

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר: 1א2025
חומר הלימוד למטלה: פרקים 3–6
מספר השאלות: 7
משקל המטלה: 2 נקודות
מועד אחרון להגשה: 5.1.2025

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הפונקציה $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ נתונה עבור $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ על-ידי

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x^2 y z^2}{x^8 + y^6 + z^4}$$

וכן $f(0, 0, 0) = 0$. קבעו מהן כל הנקודות בהן f גזירה, ומהן הנקודות בהן היא אינה גזירה.

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו "כלל גזירה" עבור פעולת כפל מטריצות, המכליל את "כלל המכפלה" מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1: הנוסחה לנגזרת של מכפלת פונקציות גזירות.

יהיו k, l, m, n מספרים טבעיים, ותהי $a \in \mathbb{R}^k$.

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $M_{l \times m}(\mathbb{R})$ שגזירה בנקודה a .

תהי g פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $M_{m \times n}(\mathbb{R})$ שגזירה בנקודה a .

נגדיר $p: x \mapsto f(x)g(x)$ (הפעולה היא כפל מטריצות).

הפונקציה p היא פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $M_{l \times n}(\mathbb{R})$.

הוכיחו ש- p גזירה בנקודה a ושמתקיים $Dp_a(h) = f(a)Dg_a(h) + Df_a(h)g(a)$ לכל $h \in \mathbb{R}^k$.

הדרכה: פעלו בדומה לפתרון חלק ג של שאלה 15.3.

הגדירו את הפונקציה $\mu: M_{l \times m}(\mathbb{R}) \times M_{m \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{l \times n}(\mathbb{R})$ על-ידי $\mu: (X, Y) \mapsto XY$ (פעולת כפל מטריצות).

הראו שהיא גזירה ומצאו את $D\mu_{(A, B)}(H, K)$ עבור כל $A, H \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$ וכל $B, K \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$.

הראו ש- $p = \mu \circ (f, g)$ והשתמשו בכלל השרשרת.

תוכלו להיעזר בדרך בנוסחה $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ עבור $A \in M_{l \times m}(\mathbb{R})$ ו- $B \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ שאינה מוכחת בספר (אינכם

נדרשים לכלול הוכחה שלה במסגרת פתרון השאלה).

שאלה 3 (15 נקודות)

יהיו k ו- n מספרים טבעיים ותהי $f: M_{k \times k}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbb{R})$ המוגדרת על ידי $X \mapsto X^n$.

מדוגמה 6.1 נובע שזאת פונקציה פולינומית ולכן היא ודאי גזירה ב- $M_{k \times k}(\mathbb{R})$.

הראו ש- $Df_X(I) = nX^{n-1}$ לכל $X \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$, כאשר I היא מטריצת היחידה.

תוכלו להיעזר בשאלה הקודמת, או לחלופין לפעול בדרך ישירה יותר.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בקבוצה $\mathbf{R} \times [c, d]$. תהי $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ שעבורה

$$|f(x, t)| \leq \varphi(x) \quad \text{מתכנס ולכל } (x, t) \in \mathbf{R} \times [c, d] \text{ מתקיים: } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } F: t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx \text{ מוגדרת ורציפה בקטע } [c, d].$$

ב. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$.

$$\text{תהי } \varphi: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ שעבורה האינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ מתכנס ולכל } x \in \mathbf{R} \text{ ו- } y \in \mathbf{R}^k$$

$$\text{מתקיים: } |f(x, y)| \leq \varphi(x)$$

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } F: y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \text{ מוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי } \mathbf{R}^k.$$

הדרכה: אפשר לנסות לחקות את הוכחת טענה 3. ד. 4. במקום לחזור על ההוכחה אפשר לנסות להיעזר בטענה 3. ד. 4. גם טענה 7. ח. 2 יכולה להועיל.

שאלה 5 (רשות – 0 נקודות)

תהי f פונקציה סקלרית שמוגדרת וגזירה ברציפות בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1} = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}$, ומתקיימים התנאים האלה:

$$\bullet \text{ לכל } x \in \mathbf{R}^k \text{ האינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \text{ מתכנס.}$$

$$\bullet \text{ יש פונקציה } \psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ כך שהאינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy \text{ מתכנס.}$$

$$\bullet \text{ לכל } x \in \mathbf{R}^k \text{ ו- } y \in \mathbf{R} \text{ מתקיים } |\nabla f(x, y)| \leq \psi(y).$$

$$\text{הראו שבהנחות אלה הפונקציה } F: x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy \text{ גזירה ברציפות ב- } \mathbf{R}^k \text{ וכן לכל } x \in \mathbf{R}^k$$

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy \quad \text{ולכל } i \in \{1, \dots, k\} \text{ מתקיים:}$$

שאלה 6 (15 נקודות)

יהיו $a, b, u, v \in \mathbb{R}^3$, ונניח ששלושת הוקטורים $a - b, u, v$ הם בלתי-לויים לינארית.

נסמן: $A = \{a + tu \mid t \in \mathbb{R}\}$ $B = \{b + tv \mid t \in \mathbb{R}\}$

הראו שיש נקודות יחידות $p \in A$ ו- $q \in B$ כך שהקטע שקצותיו p ו- q הוא הקטע הקצר ביותר שאחד מקצותיו בקבוצה A והקצה האחר בקבוצה B , והראו שאורכו של קטע זה הוא המספר:

$$\frac{|(a-b) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|}$$

שאלה 7 (15 נקודות)

מצאו את כל נקודות הקיצון המקומי של הפונקציה $f: (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + (x - y)^3$. לכל אחת מהנקודות שמצאתם, קבעו אם היא נקודת מינימום מקומי או נקודת מקסימום מקומי של f , וכן אם היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום של f ב- $\mathbb{R}^2$.

►►► סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2024\2025 בשינוי נוסח קל. מחוץ לראשית היא גזירה כמנה של פולינומים (המכנה אינו 0). בראשית היא אינה גזירה. דרך אחת היא לבדוק שכל הנגזרות החלקיות הן 0, אבל יש נגזרות כיווניות שאינן 0. כלומר תלות הנגזרת הכיוונית בכיוון אינה לינארית. למעשה הפונקציה אינה רציפה, כפי שאפשר לבדוק על ידי חישוב הגבול של

$$f(t, t^2, t^2) \text{ כאשר } t \rightarrow 0.$$

לשאלה 2: לכל $(A, B) \in M_{l \times m}(\mathbf{R}) \times M_{m \times n}(\mathbf{R})$ ו- $(H, K) \in M_{l \times m}(\mathbf{R}) \times M_{m \times n}(\mathbf{R})$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \mu((A, B) + (H, K)) &= \mu(A + H, B + K) = (A + H)(B + K) \\ &= A(B + K) + H(B + K) = AB + AK + HB + HK \end{aligned}$$

הפונקציה $(H, K) \mapsto AK + HB$ היא פונקציה לינארית. נוכיח שמתקיים:

$$D\mu_{(A, B)}(H, K) = AK + HB$$

$$\frac{|\mu((A, B) + (H, K)) - \mu(A, B) - (AK + HB)|}{|(H, K)|} = \frac{|HK|}{\sqrt{|H|^2 + |K|^2}} \quad \text{ובכן:}$$

$$\leq \frac{|H| \cdot |K|}{\sqrt{|H|^2 + |K|^2}} = |H| \cdot \frac{|K|}{\sqrt{|H|^2 + |K|^2}} \leq |H| \xrightarrow{(H, K) \rightarrow (0_{l \times m}, 0_{m \times n})} 0$$

באי-שוויון האמצעי השתמשנו ב- $|HK| \leq |H| \cdot |K|$ שלא הוכחנו ואינו בספר. השתמשנו

$$\text{גם ב- } |K| = \sqrt{|K|^2} \leq \sqrt{|H|^2 + |K|^2}.$$

$$\frac{|\mu((A, B) + (H, K)) - \mu(A, B) - (AK + HB)|}{|(H, K)|} \xrightarrow{(H, K) \rightarrow (0_{l \times m}, 0_{m \times n})} 0_{l \times n} \quad \text{לכן}$$

ולפי הגדרה 1.1.3 μ גזירה בנקודה (A, B) ומתקיים: $D\mu_{(A, B)}(H, K) = AK + HB$

לכל $x \in \mathbf{R}^k$ עבורו קיימים $f(x)$ וגם $g(x)$ מתקיים

$$p(x) = f(x)g(x) = \mu(f(x), g(x))$$

ולכן $p = \mu \circ (f, g)$. לפי שאלה 13.1.3 האיסוף (f, g) היא פונקציה גזירה בנקודה a

ומתקיים $D(f, g)_a = (Df_a, Dg_a)$. הפונקציה μ גזירה בכל נקודה ובפרט בנקודה

$$(f, g)(a) = (f(a), g(a)). \text{ לכן לפי כלל השרשרת מתקיים:}$$

$$Dp_a = D(\mu \circ (f, g))_a = D\mu_{(f, g)(a)} \circ D(f, g)_a = D\mu_{(f(a), g(a))} \circ (Df_a, Dg_a)$$

$$Dp_a(h) = D\mu_{(f(a), g(a))}(Df_a(h), Dg_a(h)) = f(a)Dg_a(h) + Df_a(h)g(a) \quad \text{לכן:}$$

לשאלה 3: בעזרת השאלה הקודמת: נסמן $f_n: X \mapsto X^n$, ונוכיח את הנדרש באינדוקציה.

הפונקציה f_0 היא קבועה ולכן $Df_0 = 0$. הפונקציה $f_1: X \mapsto X$ היא פונקציית

הזהות, והיא לינארית, ולכן לפי דוגמה 4.1.3 $D(f_1)_X = f_1$ ולכן:

$$D(f_1)_X(I) = f_1(I) = I = 1X^0$$

מתקיים $f_{n+1} = f_n f_1$ ולכן לפי השאלה הקודמת:

$$D(f_{n+1})_X(I) = f_n(X)D(f_1)_X(I) + D(f_n)_X(I)f_1(X)$$

נניח כהנחת אינדוקציה ש- $Df_X(I) = nX^{n-1}$, ואז:

$$D(f_{n+1})_X(I) = X^n I + nX^{n-1}X = (n+1)X^{n+1}$$

והטענה נובעת באינדוקציה על n .

הטיעון האינדוקטיבי, בשינוי קל, מראה גם ש- f_n גזירה בכל $X \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$.

הוכחה ישירה (שמשמשת בידע שהפונקציה פולינומית ולכן גזירה):

$$\frac{|f(X+H) - f(X) - Df_X(H)|}{|H|} \xrightarrow{H \rightarrow 0_{k \times k}} 0 \quad \text{מהגזירות נובע שמתקיים:}$$

$$\frac{|f(X+tI) - f(X) - Df_X(tI)|}{|tI|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{בפרט:}$$

הפונקציה Df_X היא פונקציה לינארית, ולכן $Df_X(tI) = tDf_X(I)$.

המטריצות X ו- tI מתחלפות זו עם זו (זה $XtI = tIX = tX$) ולכן:

$$f(X+tI) = (X+tI)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^{n-i} X^i = X^n + tnX^{n-1} + t^2 \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i$$

כמוכן $f(X) = X^n$ ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{|f(X+tI) - f(X) - Df_X(tI)|}{|tI|} &= \frac{\left| t(nX^{n-1} - Df_X(I)) + t^2 \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \right|}{|tI|} \\ &= \frac{|t| \cdot \left| (nX^{n-1} - Df_X(I)) + t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \right|}{|t| \cdot |I|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \left| (nX^{n-1} - Df_X(I)) + t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \right| \end{aligned}$$

$$(nX^{n-1} - Df_X(I)) + t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0_{k \times k} \quad \text{אז:}$$

$$t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \cdot \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} 0^{n-i-2} X^i = 0_{k \times k} \quad \text{בנוסף מרציפות:}$$

$$(nX^{n-1} - Df_X(I)) + t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \xrightarrow{t \rightarrow 0} nX^{n-1} - Df_X(I) \quad \text{ולכן:}$$

$$Df_X(I) = nX^{n-1} \quad \text{ומיחידות הגבול } nX^{n-1} - Df_X(I) = 0 \text{ ולכן:}$$

לשאלה 4: סעיף א: מהתכנסות האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$ נובעת התכנסות שני האינטגרלים

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx \text{ ו- } \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

לפי טענה 3.ד.4 הפונקציה $F_1 : t \mapsto \int_0^{\infty} f(x, t) dx$

מוגדרת ורציפה בקטע $[c, d]$.

כמוכן $\int_0^{\infty} \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(-x) dx$ כלומר מתכנס האינטגרל המוכלל $\int_0^{\infty} \varphi(-x) dx$.

נסמן $g : (x, t) \mapsto f(-x, t)$. אז כמובן g פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בקבוצה $\mathbf{R} \times [c, d]$, ולכן גם בקבוצה $[0, \infty) \times [c, d]$. לכל (x, t) בקבוצה זאת מתקיים:

$$|g(x, t)| = |f(-x, t)| \leq \varphi(-x)$$

האינטגרל המוכלל $\int_0^{\infty} \varphi(-x) dx = \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx$ מתכנס, ומטענה 3.ד.4 נובע שהפונקציה

$$F_2 : t \mapsto \int_0^{\infty} g(x, t) dx$$

מוגדרת ורציפה בקטע $[c, d]$. אז גם הפונקציה $F_1 + F_2$ מוגדרת ורציפה ב- $[c, d]$.

לכל $t \in [c, d]$ מתקיים

$$\begin{aligned} F_1(t) + F_2(t) &= \int_0^{\infty} f(x, t) dx + \int_0^{\infty} g(x, t) dx = \int_0^{\infty} f(x, t) dx + \int_0^{\infty} f(-x, t) dx \\ &= \int_0^{\infty} f(x, t) dx + \int_{-\infty}^0 f(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx = F(t) \end{aligned}$$

ולכן F מוגדרת וגזירה ב- $[c, d]$.

סעיף ב: נדרשת כאן רציפות של פונקציה ב- k משתנים, ואילו טענה 3.ד.4 מעידה רק על רציפות של פונקציות של משתנה יחיד. לכן לא ניתן לנצל אותה באופן ישיר כמו בסעיף א. אפשר להוכיח את הטענה על ידי חיקוי הוכחת טענה 3.ד.4. במקום זה נלך בדרך מתוחכמת מעט, שנעזרת בטענה 7.ח.2 כדי לקבל את הרציפות של פונקציה של k משתנים מרציפות של פונקציות של משתנה אחד.

בטענה 7.ח.2 נעשה שימוש בקבוצת מסילות Γ_a שמוגדרת בספר לפני טענה 3.ח.2.

מסילה γ בקבוצה Γ_a היא מסילה $\gamma : [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^k$ המקיימת $\gamma(0) = a$. בנוסף נדרש

שם ש- $\gamma(t) \neq a$ אם $t \neq 0$.

אם נוכיח שלכל מסילה $\gamma \in \Gamma_a$ הפונקציה $F \circ \gamma$ רציפה ב- 0 , אז

$$(F \circ \gamma)(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} F(\gamma(0)) = F(a)$$

ולפי טענה 7.ח.2 מתקיים $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(a)$, כלומר F רציפה בנקודה a .

ובכן, תהי $a \in \mathbf{R}^k$. תהי $\gamma \in \Gamma_a$.

נגדיר $g: \mathbf{R} \times [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}$ עלידי: $g: (x, t) \mapsto f(x, \gamma(t))$

אז g רציפה בקבוצה $\mathbf{R} \times [-1, 1]$ כהרכבה של פונקציות רציפות.

לכל $(x, t) \in \mathbf{R} \times [-1, 1]$ מתקיים: $|g(x, t)| = |f(x, \gamma(t))| \leq \varphi(x)$

לכן לפי סעיף א הפונקציה $G: t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) dx$ מוגדרת ורציפה בקטע $[-1, 1]$.

לכל $t \in [-1, 1]$ מתקיים:

$$G(t) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, \gamma(t)) dx = F(\gamma(t)) = (F \circ \gamma)(t)$$

(בפרט זה מראה שהפונקציה F מוגדרת בנקודה $(a = \gamma(0))$).

קיבלנו אם כן שלכל $\gamma \in \Gamma_a$ הפונקציה $F \circ \gamma$ רציפה ב-0, וכאמור מכך נובע ש- F

רציפה בנקודה a . זה נכון לכל נקודה $a \in \mathbf{R}^k$ ולכן F רציפה ב- $\mathbf{R}^k$.

(שימו לב שהעובדה שהפונקציה F אכן מוגדרת בכל נקודה a שצוינה לעיל, מסתמכת

גם על העובדה הפשוטה ש- $\Gamma_a \neq \emptyset$).

לשאלה 5: פתרון שאלה זאת בנוי על משפט 4.ד.4, הרחבתו לכלול אינטגרלים על כל הישר בדרך דומה לפתרון סעיף א של השאלה הקודמת, ושימוש בחלק ב של השאלה הקודמת כדי לקבל את רציפות כל הנגזרות החלקיות של F , כלומר גזירות חלקיות ברציפות של F , ומטענה 10.ד.3 נובעת גזירות ברציפות של F . אפשר כנראה להוכיח את הטענה שכאן גם כמסקנה ממשפט 4.א.4 בעזרת האפיון של גזירות המוזכר באבחנה 4.ז.3. כדי להשתמש במשפט 4.ד.4 נרצה פונקציה של שני משתנים, שתתקבל על ידי "קיבוע" כל המשתנים של f פרט לשניים מהם, שאחד מהם הוא האחרון (y) ב- $(f(x, y))$.

נרצה להגדיר פונקציה כזאת: $g: (y, t) \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_k, y)$

ואז יהיה: $F(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y, t) dy$

כדי לא לחזור שוב ושוב על הסימון המסורבל הזה, שמהותו היא החלפת השיעור ה- i

של x בערך t , נגדיר סימון חסכוני יותר: $x \xrightarrow{i \rightarrow t} (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_k)$

שימו לב שבפרט למשל: $x \xrightarrow{1 \rightarrow t} (t, x_2, \dots, x_k)$

$x \xrightarrow{2 \rightarrow t} (x_1, t, x_3, \dots, x_k)$

$x \xrightarrow{k \rightarrow t} (x_1, \dots, x_{k-1}, t)$

וכן למשל אם $k=2$ אז $x = (t, x_2)$ ו- $x = (x_1, t)$ ואם $k=1$ אז פשוט $x = t$,

וכמוכן תמיד $x = x$ (הצבת x_i במקום השיעור i של x נותנת את x עצמו).

ובכן בסימון הזה מגדירים

$$g: (y, t) \mapsto f\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y, t) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right) dy \quad \text{ואז}$$

הוא אינטגרל מתכנס לפי הנתון.

בפרט נובע שהאינטגרלים $\int_0^{\infty} g(y, t) dy$ ו- $\int_{-\infty}^0 g(y, t) dy$ מתכנסים עבור כל $t \in \mathbf{R}$.

$$\frac{\partial g}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right) \quad \text{מתקיים גם}$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right) \right| \leq \left| \nabla f\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right) \right| \leq \psi(y) \quad \text{ולכן:}$$

האינטגרל המוכלל $\int_0^{\infty} \psi(y) dy$ מתכנס כי האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy$ מתכנס.

אם כך מתקיימים כל התנאים המאפשרים להסיק, בעזרת משפט 4.1.4, שהפונקציה

$$G: t \mapsto \int_0^{\infty} g(y, t) dy$$

גזירה בקטע $[c, d]$ כלשהו (ולכן גזירה ב- $\mathbf{R}$), ושלכל t מתקיים: $G'(t) = \int_0^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) dy$

$$G(t) = \int_0^{\infty} g(y, t) dy = \int_0^{\infty} f\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right) dy \quad \text{נשים לב כעת שמתקיים:}$$

$$F_1: x \mapsto \int_0^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{אם נסמן}$$

$$\text{אז } G(t) = F_1\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}\right) \text{ לכל } t, \text{ ו- } G'(t) = \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}\right).$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}\right) = G'(t) = \int_0^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) dy = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right) dy \quad \text{לכן}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy \quad \text{ובפרט אם נציב } x_i \text{ במקום } t \text{ נקבל:}$$

גם האינטגרל $\int_{-\infty}^0 g(y, t) dy$ מתכנס עבור כל $t \in \mathbf{R}$, ואינטגרל זה שווה גם לאינטגרל

$$h: (y, t) \mapsto g(-y, t) \quad \text{כלומר גם זה אינטגרל מתכנס. נגדיר: } \int_0^{\infty} g(-y, t) dy$$

אז $\int_0^\infty h(y, t) dy$ מתכנס עבור כל t . מתקיים גם $\frac{\partial h}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(-y, t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, -y\right)$

ולכן: $\left| \frac{\partial h}{\partial t}(y, t) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, -y\right) \right| \leq \left| \nabla f\left(x, -y\right) \right| \leq \psi(-y)$

האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty \psi(-y) dy$ מתכנס כי האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^\infty \psi(y) dy$ מתכנס

ומכאן שמתכנס האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^0 \psi(y) dy$ ששוה ל- $\int_0^\infty \psi(-y) dy$.

אם כך מתקיימים כל התנאים המאפשרים להסיק, בעזרת משפט 4.ד.4, שהפונקציה

$$H : t \mapsto \int_0^\infty h(y, t) dy$$

גזירה בקטע $[c, d]$ כלשהו (ולכן גזירה ב- $\mathbf{R}$), ושלכל t מתקיים: $H'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial h}{\partial t}(y, t) dy$

נשים לב כעת שמתקיים: $H(t) = \int_0^\infty g(-y, t) dy = \int_0^\infty f\left(x, -y\right) dy = \int_{-\infty}^0 f\left(x, y\right) dy$

אם נסמן $F_2 : x \mapsto \int_{-\infty}^0 f(x, y) dy$

אז $H(t) = F_2\left(x\right)$ לכל t , ו- $H'(t) = \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(x\right)$.

לכן $\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(x\right) = H'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial h}{\partial t}(y, t) dy = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, -y\right) dy = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, y\right) dy$

ובפרט אם נציב x_i במקום t נקבל: $\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy$

לכל $x \in \mathbf{R}^k$ $F(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x, y) dy = \int_{-\infty}^0 f(x, y) dy + \int_0^\infty f(x, y) dy = F_1(x) + F_2(x)$

ולכן F גזירה חלקית לפי x_i ומתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy + \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy$$

עד כה קיבלנו ש- F גזירה חלקית לפי כל אחד מהמשתנים בכל נקודה ב- $\mathbf{R}^k$.

כעת, f גזירה ברציפות בכל המרחב, ולכן כל אחת מהנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ רציפה

בכל המרחב, ולכן מתקיימים עבורה כל תנאי חלק ב של השאלה הקודמת בממ"ן זה,

ומכך אנו מסיקים שהפונקציות $\frac{\partial F}{\partial x_i}$ כולן רציפות בכל נקודה במרחב, ולכן על פי טענה

10.ד.3 הפונקציה F גזירה ברציפות ב- $\mathbf{R}^k$.

אפשר להגיד שמדובר בשתי יריעות חד־ממדיות. הקבוצות זרות (נקודה משותפת מעידה על תלות לינארית בניגוד לנתון). הן מרחבים אפיניים חד־ממדיים (יעני ישרים) ולכן קבוצות סגורות, ויש למרחק בין הקבוצות הסגורות האלה ערך מזערי (לא נכון באופן כללי לכל שתי קבוצות סגורות). ואז אפשר לטעון כמו בשאלה 7.ה.7 שהקטע בהכרח מאונך לשני הישרים ומכאן למצוא כל מה שנדרש.

יותר קל כך: נראה שלפונקציה $f: (x, y) \mapsto |(a + xu) - (b + yv)|^2$ (הריבוע לנוחיות ולגזירות) יש נקודת קריטית יחידה.

ראשית: $f(x, y) = |(a + xu) - (b + yv)|^2 = |a - b + xu - yv|^2 = g \circ h(x, y)$

$$g: x \mapsto |x|^2$$

$$h: (x, y) \mapsto a - b + xu - yv$$

לפי דוגמה 5.א.3 g גזירה ו־ $\nabla g(x) = 2x$ לכל $x \in \mathbf{R}^3$ ולפי דוגמה 10.1.3 h גזירה

ולכל $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ המטריצה $Jh_{(x,y)}$ היא המטריצה שעמודותיה הן u^T ו־ $-v^T$.

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= Jf_{(x,y)} = Jg_{h(x,y)} Jh_{(x,y)} = \nabla g(h(x, y)) (u^T \mid -v^T) \\ &= 2h(x, y) (u^T \mid -v^T) = 2(u \cdot h(x, y), -v \cdot h(x, y)) \end{aligned}$$

בנקודת קריטית $\nabla f(x, y) = 0$ ולכן $u \cdot h(x, y) = 0$ וגם $v \cdot h(x, y) = 0$ כלומר $h(x, y)$

הוא וקטור שמאונך גם ל־ u וגם ל־ v . הוקטורים u ו־ v בלתי־תלויים לינארית ולכן

פורשים תת־מרחב דו־ממדי ב־ $\mathbf{R}^3$, והוקטורים המאונכים להם הם מרחב חד־ממדי

שמכיל את $h(x, y)$ וגם את $u \times v$, ולפי טענה 8.ה.1, ולכן יש קבוע $\lambda \in \mathbf{R}$

כך ש־ $h(x, y) = \lambda(u \times v)$. בפרט:

$$\begin{aligned} a - b + xu - yv &= h(x, y) = \lambda(u \times v) \\ \Rightarrow xu - yv - \lambda(u \times v) &= -(a - b) \end{aligned}$$

לפי טענה 8.ה.1 הוקטורים $u, v, u \times v$ הם בסיס של $\mathbf{R}^3$, ולכן המקדמים x, y, λ

נקבעים באופן יחיד. בפרט לפונקציה f נקודה קריטית יחידה. אם לפונקציה f יש

נקודת מינימום ב־ $\mathbf{R}^2$ אז היא בהכרח הנקודה הקריטית הזאת. בנקודה זאת מתקיים:

$$\begin{aligned} \lambda(u \times v) \cdot (u \times v) &= h(x, y) \cdot (u \times v) = (a - b + xu - yv) \cdot (u \times v) \\ \lambda|u \times v|^2 &= (a - b) \cdot (u \times v) + \underbrace{xu \cdot (u \times v)}_0 - \underbrace{yv \cdot (u \times v)}_0 = (a - b) \cdot (u \times v) \\ \lambda &= \frac{(a - b) \cdot (u \times v)}{|u \times v|^2} \end{aligned}$$

$$|h(x, y)| = |\lambda(u \times v)| = |\lambda| \cdot |u \times v| = \frac{|(a - b) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|^2} \cdot |u \times v| = \frac{|(a - b) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|}$$

וזה מראה שאורך הקטע הקצר ביותר שקצותיו ב־ A וב־ B הוא כמבוקש, והקצוות הם בהכרח $p = a + xu \in A$ ו־ $q = b + yv \in B$ עם x ו־ y שנקבעו ביחידות. נותר להראות שאכן יש ערך מזערי לפונקציה f . אם נראה למשל שהיא קמורה, אז טענה 15.ב.6.

תבטיח שהנקודה הקריטית שנמצאה היא נקודת מינימום של f ב־ $\mathbf{R}^2$.

ובכן, ראינו ש־ $f = g \circ h$ ו־ h היא פונקציה אפינית. יהיה יותר נוח לכתוב באופן כללי

כמו בדוגמה 10.ו.3. אז $Jh_x = A$. כלל השרשרת אומר שמתקיים

$\nabla f(x) = \nabla g(h(x))Jh_x = 2h(x)A = 2(xA^T + b)A = 2xA^TA + 2bA$ אז גם ∇f היא

פונקציה אפינית ולפי דוגמה 10.ו.3 $Hf_x = J(\nabla f)_x = (2A^TA)^T = 2A^TA$ וזאת

מטריצה חיובית (למשל כי לכל x מתקיים

$(xA^TAx^T = xA^T(xA^T)^T = xA^T \cdot xA^T = |xA^T|^2 \geq 0$), ולכן f פונקציה קמורה ב־ $\mathbf{R}^2$.

לשאלה 7: כאן $\nabla f(x, y) = (4x^3 + 3(x - y)^2, 4y^3 - 3(x - y)^2)$ ואפשר לבדוק שהנקודות

הקריטיות הן $(0, 0)$ ו־ $(-3, 3)$. אפשר לחשב גם ש־ $Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ וזה לא נותן מידע

אם $(0, 0)$ נקודת קיצון, ואילו $Hf_{(-3,3)} = 36 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ שהיא מטריצה חיובית לחלוטין

ולכן $(-3, 3)$ היא נקודת מינימום מקומי. אבל שיקולים אלה למעשה מיותרים ואפשר

להסתדר בלעדיהם. מתקיים $f(t, -t) = t^4 + t^4 + (2t)^3 = 2t^3(t + 4)$ ולכן בכל סביבה

של $(0, 0)$ יש נקודה $(t, -t)$ עם $t > 0$ ועבורה $f(t, -t) > 0 = f(0, 0)$, ולכן $(0, 0)$ אינה

נקודת מקסימום מקומי, וכן יש בסביבה נקודה כזאת עם $-4 < t < 0$ ועבורה

$f(t, -t) < 0 = f(0, 0)$ ולכן $(0, 0)$ אינה נקודת מקסימום מקומי. אז היא בודאי גם

אינה נקודת מינימום או מקסימום ב־ $\mathbf{R}^2$ כיוון ש־ $\mathbf{R}^2$ הוא סביבה של $(0, 0)$. נראה

עתה שיש ל־ f נקודת מינימום ב־ $\mathbf{R}^2$ מאחר ש־ $\mathbf{R}^2$ פתוחה זאת נקודת מינימום

מקומי, ולכן היא נקודה קריטית, והיא אינה $(0, 0)$ שאינה נקודת קיצון מקומי, ולכן

היא $(-3, 3)$ ולכן בפרט $(-3, 3)$ היא נקודת מינימום מקומי.

נסמן $g: (x, y) \mapsto x^4 + y^4$ ו־ $h: (x, y) \mapsto (x - y)^3$ אלה פונקציות פולינומיות ולכן

רציפות, ולכן יש להן ערכים מזערי ומרבי בקבוצה הסגורה וחסומה $S((0, 0); 1)$ (מעגל

היחידה). תהי (a, b) נקודת המינימום של g במעגל היחידה. אז לכל (x, y) במעגל

היחידה מתקיים $g(x, y) \geq g(a, b) = a^4 + b^4 > 0$. יהי m הערך המרבי של הפונקציה

הרציפה $x \mapsto |h(x)|$ במעגל היחידה. נשים לב ש־ g פונקציה הומוגנית חיובית

$$g(tx, ty) = (tx)^4 + (ty)^4 = t^4(x^4 + y^4) = t^4 g(x, y) \quad \text{ממעלה 4, כי}$$

וכן h היא פונקציה הומוגנית חיובית ממעלה 3, כי:

$$h(tx, ty) = (tx - ty)^3 = (t(x - y))^3 = t^3(x - y)^3 = t^3 h(x, y)$$

כל $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ נסמן $t = |u|$ ו- $v = \frac{1}{t}u$. אז $u = tv$ וכן $|v| = \left|\frac{1}{t}u\right| = \frac{1}{t}|u| = 1$ כלומר v

במעגל היחידה. אז:

$$\begin{aligned} f(u) &= f(tv) = g(tv) + h(tv) = t^4 g(v) + t^3 h(v) \\ &\geq t^4 g(v) - t^3 |h(v)| \geq t^4 (a^4 + b^4) - mt^3 = t^3 ((a^4 + b^4)t - m) \end{aligned}$$

אם $|u| = t > \frac{m}{a^4 + b^4}$ אז $f(u) > 0$. הקבוצה $K = \bar{B}\left((0, 0); \frac{m}{a^4 + b^4}\right)$ היא קבוצה סגורה

וחסומה, והפונקציה הפולינומית f רציפה בכל המישור ובפרט בקבוצה K . לפי משפט וירשטראס יש ל- f ערך מזערי ב- K . תהי $p \in K$ נקודת מינימום של f ב- K .

לכל $u \in \mathbb{R}^2$ אם $u \in K$ אז $f(u) \geq f(p)$, ואחרת $|u| > \frac{m}{a^4 + b^4}$ וכפי שראינו קודם

$f(u) > 0 = f(0, 0) \geq f(p)$. לכן לכל $u \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $f(u) \geq f(p)$ ומכאן ש- $f(p)$

הערך המזערי של f ב- $\mathbb{R}^2$ ו- p נקודת מינימום של f ב- $\mathbb{R}^2$. כאמור נובע מזה שהיא

נקודה קריטית, ובהכרח $p = (-3, 3)$, והערך המזערי של f ב- $\mathbb{R}^2$ הוא:

$$f(-3, 3) = (-3)^4 + 3^4 + (-3 - 3)^3 = 2 \cdot 3^4 - (2 \cdot 3)^3 = 2 \cdot 3^3 \cdot (3 - 2^2) = -2 \cdot 3^3 = -54$$