a) < 0$  אפשר לחזור על ההוכחה. בכמה מקומות מתהפכים האישוויונות אבל בסוף מתקבלת סתירה באותה צורה. הדרך היחידה לוודא שבאמת בסוף מתקבלת באותה צורה סתירה, היא לחזור על כל הדרך ולראות שהכל מסתדר. במקום הנימוק המפוקפק הזה (האמונה שהכל יסתדר באותה צורה, שלפעמים נכונה ולפעמים לא נכונה) אציג דרך אחרת להסיק את המסקנה במקרה  $f''(a) < 0$  מהמסקנה שכבר הוכחנו:

$$\text{ראינו שמתקיים } f''(a) = -\frac{u'(a)}{v(a)} \text{ וכן } u'(a) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) \text{ ו- } v(a) = \frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \text{ ולכן:}$$

$$f''(a) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)}$$

אם כך ההנחה שלנו בדרך הייתה שמתקיים  $\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} < 0$  ועלינו להוכיח את הטענה כאשר:

$$\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} > 0$$

נניח אם כן שמתקיים האישוויון האחרון, ונגדיר פונקציה  $G$  על-ידי:

$$G(a, -b) = F(a, b) = 0 \quad \text{אז } G \text{ גזירה פעמיים בסביבה של הנקודה } (a, -b) \text{ ומתקיים:}$$

$$\frac{\partial G}{\partial x}(a, -b) = \frac{\partial F}{\partial x}(a, b) = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial y}(a, -b) = -\frac{\partial F}{\partial y}(a, b) \neq 0$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(a, -b) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b) \neq 0$$

$$\frac{\frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(a, -b)}{\frac{\partial G}{\partial y}(a, -b)} = \frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{-\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(a, b)}{\frac{\partial F}{\partial y}(a, b)} < 0 \quad \text{כמוכן מתקיים:}$$

לפי המקרה שהוכחנו כבר, בתנאים אלה המשוואה  $G(x, y) = 0$  אינה מגדירה באופן סתום

בסביבת הנקודה  $(a, -b)$  את  $x$  כפונקציה של  $y$ .

נניח בשלילה שהמשוואה  $F(x, y) = 0$  מגדירה באופן סתום בסביבת  $(a, b)$  את  $x$  כפונקציה

של  $y$ . כפי שראינו בתחילת ההוכחה פירוש הדבר הוא שיש סביבה  $U'$  של  $a$  וסביבה  $W'$  של  $b$

פונקציה  $g: W' \rightarrow U'$  כך שמתקיים:  $G(g) = \{(y, x) \in W' \times U' \mid F(x, y) = 0\}$

נגדיר  $W'' = \{-y \mid y \in W'\}$ . זאת סביבה של  $-b$ . נגדיר פונקציה:  $h: y \mapsto g(-y)$

אז:  $G(h) = \{(y, x) \mid x = h(y)\} = \{(y, x) \mid x = g(-y)\} = \{(y, x) \mid (-y, x) \in G(g)\}$

$$= \{(y, x) \mid (-y, x) \in W' \times U', F(x, -y) = 0\} = \{(y, x) \in W'' \times U' \mid G(x, y) = 0\}$$

זה מראה שהמשוואה  $G(x, y) = 0$  מגדירה באופן סתום בסביבת הנקודה  $(a, -b)$  את  $x$

כפונקציה של  $y$ , בסתירה למה שכבר הוכחנו קודם.

### שאלה 3 (20 נקודות)

$$S_1 = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^2 \times \left(0, \frac{3}{2}\right) \mid z^2 = 3x^2 + 3y^2 \right\} \quad \text{נסמן:}$$

$$S_2 = \left( \mathbf{R}^2 \times \left[\frac{3}{2}, \infty\right) \right) \cap S((0, 0, 2); 1)$$

הוכיחו שהקבוצה  $S = S_1 \cup S_2$  היא משטח חלק.

#### פתרון

יש דרכים רבות להוכיח את הנדרש. נראה שתי דרכים. בדרך הראשונה נשתמש במסקנה 12.ג.7. עלינו להראות שלכל  $a \in S$  יש סביבה פתוחה  $\tilde{U}$  ופונקציה סקלרית  $f$  שמוגדרת וגזירה ברציפות ב- $\tilde{U}$  כך ש- $\nabla f(a) \neq 0^{[3]}$  ומתקיים:

$$S \cap \tilde{U} = \{x \in \tilde{U} \mid f(x) = f(a)\}$$

נסמן  $U_1 = \mathbf{R}^2 \times \left(\frac{3}{2}, \infty\right)$  ו- $U_2 = \mathbf{R}^2 \times (0, 2)$ . הקבוצות  $U_1$  ו- $U_2$  פתוחות ומתקיים

$$S \subseteq \mathbf{R}^2 \times (0, \infty) = U_1 \cup U_2$$

$$S = (S \cap U_1) \cup (S \cap U_2) \quad \text{ולכן:}$$

$$S \cap U_1 = S((0, 0, 2); 1) \cap U_1 = \{x \in U_1 \mid f_1(x) = 1\} \quad \text{מתקיים:}$$

$$f_1: (x, y, z) \mapsto (x-2)^2 + y^2 + z^2 \quad \text{עם הפונקציה:}$$

$$\text{מתקיים } \nabla f_1(x, y, z) = 2(x-2, y, z) \text{ ולכן אם } (x, y, z) \in S \cap U_1 \text{ אז}$$

$$|\nabla f_1(x, y, z)|^2 = 4f_1(x, y, z) = 4$$

$$\nabla f_1(x, y, z) \neq 0^{[3]} \quad \text{ולכן:}$$

בפרט אם  $a \in S \cap U_1$  אז  $f_1(a) = 1$  ו- $\nabla f_1(a) \neq 0^{[3]}$  והתנאי של מסקנה 12.ג.7 מתקיים עם

הסביבה הפתוחה  $\tilde{U} = U_1$  של  $a$  והפונקציה  $f = f_1$ .

אחרת  $a \in S \cap U_2$ .

נראה שהקבוצה  $S \cap U_2$  היא גרף  $G(g)$  של פונקציה גזירה ברציפות  $g: \Omega \rightarrow \mathbf{R}$  עם

$$\Omega = B((0, 0); 1) \setminus \{(0, 0)\}$$

אז התנאי של מסקנה 12.ב.7 יתקיים עם  $\tilde{U} = U_2$  והפונקציה:

$$\nabla f(x, y, z) = (\nabla g(x, y), -1) \neq 0^{[3]} \quad \text{שלכל נקודה ב- } G(g) \text{ מקיימת:}$$

$$\varphi: t \mapsto \begin{cases} t\sqrt{3} & 0 < t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ 2 - \sqrt{1-t^2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t < 1 \end{cases} \quad \text{דרך אחת להראות זאת: נגדיר } \varphi: (0, 1) \rightarrow \mathbf{R} \text{ עלידי:}$$

$$2 - \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 2 - \sqrt{1 - \frac{3}{4}} = 2 - \sqrt{\frac{1}{4}} = 2 - \frac{1}{2} = \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sqrt{3} \quad \text{ב- } \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ההגדרה טובה כי:}$$

אז מטעמי אינפי 1 הפונקציה רציפה: היא רציפה מימין ומשמאל בנקודה  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  והיא רציפה

בקטעים הפתוחים  $(0, \frac{\sqrt{3}}{2})$  ו- $(\frac{\sqrt{3}}{2}, 1)$  שבכל אחד מהם היא מתלכדת עם פונקציה יסודית.

$$f'(t) = \begin{cases} \sqrt{3} & 0 < t \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{t}{\sqrt{1-t^2}} & \frac{\sqrt{3}}{2} \leq t < 1 \end{cases} \quad \text{הנגזרת שלה היא:}$$

גם כאן הנוסחה בסדר בנקודה  $\frac{\sqrt{3}}{2}$  בשל שוויון הנגזרות החד-צדדיות, והנגזרת רציפה.

$$(x, y) \mapsto f\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \quad \text{כעת נגדיר את } g \text{ עלידי:}$$

היא מוגדרת בקבוצה  $\Omega$  והיא הרכבה של פונקציות גזירות ברציפות ולכן לפי טענה 17.ז.3 היא גזירה ברציפות ב- $\Omega$ .

**דרך נוספת:** נתחיל בטענת עזר מאוד שימושית. על פי השקילות בין חלקים א וג של משפט 11.ג.7 קבוצה  $S$  היא יריעה חלקה  $d$ -ממדית אם ורק אם לכל נקודה  $a \in S$  יש סביבה פתוחה  $U$  כך שהקבוצה  $S \cap U$  היא טלאי חלק  $d$ -ממדי. אחד הכיוונים של שקילות זאת שקול לאבחנה 9.ג.7.

**טענת עזר:** יהיו  $d < k$  טבעיים. תהי  $S$  קבוצה ב- $\mathbf{R}^k$ . שלושת התנאים הבאים שקולים:

א. הקבוצה  $S$  היא יריעה חלקה  $d$ -ממדית.

ב. לכל  $a \in S$  יש סביבה פתוחה  $U$  כך שהקבוצה  $S \cap U$  היא יריעה חלקה  $d$ -ממדית.

ג. יש משפחה  $\{U_i \mid i \in I\}$  של קבוצות פתוחות ב- $\mathbf{R}^k$  כך שמתקיים  $S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$

ולכל  $i \in I$  הקבוצה  $S \cap U_i$  היא יריעה חלקה  $d$ -ממדית.

טענת העזר תאפשר לנו להוכיח את הנדרש על ידי כך שנראה שהקבוצות  $S \cap U_1$  ו- $S \cap U_2$  הן

יריעות חלקות דר-ממדיות, כלומר משטחים חלקים, עם  $U_1$  ו- $U_2$  שהוגדרו בדרך הראשונה.

הקבוצה  $S \cap U_2$ , כפי שראינו, היא גרף של פונקציה גזירה ברציפות בקבוצה פתוחה, ולפי דוגמה

7.ג.7 היא טלאי חלק דר-ממדי ולפי אבחנה 6.ג.7 היא יריעה חלקה דר-ממדית, דהיינו משטח חלק.

הקבוצה  $S \cap ((2, 0, 0); 1)$  היא יריעה דר-ממדית חלקה לפי שאלה 16.ג.7 ולכן לפי שאלה 18.ג.7 גם

הקבוצה  $S \cap ((2, 0, 0); 1) \cap U_1$  היא יריעה דר-ממדית חלקה. הקבוצה  $S \cap U_1$  שווה לקבוצה

$S \cap ((2, 0, 0); 1) \cap U_1$ , ולכן  $S \cap U_1$  היא יריעה דר-ממדית חלקה, וכאמור, מאחר ש- $S \cap U_1$  ו-

$S \cap U_2$  שתי הן יריעות דר-ממדיות חלקות ו- $S \subseteq U_1 \cup U_2$  מטענת העזר נובע ש- $S$  היא יריעה דר-

ממדית חלקה, דהיינו היא משטח חלק.

<sup>2</sup> אפשר גם לחשב במפורש

$$\nabla g(x, y) = f'\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right) \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{x^2 + y^2}}(x, y) & 0 < \sqrt{x^2 + y^2} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}(x, y) & \frac{\sqrt{3}}{2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < 1 \end{cases}$$

אבל החישוב הזה מיותר.

אעיר עוד שניתן גם להוכיח ש- $S \cap U_1$  היא טלאי חלק דו־ממדי ולהסיק ישירות מאבחנה 9.ג.7 ש- $S$  היא משטח חלק.

#### הוכחת טענת העזר:

אם טענה א נכונה אז לפי משפט 11.ג.7 לכל נקודה  $a \in S$  יש סביבה פתוחה  $U$  כך שהקבוצה  $S \cap U$  היא טלאי חלק  $d$ -ממדי, ולפי אבחנה 6.ג.7 הקבוצה  $S \cap U$  היא יריעה חלקה  $d$ -ממדית. זה מראה שטענה ב נובעת מטענה א.

אם טענה ב נכונה אז לכל  $a \in S$  יש סביבה פתוחה  $U_a$  כך שהקבוצה  $S \cap U_a$  היא יריעה חלקה

$d$ -ממדית, ולכן  $\{U_a \mid a \in S\}$  היא משפחה של קבוצות פתוחות כך שלכל  $a \in S$  הקבוצה

$S \cap U_a$  היא יריעה חלקה  $d$ -ממדית ובבירור  $S \subseteq \bigcup_{a \in S} U_a$ . זה מראה שטענה ג נובעת מטענה ב.

אם טענה ג נכונה, אז לכל  $a \in S$  מתקיים  $a \in \bigcup_{i \in I} U_i$  ולכן יש  $i \in I$  כך ש- $a \in S \cap U_i$  והקבוצה

$S \cap U_i$  היא יריעה חלקה  $d$ -ממדית. לפי משפט 11.ג.7 יש סביבה פתוחה  $V$  של  $a$  כך ש-

$U = U_i \cap V$  היא טלאי חלק  $d$ -ממדי. אם כן, לכל  $a \in S$  הראינו סביבה פתוחה

של  $a$  כך ש הקבוצה  $S \cap U$  היא טלאי חלק  $d$ -ממדי, ולפי טענה 11.ג.7 הקבוצה  $S$  היא יריעה חלקה  $d$ -ממדית. זה מראה שטענה א נובעת מטענה ג.

הראינו שמטענה א נובעת טענה ב, שממנה נובעת טענה ג ושממנה נובעת טענה א, ולכן שלוש הטענות שקולות זו לזו.

**לבסוף, הערה ואתגר:** הקבוצה  $S$  היא טלאי דו־ממדי חלק. נסו להוכיח זאת.

## שאלה 4 (20 נקודות)

תהי  $S$  יריעה חלקה  $d$ -ממדית ב- $\mathbf{R}^k$ , בעלת שתי תכונות:

1. כל קרן שקודקודה ב- $0^{[k]}$  מכילה לכל היותר נקודה אחת של  $S$ .
  2. לכל נקודה  $a \in S$  המרחב המשיק בנקודה  $a$  ל- $S$  אינו מכיל את  $0^{[k]}$ .
- תהי  $S'$  איחוד כל הקרניים שקודקודן ב- $0^{[k]}$  שמכילות נקודה מ- $S$ , לא כולל  $0^{[k]}$  עצמה, דהיינו:
- $$S' = \bigcup_{a \in S} \{ta \mid t > 0\}$$
- הראו שאם  $d = k - 1$  (כלומר  $S$  היא משטח-על) אז  $S'$  היא קבוצה פתוחה.

### פתרון

תהי  $b \in S'$ . היא נמצאת על קרן שקודקודה ב- $0^{[k]}$  ושעוברת באיזושהי  $a \in S$ , ולכן יש  $\lambda > 0$  כך ש- $b = \lambda a$ . כדי להראות ש- $S'$  היא קבוצה פתוחה די שנראה שהיא מכילה סביבה של  $b$ . אם  $a \in S$  אז לפי חלק ג של משפט 11.7 יש סביבה פתוחה  $U$  של  $a$  כך ש- $S \cap U$  היא טלאי חלק. לכן יש  $\Omega$  פתוחה ב- $\mathbf{R}^d$  ו- $h: \Omega \rightarrow \mathbf{R}^k$  שהיא הומאומורפיזם מ- $\Omega$  ל- $S \cap U$ , ושהיא גזירה ברציפות ב- $\Omega$  ולכל  $\omega \in \Omega$  דרגת המטריצה  $Jh_\omega$  היא  $d$ . זאת מטריצה  $k \times d$  שעמודותיה בלתי-תלויות לינאריות.

לכל  $\omega \in \Omega$  לפי אבחנה 8.7 מתקיים

$$T_{h(\omega)}(S) = \{vJh_\omega^T \mid v \in \mathbf{R}^d\}$$

שזה מרחב השורות של המטריצה  $Jh_\omega^T$ .

לפי הגדרה 4.7 המרחב המשיק בנקודה  $h(\omega)$  ל- $S$  הוא:

$$A = h(\omega) + T_{h(\omega)}(S)$$

נתון ש- $0^{[k]} \notin A$  ולכן:

$$-h(\omega) \notin T_{h(\omega)}(S)$$

לפי טענה 2.7  $T_{h(\omega)}(S)$  הוא מרחב לינארי ולכן גם:

$$h(\omega) \notin T_{h(\omega)}(S)$$

אז  $h(\omega)$  אינו במרחב השורות של המטריצה  $Jh_\omega^T$ , ולכן  $h(\omega)^T$  אינו במרחב העמודות של המטריצה  $Jh_\omega$ .

נגדיר  $\Omega' = \Omega \times (0, \infty)$  ופונקציה  $f: \Omega' \rightarrow \mathbf{R}^k$  על ידי:

$$f: (\omega, t) \mapsto th(\omega)$$

כמובן  $h(\omega) \in S$  ולכן הנקודה  $th(\omega)$  נמצאת על קרן שקודקודה בראשית ומכילה נקודה של  $S$  ולכן  $f(\omega, t) \in S'$  או  $f(\Omega') \subseteq S'$ .

הפונקציה  $f$  גזירה ברציפות ב- $\Omega'$  ולכל  $(\omega, t) \in \Omega'$  מתקיים:

$$Jf_{(\omega, t)} = \left( tJh_\omega \mid h(\omega)^T \right)$$

עמודות המטריצה  $Jh_\omega$  בלתי-תלויות לינאריות ולכן גם עמודות המטריצה  $tJh_\omega$  בלתי-תלויות

לינאריות. הוקטור  $h(\omega)^T$  אינה במרחב העמודות של  $Jh_\omega$  שהוא גם מרחב העמודות של

המטריצה  $tJh_\omega$ . לכן  $d+1$  העמודות של המטריצה  $Jf_{(\omega, t)} = \left( tJh_\omega \mid h(\omega)^T \right)$  הן בלתי-תלויות

לינאריות, ודרגתה היא  $d+1$  כלומר דרגתה מלאה.

אם  $S$  הוא משטח־על, כלומר אם  $d = k - 1$  או  $d + 1 = k$  והמטריצה  $Jf_{(\omega,t)}$  היא מטריצה  $k \times k$  ש־ $k$  עמודותיה בלתי־לוליות לינארית, כלומר היא מטריצה הפיכה. לכן הפונקציה הלינארית  $Df_{(\omega,t)}$  הפיכה.

כזכור מהתחלת ההוכחה  $a \in S \cap U = h(\Omega)$  ו־ $b = \lambda a$ . אז יש  $\omega \in \Omega$  כך ש־ $a = h(\omega)$  ומתקיים:

$$f(\omega, \lambda) = \lambda h(\omega) = \lambda a = b$$

הפונקציה  $f$  גזירה ברציפות ב־ $\Omega'$  שהיא סביבה פתוחה של  $(\omega, \lambda)$  והפונקציה הלינארית

$Df_{(\omega,\lambda)}$  הפיכה. לפי משפט הפונקציה ההופכית (משפט 4.א.7) יש סביב  $(\omega, \lambda)$  כדור פתוח

$B \subseteq \Omega'$  כך ש־ $f(B)$  קבוצה פתוחה.

אז  $f(B)$  היא סביבה של  $f(\omega, \lambda)$  כלומר של  $b$ , ומתקיים:

הראינו שלכל  $b \in S'$  יש סביבה שמוכלת ב־ $S'$ , ולכן  $S'$  היא קבוצה פתוחה.

## שאלה 5 (20 נקודות)

יהי  $\alpha > 0$  ותהי  $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  שמוגדרת על ידי:  
 $(x, y, z) \mapsto xyz$   
הראו של- $f$  יש ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה

$$A = \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x \leq \alpha y, x^6 + y^6 + z^6 \leq 3 \right\}$$

ומצאו אותם ואת כל נקודות הקיצון של  $f$  בקבוצה זאת. (התוצאה תלויה במספר  $\alpha$ ).

### פתרון

לפי מסקנה 25.ד.2 הקבוצה  $D$  היא קבוצה סגורה.

אם  $x = (x_1, x_2, x_3) \in D$  אז  $x_i \geq 0$  עבור  $i = 1, 2, 3$  וגם  $x_i^6 \leq x_1^6 + x_2^6 + x_3^6 \leq 3 \leq 2^6$  ולכן  $x_i \in [0, 2]$ .

לכן  $D \subseteq [0, 2]^3$  ובפרט  $D$  היא קבוצה חסומה. הפונקציה  $f$  פולינומית ולכן רציפה ב- $D$  ולפי

משפט ויירשטראס (משפט 4.א.6) יש ל- $f$  ערך מזערי וערך מרבי ב- $D$ . נמצא אותם.

ראשית ברור שלכל  $(x, y, z) \in D$  מתקיים  $f(x, y, z) = xyz \geq 0 = f(0, 0, 0)$  ו- $(0, 0, 0) \in D$ , ולכן

הערך המזערי של  $f$  ב- $D$  הוא 0, והוא מתקבל בכל נקודה שבה  $f(x, y, z) = 0$  דהיינו בכל נקודה ב- $D$  שבה  $xyz = 0$ , ואלה הנקודות ב- $D$  שלפחות אחד משיעוריהן הוא 0, ובדיקה פשוטה מראה אם כך שקבוצת נקודות המינימום של  $f$  ב- $D$  היא:

$$\left( \{0\} \times \left\{ (y, z) \in [0, \infty)^2 \mid y^6 + z^6 \leq 3 \right\} \right) \cup \left( \left\{ (x, y) \mid 0 \leq x \leq \alpha y, x^6 + y^6 \leq 3 \right\} \times \{0\} \right)$$

אף אחת מהנקודות האלה אינה נקודת מקסימום של  $f$  ב- $D$ , כי יש  $a \in D$  כך ש- $f(a) > 0$  ולכן הערך המרבי של  $f$  ב- $D$  בהכרח חיובי.<sup>3</sup>

בכל נקודה פנימית של  $D$  מתקיים  $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = yz > 0$  ולכן  $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ , ולכן זאת אינה נקודה קריטית, ולכן גם אינה נקודת קיצון מקומית, ומאחר ש- $D$  היא סביבה של כל נקודה פנימית שלה, נקודה פנימית שלה אינה נקודת קיצון של  $f$  ב- $D$ . לכן כל נקודות המקסימום של  $f$  ב- $D$  הן נקודות שפה של  $D$ , וכאמור הן גם נקודות שאף אחד משיעוריהן אינו 0, ולכן הן

נמצאות בקבוצה  $\partial D \cap (0, \infty)^3$ . לפי מסקנה 25.ד.2.

$$\begin{aligned} \partial D \subseteq & \left\{ (x, y, z) \in D \mid x^6 + y^6 + z^6 = 3 \right\} \cup \left\{ (x, y, z) \in D \mid x = \alpha y \right\} \\ & \cup \left\{ (x, y, z) \in D \mid x = 0 \right\} \cup \left\{ (x, y, z) \in D \mid z = 0 \right\} \end{aligned}$$

ולכן נקודות המקסימום של  $f$  ב- $D$  כולן בקבוצה:

$$D \cap (0, \infty)^3 \cap \left( \left\{ (x, y, z) \mid x^6 + y^6 + z^6 = 3 \right\} \cup \left\{ (x, y, z) \mid x = \alpha y \right\} \right)$$

<sup>3</sup> למשל ניקח  $a = (\alpha t, t, t)$  ו- $t = \sqrt[6]{\frac{3}{\alpha^6 + 2}}$  אז  $a \in D$  ו- $f(a) = \alpha t^3 > 0$  כי:  $(\alpha t)^6 + t^6 + t^6 = (\alpha^6 + 2)t^6 = 3$

תוכלו לבדוק שהקבוצה הזאת שווה לאיחוד  $A_1 \cup A_2 \cup A_3$  כאשר :

$$A_1 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x < \alpha y, x^6 + y^6 + z^6 = 3 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x = \alpha y, x^6 + y^6 + z^6 < 3 \right\}$$

$$A_3 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x = \alpha y, x^6 + y^6 + z^6 = 3 \right\}$$

אם נקודות מקסימום של  $f$  בקבוצה  $D$  נמצאת בתת-קבוצה  $A_i$ , אז היא נקודת מקסימום של  $f$  ב- $A_i$ . נבדוק מה יכולות להיות נקודות הקיצון בכל אחת משלוש הקבוצות האלה.

$$A_1 = \left\{ (x, y, z) \in U_1 \mid x^6 + y^6 + z^6 = 3 \right\} \quad \text{את הקבוצה } A_1 \text{ נוכל להציג בצורה}$$

$$U_1 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x < \alpha y \right\} \quad \text{עם:}$$

הקבוצה  $U_1$  פתוחה. זה נובע למשל מחלק א של מסקנה 23.ד.2 יחד עם חלק ב של טענה 24.א.2.

לכן נקודת מקסימום של  $f$  ב- $A_1$  היא נקודת קיצון מקומי של  $f$  תחת האילוץ  $\varphi = 3$  כאשר

$$\varphi(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6. \quad \text{ממשפט 11.ה.7 (כופלי לגרנז') נקבל שאם } a = (x, y, z) \text{ היא נקודת}$$

$$\{\nabla f(a), \nabla \varphi(a)\} = \{(yz, xz, xy), (6x^5, 6y^5, 6z^5)\} \quad \text{המקסימום הזאת אז הקבוצה}$$

$$\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 6x^5 & 6y^5 & 6z^5 \end{pmatrix} \quad \text{תלויה לינארית. זאת קבוצת השורות של המטריצה}$$

ולכן זאת מטריצה שדרגתה לכל היותר 1, ולכן כל תת-מטריצה  $2 \times 2$  שלה היא סינגולרית. לכן

$$\det \begin{pmatrix} yz & xz \\ 6x^5 & 6y^5 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{למשל מתקיים:}$$

$$6z(y^6 - x^6) = 0 \Rightarrow y^6 = x^6 \Rightarrow y = x$$

$$\det \begin{pmatrix} xz & xy \\ 6y^5 & 6z^5 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{בנוסף מתקיים:}$$

$$6x(z^6 - y^6) = 0 \Rightarrow z^6 = y^6 \Rightarrow z = y$$

$$3 = \varphi(x, y, z) = x^6 + y^6 + z^6 = 3x^6 \quad \text{אז } x = y = z \text{ וכן}$$

$$a = (x, y, z) = (1, 1, 1) \quad \text{ומכאן } x = y = z = 1 \text{ ולכן:}$$

נקודה זאת נמצאת ב- $A_1$  אם ורק אם מתקיים  $x < \alpha y$  כלומר  $\alpha > 1$ .

$$A_2 = \left\{ (x, y, z) \in U_2 \mid x - \alpha y = 0 \right\} \quad \text{נעבור ל-} A_2. \text{ נוכל למשל להציג אותה בצורה}$$

$$U_2 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x^6 + y^6 + z^6 < 3 \right\} \quad \text{עם:}$$

הקבוצה  $U_2$  פתוחה, למשל לפי חלק א של מסקנה 23.ד.2 יחד עם חלק ב של טענה 24.א.2.

לכן נקודת מקסימום של  $f$  ב- $A_2$  היא נקודת קיצון מקומי של  $f$  תחת האילוץ  $\psi = 0$  כאשר

$$\psi(x, y, z) = x - \alpha y. \quad \text{ממשפט 11.ה.7 (כופלי לגרנז') נקבל שאם } b = (x, y, z) \text{ היא נקודת}$$

המקסימום הזאת אז הקבוצה

$$\{\nabla f(b), \nabla \psi(b)\} = \{(yz, xz, xy), (1, -\alpha, 0)\}$$

$$\begin{pmatrix} yz & xz & xy \\ 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

תלויה לינארית. זאת קבוצת השורות של המטריצה

ולכן זאת מטריצה שדרגתה לכל היותר 1, ולכן כל תת-מטריצה  $2 \times 2$  שלה היא סינגולרית. בפרט

$$0 = \det \begin{pmatrix} yz & xy \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -xy \quad \text{למשל}$$

ולכן  $x=0$  או  $y=0$  בסתירה לכך ש- $b=(x,y,z) \in A_2$ . לכן אין ל- $f$  נקודת מקסימום ב- $A_2$ .

נבדוק את האפשרות שיש נקודת מקסימום של  $f$  ב- $A_3$ . כזכור:

$$\begin{aligned} A_3 &= \left\{ (x,y,z) \in (0,\infty)^3 \mid x = \alpha y, x^6 + y^6 + z^6 = 3 \right\} \\ &= \left\{ (x,y,z) \in (0,\infty)^3 \mid \varphi(x,y,z) = 3, \psi(x,y,z) = 0 \right\} \end{aligned}$$

הקבוצה  $(0,\infty)^3$  פתוחה ולכן היא סביבה של כל נקודה ב- $A_3$  ולכן נקודת המקסימום המבוקשת

היא נקודת קיצון מקומי של  $f$  תחת זוג האילוצים  $\{\varphi=3, \psi=0\}$ . לפי משפט 11.7, אם

$c=(x,y,z)$  היא נקודת הקיצון הזאת, הקבוצה  $\{\nabla f(c), \nabla \varphi(c), \nabla \psi(c)\}$  תלויה לינארית.

$$\nabla f = (yz, xz, xy) = f(x) \left( \frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z} \right) \quad \text{הגרדיאנטים האלה הם:}$$

$$\nabla \varphi = (6x^5, 6y^5, 6z^5) = 6(x^5, y^5, z^5)$$

$$\nabla \psi = (1, -\alpha, 0)$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ x^5 & y^5 & z^5 \\ 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix}$$

התלות הלינארית ביניהם מחייבת:

בנוסף  $0 = \psi(x,y,z) = x - \alpha y$  ולכן  $x = \alpha y$  ולכן:

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha y} & \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ (\alpha y)^5 & y^5 & z^5 \\ 1 & -\alpha & 0 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{1}{y} & \frac{1}{z} \\ y^5 & z^5 \end{pmatrix} + \alpha \det \begin{pmatrix} \frac{1}{\alpha y} & \frac{1}{z} \\ (\alpha y)^5 & z^5 \end{pmatrix} \\ &= \frac{z^6 - y^6}{yz} + \alpha \frac{z^6 - \alpha^6 y^6}{\alpha yz} = \frac{2z^6 - (1 + \alpha^6)y^6}{yz} \end{aligned}$$

ולכן  $z^6 = \frac{1+\alpha^6}{2} \cdot y^6$ . כמוכן  $3 = \varphi(x,y,z) = x^6 + y^6 + z^6 = (\alpha y)^6 + y^6 + \frac{1+\alpha^6}{2} \cdot y^6 = 3 \cdot \frac{1+\alpha^6}{2} \cdot y^6$

$$y^6 = \frac{2}{1+\alpha^6} \Rightarrow y = \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}} \Rightarrow x = \alpha \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}} \quad \text{ולכן}$$

$$z^6 = \frac{1+\alpha^6}{2} \cdot y^6 = 1 \Rightarrow z = 1$$

$$c = (x, y, z) = \left( \alpha \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}}, \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}}, 1 \right) \quad \text{ומכאן:}$$

בסך הכל קיבלנו שאם  $\alpha > 1$  נקודת מקסימום של  $f$  ב- $D$  חייבת להיות אחת מבין שתי הנקודות

$$c = \left( \alpha \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}}, \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}}, 1 \right) \text{ ו- } a = (1, 1, 1) : \text{ הערכים של הפונקציה בנקודות האלה הם:}$$

$$f(a) = f(1, 1, 1) = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

$$f(c) = f\left(\alpha \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}}, \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}}, 1\right) = \alpha \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}} \cdot \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}} \cdot 1 = \alpha^3 \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}} = \sqrt[3]{\frac{2\alpha^3}{1+\alpha^6}}$$

$$\alpha^6 + 1 - 2\alpha^3 = (\alpha^3 - 1)^2 > 0 \quad \Rightarrow \quad \alpha^6 + 1 > 2\alpha^3 \quad \text{כעת:}$$

$$\Rightarrow \sqrt[3]{\frac{2\alpha^3}{1+\alpha^6}} < \sqrt[3]{1} = 1 \Rightarrow f(c) < f(a)$$

ולכן אם  $\alpha > 1$  הערך המרבי של  $f$  ב- $D$  הוא  $f(a) = 1$  ונקודת המקסימום היחידה של  $f$  ב- $D$

היא  $a = (1, 1, 1)$ .

אם  $0 < \alpha \leq 1$  אז לפי ממצאינו נקודת המקסימום של  $f$  ב- $D$  יכולה להיות רק  $c$ , כיוון שידוע

שיש ל- $f$  נקודת מקסימום ב- $D$ , בהכרח  $c = \left( \alpha \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}}, \sqrt[6]{\frac{2}{1+\alpha^6}}, 1 \right)$  היא נקודת המקסימום

$$f(c) = \sqrt[3]{\frac{2\alpha^3}{1+\alpha^6}} \quad \text{של } f \text{ ב-} D \text{ והערך המרבי של } f \text{ ב-} D \text{ הוא:}$$

בזאת הסתיימ פתרון השאלה: לכל ערך חיובי של  $\alpha$  מצאנו את הערך המרבי של  $f$  ב- $D$  ואת כל נקודות המקסימום של  $f$  ב- $D$  (בכל המקרים הייתה רק נקודת מקסימום אחת).

**הערה:** כאשר  $\alpha = 1$  גם הנקודה  $a$  וגם הנקודה  $c$  נמצאות ב- $D$  ומתקיים  $f(a) = f(c)$ . לכן גם

$a$  וגם  $c$  הן נקודות מקסימום של  $f$  ב- $D$ . זה לא סותר את הממצא שבכל המקרים יש רק

נקודת מקסימום אחת, שכן אם  $\alpha = 1$  אז  $a = c$ . זה לא בא לידי ביטוי בחישוב שכן במקרה זה

$$a \notin A_1$$