

מתווה לפתרון ממ"ן 12

סמסטר : 2025

הקורס : 2024 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 3–6

שאלה 1 (20 נקודות)

הפונקציה $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ נתונה עבור $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ על-ידי

$$(x, y, z) \mapsto \frac{x^2 y z^2}{x^8 + y^6 + z^4}$$

וכן $f(0, 0, 0) = 0$. קבעו מהן כל הנקודות בהן f גזירה, ומהן הנקודות בהן היא אינה גזירה.

פתרון

המונה והמכנה הם פונקציות פולינומיות והן גזירות בכל המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^3$ (זה נובע למשל מחלקים א רב של שאלה 3.א.16). לכן (לפי חלק ג של שאלה 3.א.16) המנה שלהם, דהיינו f , היא פונקציה גזירה בכל נקודה שבה המכנה אינו אפס, דהיינו f גזירה בכל נקודה שאינה $(0, 0, 0)$.

היא אינה גזירה ב- $(0, 0, 0)$ ויש מגוון דרכים להראות זאת.

דרך אחת: עבור $u = (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$ ולכל $t \neq 0$ מתקיים:

$$f|_{0^{[3]},u}(t) = f(at, bt, ct) = \frac{(at)^2 bt (ct)^2}{(at)^8 + (bt)^6 + (ct)^4} = \frac{a^2 b c^2}{a^8 t^4 + b^6 t^2 + c^4} t$$

בפרט אם $a = 0$ או $b = 0$ או $c = 0$ אז לכל $t \in \mathbb{R}$ מתקיים $f|_{0^{[3]},u}(t) = 0$ ולכן: $\partial_u f(0^{[3]}) = 0$

אז: $\nabla f(0^{[3]}) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(0^{[3]}), \frac{\partial f}{\partial y}(0^{[3]}), \frac{\partial f}{\partial z}(0^{[3]}) \right) = \left(\partial_{e_1} f(0^{[3]}), \partial_{e_2} f(0^{[3]}), \partial_{e_3} f(0^{[3]}) \right) = (0, 0, 0)$

כמוכן, לפי הנוסחה דלעיל עם $a = b = c = 1$, עבור $u = (1, 1, 1)$ מתקיים

$$f|_{0^{[3]},u}(t) = \frac{t}{t^4 + t^2 + 1}$$

ולכן:

$$\partial_u f(0^{[3]}) = \frac{d}{dt} f|_{0^{[3]},u}(0) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f|_{0^{[3]},u}(t) - f|_{0^{[3]},u}(0)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^4 + t^2 + 1} = 1$$

מצד שני, אם f גזירה ב- $0^{[3]}$ אז ממשפט 9.ב.3 לכל $u \in \mathbb{R}^3$ מתקיים:

$$\partial_u f(0^{[3]}) = u \cdot \nabla f(0^{[3]}) = u \cdot (0, 0, 0) = 0$$

קיבלנו סתירה, ולכן בניגוד להנחת השלילה f אינה גזירה ב- $(0, 0, 0)$.

דרך נוספת: אם נוכיח ש- f אינה רציפה ב- $(0, 0, 0)$ אז לפי מסקנה 3.א.10 היא אינה גזירה שם.

נניח בשלילה ש- f רציפה ב- $(0, 0, 0)$. אז לפי טענה 7.ה.2 הפונקציה $t \mapsto f(t, t^2, t^2)$ רציפה ב-0.

אבל:

$$f(t, t^2, t^2) = \frac{t^2 t^2 (t^2)^2}{t^8 + (t^2)^6 + (t^2)^4} = \frac{t^8}{t^8 + t^{12} + t^8} = \frac{1}{2 + t^4} \xrightarrow{t \rightarrow 0} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0, 0)$$

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו "כלל גזירה" עבור פעולת כפל מטריצות, המכליל את "כלל המכפלה" מהקורס חשבון אינפיניטסימלי 1: הנוסחה לנגזרת של מכפלת פונקציות גזירות.

יהיו k, l, m, n מספרים טבעיים, ותהי $a \in \mathbf{R}^k$.

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbf{R}^k$ ל- $M_{l \times m}(\mathbf{R})$ שגזירה בנקודה a .

תהי g פונקציה חלקית מ- $\mathbf{R}^k$ ל- $M_{m \times n}(\mathbf{R})$ שגזירה בנקודה a .

נגדיר $p: x \mapsto f(x)g(x)$ (הפעולה היא כפל מטריצות).

הפונקציה p היא פונקציה חלקית מ- $\mathbf{R}^k$ ל- $M_{l \times n}(\mathbf{R})$.

הוכיחו ש- p גזירה בנקודה a ושמתקיים $Dp_a(h) = f(a)Dg_a(h) + Df_a(h)g(a)$ לכל $h \in \mathbf{R}^k$.

הדרכה: פעלו בדומה לפתרון חלק ג של שאלה 15.3.

הגדירו את הפונקציה $\mu: M_{l \times m}(\mathbf{R}) \times M_{m \times n}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{l \times n}(\mathbf{R})$ על ידי $\mu: (X, Y) \mapsto XY$ (פעולת כפל מטריצות).

הראו שהיא גזירה ומצאו את $D\mu_{(A,B)}(H, K)$ עבור כל $A, H \in M_{l \times m}(\mathbf{R})$ וכל $B, K \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$.

הראו ש- $p = \mu \circ (f, g)$ והשתמשו בכלל השרשרת.

תוכלו להיעזר בדרך בנוסחה $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ עבור $A \in M_{l \times m}(\mathbf{R})$ ו- $B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$ שאינה מוכחת בספר (אינכם

נדרשים לכלול הוכחה שלה במסגרת פתרון השאלה).

פתרון

לכל $(H, K) \in M_{l \times m}(\mathbf{R}) \times M_{m \times n}(\mathbf{R})$ ו- $(A, B) \in M_{l \times m}(\mathbf{R}) \times M_{m \times n}(\mathbf{R})$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \mu((A, B) + (H, K)) &= \mu(A + H, B + K) = (A + H)(B + K) \\ &= A(B + K) + H(B + K) = AB + AK + HB + HK \end{aligned}$$

הפונקציה $(H, K) \mapsto AK + HB$ היא פונקציה לינארית (בדקו בעזרת תזכורת 12.1.1).

נוכיח שמתקיים: $D\mu_{(A,B)}(H, K) = AK + HB$

$$\frac{|\mu((A, B) + (H, K)) - \mu(A, B) - (AK + HB)|}{|(H, K)|} = \frac{|HK|}{\sqrt{|H|^2 + |K|^2}}$$

ובכן:

$$\leq \frac{|H| \cdot |K|}{\sqrt{|H|^2 + |K|^2}} = |H| \cdot \frac{|K|}{\sqrt{|H|^2 + |K|^2}} \leq |H| \cdot \frac{|K|}{|K|} = |H| \xrightarrow{(H, K) \rightarrow (0_{l \times m}, 0_{m \times n})} 0$$

באישוויון האמצעי השתמשנו ב- $|HK| \leq |H| \cdot |K|$ שלא הוכחנו ואינו בספר.

השתמשנו גם ב- $|(H, K)| = \sqrt{|H|^2 + |K|^2}$ (אבחנה 6.1.1) וב- $|K| = \sqrt{|K|^2} \leq \sqrt{|H|^2 + |K|^2}$.

$$\frac{|\mu((A, B) + (H, K)) - \mu(A, B) - (AK + HB)|}{|(H, K)|} \xrightarrow{(H, K) \rightarrow (0_{l \times m}, 0_{m \times n})} 0_{l \times n}$$

לכן

לפי הגדרה 1.1.3 הפונקציה μ גזירה בנקודה (A, B) ומתקיים: $D\mu_{(A,B)}(H, K) = AK + HB$

לכל $x \in \mathbf{R}^k$ עבורו קיימים $f(x)$ וגם $g(x)$ מתקיים $p(x) = f(x)g(x) = \mu(f(x), g(x))$

ולכן $p = \mu \circ (f, g)$. לפי שאלה 13.ז.3 האיסוף (f, g) היא פונקציה גזירה בנקודה a ומתקיים

$$D(f, g)_a = (Df_a, Dg_a)$$

הפונקציה μ גזירה בכל נקודה ובפרט בנקודה $(f, g)(a) = (f(a), g(a))$.

לפי כלל השרשרת מתקיים

$$Dp_a = D(\mu \circ (f, g))_a = D\mu_{(f, g)(a)} \circ D(f, g)_a = D\mu_{(f(a), g(a))} \circ (Df_a, Dg_a)$$

$$Dp_a(h) = D\mu_{(f(a), g(a))}(Df_a(h), Dg_a(h)) = f(a)Dg_a(h) + Df_a(h)g(a) \quad \text{ולכן:}$$

הערה: בדרך (השתמשנו באישוויון $|AB| \leq |A| \cdot |B|$, כאשר A ו- B הן שתי מטריצות ו- AB היא

מכפלתן. אישוויון זה אינו מוכח בספר. להלן הוכחה שלו:

נניח ש- $A \in M_{k \times m}(\mathbf{R})$ ו- $B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. אז מוגדרת המכפלה $AB \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$. נסמן ב- a_i את

השורה ה- i של המטריצה A וב- b_j^T את העמודה ה- j של המטריצה B . אז a_i ו- b_j הם וקטורי

שורה ב- $\mathbf{R}^m$. לפי הגדרת כפל מטריצות הרכיב ה- (i, j) של המכפלה AB הוא:

$$[AB]_{i,j} = \sum_{l=1}^m [A]_{i,l} [B]_{l,j} = a_i \cdot b_j$$

לפי אישוויון קושי-שוורץ $|a_i \cdot b_j| \leq |a_i| \cdot |b_j|$.

$$|AB|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n [AB]_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (a_i \cdot b_j)^2 \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n |a_i|^2 \cdot |b_j|^2 = \sum_{i=1}^k |a_i|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \text{אז:}$$

$$\sum_{i=1}^k |a_i|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^m [A]_{i,l}^2 = |A|^2 \quad \text{כעת}$$

$$\sum_{j=1}^n |b_j|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m [B]_{l,j}^2 = |B|^2 \quad \text{ובדומה}$$

ולכן $|AB|^2 \leq |A|^2 \cdot |B|^2$ ומכאן $|AB| \leq |A| \cdot |B|$.

שימו לב גם שמהאישוויון $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ נובע מידית האישוויון $|A_1 A_2 \cdots A_n| \leq |A_1| |A_2| \cdots |A_n|$

כל עוד המכפלה $A_1 A_2 \cdots A_n$ מוגדרת (ההוכחה באינדוקציה).

שאלה 3 (15 נקודות)

יהיו k ו- n מספרים טבעיים ותהי $f: M_{k \times k}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbf{R})$ המוגדרת על ידי $X \mapsto X^n$.
 מדוגמה 6.1.1 נובע שזאת פונקציה פולינומית ולכן היא ודאית גזירה ב- $M_{k \times k}(\mathbf{R})$.
 הראו ש- $Df_X(I) = nX^{n-1}$ לכל $X \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$, כאשר I היא מטריצת היחידה.
 תוכלו להיעזר בשאלה הקודמת, או לחילופין לפעול בדרך ישירה יותר.

פתרון

נראה שתי הוכחות. אחת שנעזרת במה שהוכח בשאלה 2, ואחת שאינה נעזרת בשאלה 2.

הוכחה ללא עזרת השאלה הקודמת:

מדוגמה 6.1.1 אפשר להסיק שהפונקציה f פולינומית.

$$\frac{|f(X+H) - f(X) - Df_X(H)|}{|H|} \xrightarrow{H \rightarrow 0_{k \times k}} 0 \quad \text{לכן היא גזירה. מהגזירות נובע שמתקיים}$$

$$\frac{|f(X+tI) - f(X) - Df_X(tI)|}{|tI|} \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \quad \text{ולפי טענה 11.2.2:}$$

הפונקציה Df_X היא פונקציה ליניארית, ולכן $Df_X(tI) = tDf_X(I)$.

המטריצות X ו- tI מתחלפות זו עם זו ($XtI = tIX = tX$) ולכן:

$$f(X+tI) = (X+tI)^n = \sum_{i=0}^n \binom{n}{i} t^{n-i} X^i = X^n + t n X^{n-1} + t^2 \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i$$

כמוכן $f(X) = X^n$ ולכן:

$$\begin{aligned} \frac{|f(X+tI) - f(X) - Df_X(tI)|}{|tI|} &= \frac{\left| t(nX^{n-1} - Df_X(I)) + t^2 \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \right|}{|tI|} \\ &= \frac{|t| \cdot \left| (nX^{n-1} - Df_X(I)) + t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \right|}{|t| \cdot |I|} \\ &= \frac{1}{\sqrt{k}} \left| (nX^{n-1} - Df_X(I)) + t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \right| \end{aligned}$$

$$(nX^{n-1} - Df_X(I)) + t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0_{k \times k} \quad \text{אז:}$$

$$t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 \cdot \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} 0^{n-i-2} X^i = 0_{k \times k} \quad \text{בנוסף מרציפות:}$$

$$(nX^{n-1} - Df_X(I)) + t \sum_{i=2}^n \binom{n}{i} t^{n-i-2} X^i \xrightarrow{t \rightarrow 0} nX^{n-1} - Df_X(I) \quad \text{ולכן:}$$

$$Df_X(I) = nX^{n-1} \quad \text{ומיחידות הגבול } nX^{n-1} - Df_X(I) = 0 \text{ דהיינו:}$$

הוכחה בעזרת השאלה הקודמת:

נסמן $f_n: X \mapsto X^n$, ונכיח באינדוקציה את הנדרש, דהיינו $D(f_n)_X(I) = nX^{n-1}$.

הפונקציה f_0 היא קבועה ולכן $Df_0 = 0$. הפונקציה $f_1: X \mapsto X$ היא פונקציית הזהות, והיא

לינארית, ולכן לפי דוגמה 4.1.3 $D(f_1)_X = f_1$ ולכן: $D(f_1)_X(I) = f_1(I) = I = 1X^0$

מתקיים $f_{n+1} = f_n f_1$ ולכן לפי השאלה הקודמת:

$$D(f_{n+1})_X(I) = f_n(X)D(f_1)_X(I) + D(f_n)_X(I)f_1(X)$$

נניח כהנחת אינדוקציה ש- $D(f_n)_X(I) = nX^{n-1}$, ואז:

$$D(f_{n+1})_X(I) = X^n I + nX^{n-1}X = (n+1)X^{n+1}$$

והטענה נובעת באינדוקציה על n .

הערה: הטיעון האינדוקטיבי הזה, בשינוי קל, מראה גם ש- f_n גזירה בכל $X \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בקבוצה $\mathbf{R} \times [c, d]$. תהי $\varphi: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty)$ שעבורה

$$|f(x, t)| \leq \varphi(x) \quad \text{מתכנס ולכל } (x, t) \in \mathbf{R} \times [c, d] \quad \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx$$

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } F: t \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, t) dx \text{ מוגדרת ורציפה בקטע } [c, d].$$

ב. תהי f פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1} = \mathbf{R} \times \mathbf{R}^k$.

$$\text{תהי } \varphi: \mathbf{R} \rightarrow [0, \infty) \text{ שעבורה האינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ מתכנס ולכל } x \in \mathbf{R} \text{ ו- } y \in \mathbf{R}^k$$

$$|f(x, y)| \leq \varphi(x) \quad \text{מתקיים:}$$

$$\text{הוכיחו שהפונקציה } F: y \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx \text{ מוגדרת ורציפה בכל המרחב האוקלידי } \mathbf{R}^k.$$

הדרכה: אפשר לנסות לחקות את הוכחת טענה 3.ד.4. במקום לחזור על ההוכחה אפשר לנסות להיעזר בטענה 3.ד.4. גם טענה 7.ח.2 יכולה להועיל.

פתרון סעיף א

$$\text{מהתכנסות האינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) dx \text{ נובעת התכנסות שני האינטגרלים המוכללים:}$$

$$\int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx \text{ ו- } \int_0^{\infty} \varphi(x) dx$$

$$\text{כמוכן } \int_{-\infty}^0 \varphi(x) dx = \int_0^{\infty} \varphi(-x) dx \text{ כלומר מתכנס האינטגרל המוכלל: } \int_0^{\infty} \varphi(-x) dx$$

$$F_1: t \mapsto \int_0^{\infty} f(x, t) dx \quad \text{לפי טענה 3.ד.4 הפונקציה}$$

$$\text{מוגדרת ורציפה בקטע } [c, d].$$

$$\text{נסמן } g: (x, t) \mapsto f(-x, t). \text{ אז כמוכן } g \text{ פונקציה סקלרית המוגדרת ורציפה בקבוצה } \mathbf{R} \times [c, d],$$

$$\text{ולכן גם בקבוצה } [0, \infty) \times [c, d]. \text{ לכל } (x, t) \text{ בקבוצה זאת מתקיים: } |g(x, t)| = |f(-x, t)| \leq \varphi(-x)$$

$$\text{האינטגרל המוכלל } \int_0^{\infty} \varphi(-x) dx \text{ מתכנס, ומטענה 3.ד.4 נובע שהפונקציה } F_2: t \mapsto \int_0^{\infty} g(x, t) dx$$

$$\text{מוגדרת ורציפה בקטע } [c, d]. \text{ אז גם הפונקציה } F_1 + F_2 \text{ מוגדרת ורציפה ב- } [c, d].$$

$$F_1(t) + F_2(t) = \int_0^\infty f(x,t) dx + \int_0^\infty g(x,t) dx = \int_0^\infty f(x,t) dx + \int_0^\infty f(-x,t) dx$$

$$= \int_0^\infty f(x,t) dx + \int_{-\infty}^0 f(x,t) dx = \int_{-\infty}^\infty f(x,t) dx = F(t)$$

ולכן F מוגדרת ורציפה ב- $[c,d]$.

פתרון סעיף ב

נדרש כאן להוכיח רציפות של פונקציה ב- k משתנים, ואילו טענה 3.ד.4 מעידה רק על רציפות של פונקציות של משתנה יחיד. לכן לא ניתן לנצל אותה באופן ישיר כמו בסעיף א. אפשר להוכיח את הטענה על ידי חיקוי הוכחת טענה 3.ד.4. במקום זה נלך בדרך מתוחכמת מעט, שנעזרת בטענה 7.ח.2 ובעזרתה נסיק את הרציפות של הפונקציה של k משתנים מרציפות של הרבה פונקציות של משתנה אחד. בטענה 7.ח.2 נעשה שימוש בקבוצת מסילות Γ_a שמוגדרת בספר לפני טענה 3.ח.2.

מסילה γ בקבוצה Γ_a היא מסילה $\gamma: [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}^k$ המקיימת $\gamma(0) = a$. בנוסף נדרש ש-

$\gamma(t) \neq a$ אם $t \neq 0$. אם נוכיח שלכל מסילה $\gamma \in \Gamma_a$ הפונקציה $F \circ \gamma$ רציפה ב- 0 , אז

$$(F \circ \gamma)(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} (F \circ \gamma)(0) = F(\gamma(0)) = F(a)$$

ולפי טענה 7.ח.2 מתקיים $F(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} F(a)$, כלומר F רציפה בנקודה a .

ובכן, תהי $a \in \mathbb{R}^k$. תהי $\gamma \in \Gamma_a$. נגדיר $g: \mathbb{R} \times [-1,1] \rightarrow \mathbb{R}$ על-ידי:

$$g: (x,t) \mapsto f(x, \gamma(t))$$

אז g רציפה בקבוצה $\mathbb{R} \times [-1,1]$ כהרכבה של פונקציות רציפות.

לכל $(x,t) \in \mathbb{R} \times [-1,1]$ מתקיים:

$$|g(x,t)| = |f(x, \gamma(t))| \leq \varphi(x)$$

לכן לפי סעיף א הפונקציה $G: t \mapsto \int_{-\infty}^\infty g(x,t) dx$ מוגדרת ורציפה בקטע $[-1,1]$.

לכל $t \in [-1,1]$ מתקיים:

$$G(t) = \int_{-\infty}^\infty g(x,t) dx = \int_{-\infty}^\infty f(x, \gamma(t)) dx = F(\gamma(t)) = (F \circ \gamma)(t)$$

(בפרט זה מראה שהפונקציה F מוגדרת בנקודה $(a = \gamma(0))$).

קיבלנו אם כן שלכל $\gamma \in \Gamma_a$ הפונקציה $F \circ \gamma$ רציפה ב- 0 , וכאמור מכך נובע ש- F רציפה

בנקודה a . זה נכון לכל נקודה $a \in \mathbb{R}^k$ ולכן F רציפה ב- $\mathbb{R}^k$.

(שימו לב שהעובדה שהפונקציה F אכן מוגדרת בכל נקודה a שצוינה לעיל, מסתמכת גם על

העובדה הפשוטה ש- $\Gamma_a \neq \emptyset$).

שאלה 5 (רשות – 0 נקודות)

תהי f פונקציה סקלרית שמוגדרת וגזירה ברציפות בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^{k+1} = \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}$, ומתקיימים התנאים האלה:

• לכל $x \in \mathbf{R}^k$ האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ מתכנס.

• יש פונקציה $\psi: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ כך שהאינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy$ מתכנס.

• לכל $x \in \mathbf{R}^k$ ו- $y \in \mathbf{R}$ מתקיים $|\nabla f(x, y)| \leq \psi(y)$.

הראו שבהנחות אלה הפונקציה $F: x \mapsto \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy$ גזירה ברציפות ב- $\mathbf{R}^k$ וכן לכל $x \in \mathbf{R}^k$

ולכל $i \in \{1, \dots, k\}$ מתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy$$

פתרון

פתרון שאלה זאת בנוי על משפט 4.ד.4, הרחבתו לכלול אינטגרלים על כל הישר בדרך דומה לפתרון סעיף א של השאלה הקודמת, ושימוש בחלק ב של השאלה הקודמת כדי לקבל את רציפות כל הנגזרות החלקיות של F , כלומר גזירות חלקיות ברציפות של F , שממנה ומטענה 10.ד.3 נובעת הגזירות ברציפות של F .

כדי להשתמש במשפט 4.ד.4 נרצה פונקציה של שני משתנים, שתקבל על ידי "קיבוע" כל המשתנים של f פרט לשניים מהם, שאחד מהם יהיה המשתנה האחרון (y ב- $f(x, y)$).

נגדיר פונקציה כזאת:

$$g: (y, t) \mapsto f(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_k, y)$$

ואז יהיה:

$$F(x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} g(y, t) dy$$

כדי לא לחזור שוב ושוב על הסימון המסורבל הזה, שמהותו היא החלפת השיעור ה- i של x

בערך t , אגדיר סימון חסכוני יותר:

$$x_{i \rightarrow t} = (x_1, \dots, x_{i-1}, t, x_{i+1}, \dots, x_k)$$

שימו לב שבפרט למשל:

$$x_{1 \rightarrow t} = (t, x_2, \dots, x_k)$$

$$x_{2 \rightarrow t} = (x_1, t, x_3, \dots, x_k)$$

$$x_{k \rightarrow t} = (x_1, \dots, x_{k-1}, t)$$

וכן למשל אם $k=2$ אז $x_{1 \rightarrow t} = (t, x_2)$ ו- $x_{2 \rightarrow t} = (x_1, t)$, ואם $k=1$ אז פשוט $x_{1 \rightarrow t} = t$.

ובכן בסימון הזה מגדירים:

$$g: (y, t) \mapsto f(x_{i \rightarrow t}, y)$$

תמיד $x_{i \rightarrow x_i} = x$ (הצבת x_i במקום השיעור ה- i של x נותנת כמובן את x עצמו).

בפרט מתקיים:

$$g(y, x_i) = f(x_{i \rightarrow x_i}, y) = f(x, y)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(y, t) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f\left(x, y\right) dy \quad \text{לכל } t \in \mathbf{R} \text{ מתקיים } x \in \mathbf{R}^k \text{ ולפי הנתון}$$

הוא אינטגרל מתכנס.

$$\text{בפרט נובע שהאינטגרלים } \int_{-\infty}^0 g(y, t) dy \text{ ו- } \int_0^{\infty} g(y, t) dy \text{ מתכנסים עבור כל } t \in \mathbf{R}.$$

$$\left| \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, y\right) \right| \leq \left| \nabla f\left(x, y\right) \right| \leq \psi(y) \quad \text{מתקיים גם } \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, y\right) \text{ ולכן:}$$

$$\text{האינטגרל המוכלל } \int_0^{\infty} \psi(y) dy \text{ מתכנס כי האינטגרל המוכלל } \int_{-\infty}^{\infty} \psi(y) dy \text{ מתכנס.}$$

אם כך מתקיימים כל התנאים המאפשרים להסיק, בעזרת משפט 4.ד.4, שהפונקציה

$$G: t \mapsto \int_0^{\infty} g(y, t) dy$$

$$G'(t) = \int_0^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) dy \quad \text{גזירה בקטע } [c, d] \text{ כלשהו (ולכן גזירה ב- } \mathbf{R} \text{), ושלכל } t \text{ מתקיים:}$$

$$G(t) = \int_0^{\infty} g(y, t) dy = \int_0^{\infty} f\left(x, y\right) dy \quad \text{נשים לב כעת שמתקיים:}$$

$$F_1: x \mapsto \int_0^{\infty} f(x, y) dy \quad \text{אם נסמן}$$

$$\text{אז } G(t) = F_1\left(x\right) \text{ ו- } G'(t) = \frac{\partial F_1}{\partial x_i}\left(x\right) \text{ לכל } t \in \mathbf{R}.$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\left(x\right) = G'(t) = \int_0^{\infty} \frac{\partial g}{\partial t}(y, t) dy = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, y\right) dy \quad \text{לכן}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x) = \int_0^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy \quad \text{ובפרט אם נציב } x_i = t \text{ במקום } t \text{ אז כאמור קודם } x = x_{i \rightarrow t} \text{ ונקבל:}$$

$$\int_0^{\infty} g(y, t) dy \text{ מתכנס עבור כל } t \in \mathbf{R}, \text{ ואינטגרל זה שווה לאינטגרל } \int_0^{\infty} g(-y, t) dy,$$

$$h: (y, t) \mapsto g(-y, t) \quad \text{כלומר גם זה אינטגרל מתכנס. נגדיר:}$$

$$\frac{\partial h}{\partial t}(y, t) = \frac{\partial g}{\partial t}(-y, t) = \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, -y\right) \quad \text{אז } \int_0^{\infty} h(y, t) dy \text{ מתכנס עבור כל } t. \text{ מתקיים גם}$$

$$\left| \frac{\partial h}{\partial t}(y, t) \right| = \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(x, -y\right) \right| \leq \left| \nabla f\left(x, -y\right) \right| \leq \psi(-y) \quad \text{ולכן:}$$

$$F_1|_{x, e_i}(h) = F_1\left(x + h e_i\right) = F_1\left(x\right) = G(t+h) \quad \text{מתקיים}^1$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial x_i}\left(x\right) = \partial_{e_i} F_1\left(x\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F_1|_{x, e_i}(h) - F_1|_{x, e_i}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(t+h) - G(t)}{h} = G'(t) \quad \text{ולכן:}$$

האינטגרל המוכלל $\int_0^\infty \psi(-y) dy$ מתכנס כי האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^\infty \psi(y) dy$ מתכנס ומכאן

שמתכנס האינטגרל המוכלל $\int_{-\infty}^0 \psi(y) dy$ ששוה ל- $\int_0^\infty \psi(-y) dy$.

אם כך מתקיימים כל התנאים המאפשרים להסיק, בעזרת משפט 4.ד.4, שהפונקציה

$$H : t \mapsto \int_0^\infty h(y, t) dy$$

גזירה בקטע $[c, d]$ כלשהו (ולכן גזירה ב- $\mathbf{R}$), ושלכל t מתקיים:

$$H'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial h}{\partial t}(y, t) dy$$

נשים לב כעת שמתקיים:

$$H(t) = \int_0^\infty g(-y, t) dy = \int_0^\infty f\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, -y\right) dy = \int_{-\infty}^0 f\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right) dy$$

אם נסמן $F_2 : x \mapsto \int_{-\infty}^0 f(x, y) dy$ או $H(t) = F_2\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}\right)$ לכל t , ו- $H'(t) = \frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}\right)$.

לכן

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}\right) = H'(t) = \int_0^\infty \frac{\partial h}{\partial t}(y, t) dy = \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, -y\right) dy = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_i}\left(\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow t \end{smallmatrix}, y\right) dy$$

ובפרט אם נציב x_i במקום t נקבל $\begin{smallmatrix} x \\ i \rightarrow x_i \end{smallmatrix} = x$ ולכן:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x_i}(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy$$

לכל $x \in \mathbf{R}^k$

$$F(x) = \int_{-\infty}^\infty f(x, y) dy = \int_{-\infty}^0 f(x, y) dy + \int_0^\infty f(x, y) dy = F_1(x) + F_2(x)$$

ולכן F גזירה חלקית לפי x_i ומתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \frac{\partial F_1}{\partial x_i}(x) + \frac{\partial F_2}{\partial x_i}(x) = \int_{-\infty}^0 \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy + \int_0^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy = \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy$$

עד כה קיבלנו ש- F גזירה חלקית לפי כל אחד מהמשתנים בכל נקודה ב- $\mathbf{R}^k$.

כעת, f גזירה ברציפות בכל המרחב, ולכן כל אחת מהנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ רציפה בכל המרחב.

לכל (x, y) מתקיים $\left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) \right| \leq |\nabla f(x, y)| \leq \psi(y)$ והאינטגרל $\int_{-\infty}^\infty \psi(y) dy$ מתכנס.

מתקיימות אפוא כל ההנחות של חלק ב של השאלה הקודמת בממ"ן זה עם $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ במקום f ,

עם ψ במקום φ , ובהחלפת תפקידים בין x ו- y . לכן מתקיימת גם מסקנת סעיף ב של השאלה

הקודם, שבסימונים אלה אומרת שהפונקציה $x \mapsto \int_{-\infty}^\infty \frac{\partial f}{\partial x_i}(x, y) dy$ היא פונקציה רציפה ב- $\mathbf{R}^k$.

ראינו שהפונקציה הזאת היא $\frac{\partial F}{\partial x_i}$, ולכן כל הנגזרות החלקיות של F רציפות ב- $\mathbf{R}^k$, כלומר היא

גזירה חלקית ברציפות ב- $\mathbf{R}^k$ ועל פי טענה 10.ד.3 הפונקציה F גזירה ברציפות ב- $\mathbf{R}^k$.

שאלה 6 (15 נקודות)

יהיו $a, b, u, v \in \mathbb{R}^3$, ונניח ששלושת הוקטורים $a - b, u, v$ הם בלתי-לויים לינארית.

$$A = \{a + tu \mid t \in \mathbb{R}\} \quad B = \{b + tv \mid t \in \mathbb{R}\} \quad \text{נסמן:}$$

הראו שיש נקודות יחידות $p \in A$ ו- $q \in B$ כך שהקטע שקצותיו p ו- q הוא הקטע הקצר ביותר שאחד מקצותיו בקבוצה A והקצה האחר בקבוצה B , והראו שאורכו של קטע זה הוא המספר:

$$\frac{|(a-b) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|}$$

פתרון

כל נקודה $p \in A$ ניתן לרשום בצורה $p = a + xu$ עם איזשהו $x \in \mathbb{R}$, וכל נקודה $q \in B$ אפשר לרשום בצורה $q = b + yv$ עם איזשהו $y \in \mathbb{R}$. לפי הגדרה 2.1.1, אורך הקטע שקצותיו p ו- q הוא הביטוי:

$$|p - q| = |(a + xu) - (b + yv)|$$

כדי להראות את הנדרש בשאלה נראה שיש זוג ערכים (x, y) שנקבע ביחידות שעבורו מקבל הביטוי דלעיל ערך מזערי, ושהערך המזערי הזה שווה למספר המבוקש בשאלה.

יהיה יותר נוח להשתמש בפונקציה $f : (x, y) \mapsto |(a + xu) - (b + yv)|^2$ שכן הפונקציה הזאת גזירה (לפי שאלה 5.א.3, טענה 12.א.3 ומשפט 1.3.1). ראשית נראה של- f יש נקודת קריטית יחידה.

$$f(x, y) = |(a + xu) - (b + yv)|^2 = |a - b + xu - yv|^2 = g \circ h(x, y) \quad \text{נרשום}$$

$$g : x \mapsto |x|^2 \quad \text{עם:}$$

$$h : (x, y) \mapsto a - b + xu - yv$$

לפי דוגמה 5.א.3 הפונקציה g גזירה ו- $\nabla g(x) = 2x$ לכל $x \in \mathbb{R}^3$.

לפי דוגמה 10.ו.3 הפונקציה h גזירה ולכל $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ המטריצה $Jh_{(x,y)}$ היא המטריצה

$$Jh_{(x,y)} = \begin{pmatrix} u^T & -v^T \end{pmatrix} \quad \text{שעמודותיה הן } u^T \text{ ו-} -v^T:$$

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= Jf_{(x,y)} = Jg_{h(x,y)} Jh_{(x,y)} = \nabla g(h(x, y)) \begin{pmatrix} u^T & -v^T \end{pmatrix} \\ &= 2h(x, y) \begin{pmatrix} u^T & -v^T \end{pmatrix} = 2(u \cdot h(x, y), -v \cdot h(x, y)) \end{aligned} \quad \text{מכלל השרשרת:}$$

בנקודת קריטית (x, y) של f מתקיים $\nabla f(x, y) = 0$ ולכן $u \cdot h(x, y) = 0$ וגם $v \cdot h(x, y) = 0$

כלומר $h(x, y)$ הוא וקטור שמאונך גם ל- u וגם ל- v . הוקטורים u ו- v בלתי-לויים לינארית

ולכן פורשים תת-מרחב דו-ממדי ב- $\mathbb{R}^3$, והוקטורים המאונכים להם הם תת-מרחב חד-ממדי

שמכיל את $h(x, y)$ וגם את $u \times v$.

לפי טענה 8.ה.1 $u \times v \neq 0$, ולכן יש קבוע $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש- $h(x, y) = \lambda(u \times v)$.

$$a - b + xu - yv = h(x, y) = \lambda(u \times v) \quad \Rightarrow \quad xu - yv - \lambda(u \times v) = b - a \quad \text{בפרט:}$$

זאת הצגה של $b - a$ כצירוף לינארי של הוקטורים $u, v, u \times v$ שלפי טענה 8.ה.1 הם בסיס של $\mathbf{R}^3$, ולכן המקדמים x, y, λ נקבעים באופן יחיד. בפרט מהשוויון $\nabla f(x, y) = 0$ שיעורי (x, y) נקבעים באופן יחיד, ולכן לפונקציה f נקודה קריטית יחידה.

אם לפונקציה f יש נקודת מינימום ב- $\mathbf{R}^2$ אז לפי אבחנה 3.ב.6 היא גם נקודת מינימום מקומי ולפי משפט 10.ב.6 היא בהכרח הנקודה הקריטית היחידה שלה.

בנקודה זאת מתקיים:

$$\lambda(u \times v) \cdot (u \times v) = h(x, y) \cdot (u \times v) = (a - b + xu - yv) \cdot (u \times v)$$

$$\lambda|u \times v|^2 = (a - b) \cdot (u \times v) + \underbrace{xu \cdot (u \times v)}_0 - \underbrace{yv \cdot (u \times v)}_0 = (a - b) \cdot (u \times v)$$

$$\lambda = \frac{(a - b) \cdot (u \times v)}{|u \times v|^2}$$

$$|h(x, y)| = |\lambda(u \times v)| = |\lambda| \cdot |u \times v| = \frac{|(a - b) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|^2} \cdot |u \times v| = \frac{|(a - b) \cdot (u \times v)|}{|u \times v|}$$

וזה מראה שאורך הקטע הקצר ביותר שקצותיו ב- A וב- B הוא כמבוקש, והקצוות הם בהכרח $p = a + xu \in A$ ו- $q = b + yv \in B$ עם x ו- y שנקבעו ביחידות.

נותר להראות שאכן יש ערך מזערי לפונקציה f . אם נראה למשל שהיא קמורה, אז טענה 15.ב.6

תבטיח שהנקודה הקריטית שנמצאה היא נקודת מינימום של f ב- $\mathbf{R}^2$.

ובכן, ראינו ש- $f = g \circ h$ היא פונקציה אפינית.

יהיה יותר נוח לכתוב באופן כללי $h: x \mapsto xA^T + b$ כמו בדוגמה 10.ו.3. אז $Jh_x = A$.

מכלל השרשרת:

$$\nabla f(x) = \nabla g(h(x)) Jh_x = 2h(x)A = 2(xA^T + b)A = 2xA^T A + 2bA$$

אז גם ∇f היא פונקציה אפינית ולפי דוגמה 10.ו.3:

$$Hf_x = J(\nabla f)_x = (2A^T A)^T = 2A^T A$$

זאת מטריצה חיובית, כי לכל x מתקיים:

$$xA^T A x^T = xA^T (xA^T)^T = xA^T \cdot xA^T = |xA^T|^2 \geq 0$$

לכן לפי משפט 18.ב.5 הפונקציה f קמורה ב- $\mathbf{R}^2$.

הערה: בפרק 7 מוגדרות יריעות חלקות. שתי הקבוצות הנתונות בשאלה הן ישרים ובפרט הן יריעות חלקות חד-ממדיות. הקבוצות זרות (נקודה משותפת מעידה על תלות לינארית בניגוד לנתון). הן מרחבים אפיניים חד-ממדיים (דהיינו ישרים) ולכן הן קבוצות סגורות, ויש למרחק בין הקבוצות הסגורות האלה ערך מזערי (דבר שאינו נכון באופן כללי לכל שתי קבוצות סגורות). מכאן אפשר לטעון כמו בשאלה 7.ה.7 שהקטע שאורכו המרחק המזערי הזה הוא בהכרח מאונך לשני הישרים ומכאן למצוא כל מה שנדרש בשאלה זאת.

שאלה 7 (15 נקודות)

מצאו את כל נקודות הקיצון המקומי של הפונקציה $f: (x, y) \mapsto x^4 + y^4 + (x - y)^3$. לכל אחת מהנקודות שמצאתם, קבעו אם היא נקודת מינימום מקומי או נקודת מקסימום מקומי של f , וכן אם היא נקודת מינימום או נקודת מקסימום של f ב- $\mathbb{R}^2$.

פתרון

כפולינום הפונקציה גזירה ומתקיים: $\nabla f(x, y) = (4x^3 + 3(x - y)^2, 4y^3 - 3(x - y)^2)$

אם (x, y) נקודה קריטית של f אז מתקיים $\nabla f(x, y) = (0, 0)$ ולכן:

$$4y^3 = 3(x - y)^2 = -4x^3 \Rightarrow y^3 = -x^3 \Rightarrow y = -x$$

$$\Rightarrow 0 = 4x^3 + 3(x + x)^2 = 4x^3 + 12x^2 = 4x^2(x + 3) \Rightarrow x \in \{0, -3\}$$

ולכן הנקודות הקריטיות הן $(0, 0)$ ו- $(-3, 3)$.

לפי טענה 5.5 ב.5 מתקיים:

$$Hf_{(x,y)} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial y}(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12x^2 + 6(x - y) & -6(x - y) \\ -6(x - y) & 12y^2 + 6(x - y) \end{pmatrix}$$

אז $Hf_{(0,0)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ וזה לא נותן מידע אם $(0, 0)$ נקודת קיצון.

המטריצה $Hf_{(-3,3)} = 36 \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ היא מטריצה חיובית לחלוטין (למשל לפי טענה 14.6 ד.14) ולכן לפי

משפט 18.6 ד.18 הנקודה $(-3, 3)$ היא נקודת מינימום מקומי של f .

אבל שיקולים אלה למעשה מיותרים ואפשר להסתדר בלעדיהם:

מתקיים $f(t, -t) = t^4 + t^4 + (2t)^3 = 2t^3(t + 4)$ ולכן בכל סביבה של $(0, 0)$ יש נקודה $(t, -t)$ עם

$t > 0$ ועבורה $f(t) > 0 = f(0, 0)$, ולכן $(0, 0)$ אינה נקודת מקסימום מקומי. כמוכן יש בסביבה

נקודה כזאת עם $-4 < t < 0$ ועבורה $f(t, -t) < 0 = f(0, 0)$ ולכן $(0, 0)$ גם אינה נקודת מקסימום

מקומי. אז לפי אבחנה 3.6 ב.3, כיוון ש- $\mathbb{R}^2$ הוא סביבה של $(0, 0)$, היא גם אינה נקודת מינימום או

מקסימום ב- $\mathbb{R}^2$.

נראה עתה שיש ל- f נקודת מינימום ב- $\mathbb{R}^2$. מאחר ש- $\mathbb{R}^2$ פתוחה, לפי אבחנה 3.6 ב.3 זאת נקודת

מינימום מקומי, ולפי משפט 10.6 ב.10 היא נקודה קריטית. אז היא אחת מבין $(0, 0)$ ו- $(-3, 3)$. היא

אינה $(0, 0)$ שאינה נקודת קיצון מקומי, ולכן היא בהכרח $(-3, 3)$ ולכן בפרט $(-3, 3)$ היא נקודת

מינימום מקומי.

ובכן, נותר להראות שיש ל- f נקודת מינימום ב- $\mathbb{R}^2$.

נסמן: $g: (x, y) \mapsto x^4 + y^4$

$h: (x, y) \mapsto (x - y)^3$

אלה פונקציות פולינומיות ולכן רציפות, ולכן יש להן ערכים מזערי ומרבי בקבוצה הסגורה וחסומה $S((0, 0); 1)$ (מעגל היחידה).

תהי (a, b) נקודת המינימום של g במעגל היחידה. אז לכל (x, y) במעגל היחידה מתקיים

$$g(x, y) \geq g(a, b) = a^4 + b^4 > 0$$

יהי m הערך המרבי של הפונקציה הרציפה $x \mapsto |h(x)|$ במעגל היחידה. נשים לב ש- g פונקציה

$$g(tx, ty) = (tx)^4 + (ty)^4 = t^4(x^4 + y^4) = t^4 g(x, y) \quad \text{כי}$$

הומוגניות חיובית ממעלה 4, וכן h היא פונקציה הומוגנית חיובית ממעלה 3, כי:

$$h(tx, ty) = (tx - ty)^3 = (t(x - y))^3 = t^3(x - y)^3 = t^3 h(x, y)$$

לכל $u \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ נסמן $|u| = t$ ו- $v = \frac{1}{t}u$. אז $u = tv$ וכן $|v| = \left|\frac{1}{t}u\right| = \frac{1}{t}|u| = 1$ כלומר v במעגל

$$f(u) = f(tv) = g(tv) + h(tv) = t^4 g(v) + t^3 h(v) \quad \text{היחידה. אז:}$$

$$\geq t^4 g(v) - t^3 |h(v)| \geq t^4 (a^4 + b^4) - mt^3 = t^3 ((a^4 + b^4)t - m)$$

$$\text{אם } |u| = t > \frac{m}{a^4 + b^4} \text{ אז } f(u) > 0.$$

הקבוצה $K = \overline{B}\left((0, 0); \frac{m}{a^4 + b^4}\right)$ היא קבוצה סגורה וחסומה, והפונקציה הפולינומית f רציפה בכל

המישור ובפרט בקבוצה K . לפי משפט ויירשטראס יש ל- f ערך מזערי ב- K .

$$f(u) \geq f(p) \quad \text{תהי } p \in K \text{ נקודת מינימום של } f \text{ ב-} K. \text{ לכל } u \in \mathbb{R}^2 \text{ אם } u \in K \text{ אז}$$

$$f(u) > 0 = f(0, 0) \geq f(p) \quad \text{ואחרת } |u| > \frac{m}{a^4 + b^4} \text{ וכפי שראינו קודם:}$$

לכן לכל $u \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $f(u) \geq f(p)$ ומכאן ש- $f(p)$ הערך המזערי של f ב- $\mathbb{R}^2$ ו- p נקודת מינימום של f ב- $\mathbb{R}^2$.

כאמור קודם נובע מזה שהיא נקודה קריטית, ובהכרח $p = (-3, 3)$, והערך המזערי של f ב- $\mathbb{R}^2$

$$f(-3, 3) = (-3)^4 + 3^4 + (-3 - 3)^3 = 2 \cdot 3^4 - (2 \cdot 3)^3 = 2 \cdot 3^3 \cdot (3 - 2^2) = -2 \cdot 3^3 = -54 \quad \text{הוא:}$$