

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

סמסטר : 1א2025

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 1–2

מועד אחרון להגשה : 24.11.2024

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $r > 0$ ותהי $a \in \mathbb{R}^k$. תהי $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה אפינית שמקיימת: $\varphi(B(0^{[k]}; 1)) = B(a; r)$. הוכיחו ש- $\varphi(S(0^{[k]}; 1)) = S(a; r)$.

שאלה 2 (15 נקודות)

הוכיחו או הפריכו: אם A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$ אז $\partial(A \setminus \partial A) \subseteq \partial A$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה עולה במובן הרחב, דהיינו אם $x < y$ אז $f(x) \leq f(y)$. הוכיחו כי הקבוצה $U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > f(x)\}$ היא קבוצה פתוחה אם ורק אם לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהי $\alpha > 0$. האם קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i|\right)^\alpha}$?

שאלה 5 (30 נקודות)

- א. הראו שהקבוצה $S = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ היא משטח.
- הערה: למעשה אפשר להוכיח ש- S היא טלאי דרממדי. שימוש בשיעורים קוטביים או גליליים יכול להועיל.
- ב. הראו שלכל $r \in (0, 1]$ הקבוצה $S \cap B((0, 0, 0); r)$ אינה קשורה-מסילתית ואילו הקבוצה $S \cap B((0, 0, 0); r) \cup \{(0, 0, 0)\}$ קשורה-מסילתית.
- ג. הראו שהקבוצה $S \cup \{(0, 0, 0)\}$ אינה משטח.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 185\2024\1.

נסמן $b = -\varphi(0^{[k]})$ ו- $\tau_b : x \mapsto x + b$ כמו בהגדרה 2.ב.1. לפי שאלה 18.ב.1 ההרכבה

$\tau_b \circ \varphi$ היא פונקציה אפינית ומתקיים

$$\tau_b \circ \varphi(0^{[k]}) = \tau_b(\varphi(0^{[k]})) = \tau_b(-b) = -b + b = 0^{[k]}$$

ולפי שאלה 15.ב.1 $\tau_b \circ \varphi$ היא פונקציה לינארית.

$$\tau_b \circ \varphi(B(0^{[k]}; 1)) = \tau_b(\varphi(B(0^{[k]}; 1))) = \tau_b(B(a; r)) = B(a + b; r) \quad \text{כמוכן:}$$

הכדור $B(a + b; r)$ אינו מוכל בשום תת־מרחב לינארי ממימד $k - 1$ (למשל כי תת־

מרחב כזה הוא קבוצה צנומה והכדור אינו קבוצה צנומה, אבל יש גם דרכים

אלמנטריות יותר להסיק זאת. בכלים של פרק 2 למשל כי במרחב אפיני שאינו כל

המרחב האוקלידי אין נקודה פנימית). לכן הוא מכיל k וקטורים בלתי־תלויים

לינארית, ולכן $\tau_b \circ \varphi$ היא פונקציה לינארית הפיכה, ולכן φ היא פונקציה אפינית

הפיכה. בפרט φ וגם φ^{-1} הן פונקציות רציפות. אם $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ו- $B = \varphi(A)$ אז גם

$$A = \varphi^{-1}(B) \quad \text{מטענה 19.ד.2 עבור הפונקציה } \varphi \text{ מקבלים } \partial A = \partial \varphi^{-1}(B) \subseteq \varphi^{-1}(\partial B)$$

ולכן $\varphi(\partial A) \subseteq \partial B$. מטענה 19.ד.2 עבור הפונקציה φ^{-1} מקבלים

$$\partial B = \partial \varphi(A) \subseteq \varphi(\partial A) \quad \text{ולכן } \partial B = \partial \varphi(A) \text{ ולכן } \varphi(\partial A) = \partial B$$

בפרט עבור $A = B(0^{[k]}; 1)$ נקבל $A = B(a; r)$ ולפי שאלה 7.א.2 $\partial A = S(0^{[k]}; 1)$ וכן

$$\partial B = S(a; r) \quad \text{ולכן המבוקש הוכח.}$$

(את הפיכות φ אפשר לקבל גם בצורות אחרות, למשל מהצגה שלה בתור כפל

במטריצה ועוד וקטור הזזה אפשר לקבל שהמטריצה הפיכה. או מ־

$$\text{vol}_k \varphi(A) = |\det J\varphi| \cdot \text{vol}_k A \quad \text{מה שלא ברור מאליו וטעות להסתמך עליו בלי הוכחה}$$

$$\text{זה ש- } \varphi(0^{[k]}) = a$$

לשאלה 2: 198\2024\1. 11\11\2010\1. הטענה נכונה.

לוי הייתה הטענה לא נכונה הייתה קבוצה A והיה $a \in \partial(A \setminus \partial A)$ כך ש- $a \notin \partial A$. מכך

ש- $a \notin \partial A$ יש כדור $B(a; r)$ שמוכל ב־ A או זר ל־ A . מכך ש- $a \in \partial(A \setminus \partial A)$ נובע שיש

איבר משותף לכדור ול־ $A \setminus \partial A$. בפרט $A \cap B(a; r) \neq \emptyset$ ולכן בהכרח $B(a; r) \subseteq A$. אז

a נקודה פנימית של A , ולכן $a \in A \setminus \partial A$. אבל a היא גם נקודת שפה של $A \setminus \partial A$, ולכן

$A \setminus \partial A$ אינה קבוצה פתוחה, בניגוד לחלק א של שאלה 28.א.2.

לשאלה 3: 2014\2011. אם הקבוצה פתוחה, אז עבור $a \in \mathbf{R}$ ו- $\varepsilon > 0$ מתקיים $(a, f(a) + \varepsilon) \in U$

ולכן יש כדור $B((a, f(a) + \varepsilon); \delta) \subseteq U$.

אם $x \in (a, a + \delta)$ אז $(x, f(a) + \varepsilon) \in B((a, f(a) + \varepsilon); \delta)$ ולכן $(x, f(a) + \varepsilon) \in U$

ומכאן $f(a) + \varepsilon > f(x)$. כמוכן מכך ש- f עולה במובן הרחב נובע

$f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$ לכן $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ ולכן $f(x) \geq f(a) > f(a) - \varepsilon$.

להפך, נניח שלכל $a \in \mathbf{R}$ מתקיים $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$. תהי $(a, b) \in U$. אז

$b > f(a)$ ולכן $\varepsilon = \frac{b - f(a)}{2} > 0$. מתקיים $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$ ולכן יש $\delta > 0$ כך

שלכל $x \in (a, a + \delta)$ מתקיים $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, ובפרט:

$$f(x) < f(a) + \varepsilon = f(a) + \frac{b - f(a)}{2} = \frac{b + f(a)}{2} = b + \frac{f(a) - b}{2} = b - \varepsilon$$

נסמן $r = \min\{\delta, \varepsilon\}$. נוכיח ש- $B((a, b); r) \subseteq U$, וזה יראה שכל נקודה ב- U היא

נקודה פנימית של U , כלומר U היא קבוצה פתוחה.

ובכן יהי $(x, y) \in B((a, b); r)$. אז

ולכן $y - b > -\varepsilon$ ומכאן (בעזרת מה שחישבנו קודם):

כמוכן

כלומר $x \in (a - \delta, a + \delta)$. אם $x \in (a, a + \delta)$ אז $f(x) < b - \varepsilon < y$ ולכן $(x, y) \in U$.

אחרת $x \leq a$ ולכן $f(x) \leq f(a) < f(a) + \varepsilon < y$ ושוב $(x, y) \in U$.

הוכחנו שאם $(x, y) \in B((a, b); r)$ אז $(x, y) \in U$ ולכן $B((a, b); r) \subseteq U$.

לשאלה 4: לפי אישוויון המשולש:

$$|x| = \left| \sum_{i=1}^k x_i e_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |x_i e_i| = \sum_{i=1}^k |x_i| \cdot |e_i| = \sum_{i=1}^k |x_i|$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i| \right)^\alpha} \leq \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{|x|^\alpha} = \frac{\left(e^{-\frac{1}{\alpha|x|}} \right)^\alpha}{|x|^\alpha} = \left(\frac{e^{-\frac{1}{\alpha|x|}}}{|x|} \right)^\alpha = \varphi\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha$$

עם: $f: t \mapsto t e^{-\frac{1}{\alpha}t}$

בעזרת כלל לופיטל: $\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\frac{1}{\alpha}t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha}t}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha e^{-\frac{1}{\alpha}t} = \alpha \cdot 0 = 0$

נגדיר $g(t) = \varphi\left(\frac{1}{|t|}\right)$ לכל $t \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ וכן $g(0) = 0$. אז $g(t) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = g(0)$

כלומר g רציפה ב-0. הפונקציות $f: t \mapsto |t|^\alpha$ ו- $h: x \mapsto |x|$ הן פונקציות יסודיות לכן

רציפות בתחום הגדרתן. מקבלים ש- $f \circ g \circ h$ רציפה ב- $0^{[k]}$. לכל $x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$

$$f \circ g \circ h(x) = \varphi\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha \quad \text{מתקיים:}$$

$$\varphi\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha = f \circ g \circ h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^{[k]}} f \circ g \circ h(0) = 0 \quad \text{לכן:}$$

$$0 \leq \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i|\right)^\alpha} \leq \varphi\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha \quad \text{לבסוף כפי שראינו}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i|\right)^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0^{[k]}} 0 \quad \text{ולכן מכלל הכריך:}$$

לשאלה 5: ויזואליזציה: <https://www.desmos.com/3d/6sisthwd9e>

אם $(x, y, z) \in S$ אז $(x, y) \neq (0, 0)$ כי אחרת $z^4 = 0$ ואז $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. לכן כמו

שמתואר בדוגמה 5.1.1, הקבוצה S מוכלת בתחום בו נקבעים השיעורים הקוטביים

ביחידות. נרשום אפוא $(x, y, z) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$ עם $r \in (0, \infty)$,

$$x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \sin^2 \phi \quad \text{מתקיים } \theta \in [0, 2\pi) \text{ ו- } \phi \in (0, \pi)$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi = r^2 \quad \text{וכן}$$

$$(r^2)^2 = r^2 \sin^2 \phi \quad \text{ולכן נקודה זאת נמצאת ב- } S \text{ אם ורק אם}$$

$$\text{ובאופן שקול } r^2 = \sin^2 \phi \text{ או } r = \sin \phi \text{ (עבור } \phi \in (0, \pi) \text{ מתקיים } \sin \phi > 0).$$

קיבלנו שיש פונקציה הפיכה $S \rightarrow (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ שמוגדרת כך:

$$(\phi, \theta) \mapsto (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$$

אבל תחום הפונקציה הזאת אינו קבוצה פתוחה, ולכן הפונקציה אינה מעידה על-כך

שמונתה היא טלאי. אם נצמצם את התחום ל- $\Omega_1 = (0, \pi) \times (0, 2\pi)$ אז $h(\Omega_1)$ היא

$$U_1 = \mathbf{R}^3 \setminus ([0, \infty) \times \{0\} \times \mathbf{R}) \quad \text{טלאי ששווה ל- } S \cap U_1 \text{ כאשר}$$

היא קבוצה פתוחה. טיעון דומה שבו מגבילים את השיעור הקוטבי θ לקטע $(-\pi, \pi)$

$$\text{ומגדירים } \Omega_2 = (0, \pi) \times (-\pi, \pi) \text{ ו- } U_2 = \mathbf{R}^3 \setminus ((-\infty, 0] \times \{0\} \times \mathbf{R}) \text{ מראה שהקבוצה}$$

$$S \cap U_2 \text{ היא טלאי, וכיוון ש- } U_1 \cup U_2 = \mathbf{R}^3 \text{ הגדרה 7.1.2 מראה ש- } S \text{ היא יריעה. אבל}$$

אפשר להראות יותר מזה: היא טלאי. נוכל לקבל זאת למשל אם נשים לב שההתאמה

$$(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$$

$$\text{של שיעורים קוטביים במישור מגדירה פונקציה הפיכה } (0, \pi) \times [0, 2\pi) \rightarrow \Omega = B((0, 0); \pi) \setminus \{(0, 0)\}$$

ההופכית של ההתאמה זאת תיתן פונקציה הפיכה $h: \Omega \rightarrow S$. כדי להראות שהקבוצה

S היא טלאי נראה שהפונקציה הזאת היא הומאומורפיזם מ- Ω ל- S . זה לא ברור מאליו, כי היא התקבלה מהרכבה של שתי פונקציות שאחת מהן אינה רציפה (הפונקציה שלכל נקודה במישור מתאימה את שיעוריה הקוטביים אינה רציפה בחלק החיובי של ציר- x). ובכן: הפונקציה h מוגדרת על ידי

$$h: \phi(\cos \theta, \sin \theta) \mapsto (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$$

לכל $x \in B((0,0);\pi) \setminus \{(0,0)\}$ יש (ראו דוגמה 4.1.1) $(\phi, \theta) \in (0,\pi) \times [0,2\pi)$ שנקבעים באופן יחיד, ומתקיים $\phi = |x|$ וכן $x = \phi(\cos \theta, \sin \theta)$ ולכן $(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{|x|}x$.

$$\begin{aligned} h(x) &= h(\phi(\cos \theta, \sin \theta)) = (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi) \\ &= (\sin^2 \phi(\cos \theta, \sin \theta), \sin \phi \cos \phi) = \left(\frac{\sin^2 |x|}{|x|}x, \sin |x| \cos |x| \right) \end{aligned} \quad \text{לכן:}$$

(שימו לב שהזוגות הרשומים הם איברים של $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ המזוהה עם שלושת ב- $\mathbb{R}^3$, שהן כולן איברים של הקבוצה S). קיבלנו אפוא כי h היא הצמצום של פונקציה יסודית לקבוצה הפתוחה $\Omega = B((0,0);\pi) \setminus \{(0,0)\}$, ולכן היא רציפה ב- Ω . יותר מכך:

הפונקציה היסודית $x \mapsto \left(\frac{\sin^2 |x|}{|x|}x, \sin |x| \cos |x| \right)$ מוגדרת ולכן רציפה ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

נגדיר פונקציה $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ על ידי $f(x) = \left(\frac{\sin^2 |x|}{|x|}x, \sin |x| \cos |x| \right)$ אם $x \neq (0,0)$ וכן $f(0,0) = (0,0,0)$. הפונקציה הזאת רציפה כאמור ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, והיא רציפה גם ב- $(0,0)$: הרכיב השלישי $[f]_3: x \mapsto \sin |x| \cos |x|$ הוא פונקציה יסודית שמוגדרת ולכן רציפה במישור כולו. נתבונן באיסוף של שני הרכיבים הראשונים.

עבור $x \neq 0$ $x \mapsto \frac{\sin^2 |x|}{|x|}x$ $([f]_1, [f]_2): x \mapsto \frac{\sin^2 |x|}{|x|}x$ הוא מכפלה של הפונקציה $x \mapsto \sin^2 |x|$ שהיא רציפה בראשית ושואפת ל- $\sin^2 0 = 0$ כאשר $x \rightarrow (0,0)$ בפונקציה החסומה $x \mapsto \frac{1}{|x|}x$.

ולכן $([f]_1, [f]_2)$ שואפת ל- $(0,0)$ כאשר $x \rightarrow (0,0)$, וכיוון שזה גם ערכה בראשית היא רציפה בראשית. היא גם יסודית ולכן רציפה ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, ולכן היא רציפה ב- $\mathbb{R}^2$. אם כך, כל שלושת רכיבי f רציפים ב- $\mathbb{R}^2$, ולכן f רציפה ב- $\mathbb{R}^2$. כאמור h היא הצמצום של f לקבוצה הפתוחה Ω , והיא חד-חד-ערכית. עכשיו הייתי רוצה להסיק בעזרת טענה 5.1.2 ש- $h = f|_{\Omega}$ היא הומאומורפיזם. ברם, כל קבוצה סגורה K אשר

מכילה את Ω מכילה גם את הכדור הסגור $\bar{B}((0,0);\pi)$ ו- f אינה חד-חד-ערכית בקבוצה זאת כיוון שערכה על כל הנקודות של הספירה $S((0,0);\pi)$ הוא $(0,0,0)$. מה עושים? אפשר למשל כך: נקח נקודה $\omega \in \Omega$. אז $|\omega| < \pi$ ולכן יש $\varepsilon \in (0,\pi)$ כך ש- $\omega \in B((0,0);\varepsilon)$. הכדור $B((0,0);\varepsilon)$ הוא כדור פתוח ולכן מכיל סביבה של ω .

הצמצום של f לכדור הסגור $K = \bar{B}((0,0); \varepsilon)$ הוא פונקציה רציפה וחד-חד ערכית,

ולכן ההופכית שלה רציפה ב- $f(K)$ לפי החלק השני של טענה 29.ד.2, ובפרט היא

רציפה ב- $f(\omega) = h(\omega)$, ובפרט ההופכית של h רציפה ב- $h(\omega)$ לכל $\omega \in \Omega$. אז

ההופכית של h רציפה ב- $h(\Omega)$ ולכן h היא הומאומורפיזם מ- Ω ל- S , ולכן $S = h(\Omega)$ היא טלאי.

סעיף ב: נתבונן למשל בנקודות $\left(\frac{1}{2}r, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}r^2(1-\frac{1}{2}r^2)}\right)$ הן ב- $B((0,0,0); r)$ כי:

$$\left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + 0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}r^2(1-\frac{1}{2}r^2)}^2 = \left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + \frac{1}{2}r^2 - \left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 = \frac{1}{2}r^2 < r^2$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + 0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}r^2(1-\frac{1}{2}r^2)}^2\right)^2 = \left(\left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + \frac{1}{2}r^2 - \left(\frac{1}{2}r^2\right)^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + 0^2$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + 0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}r^2(1-\frac{1}{2}r^2)}^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + 0^2 \quad \text{כמוכן הן ב-} S \text{ כי:}$$

נניח בשלילה ש- $S \cap B((0,0,0); r)$ קשורה מסילתית. אז יש מסילה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^3$

שתמונתה מוכלת ב- $B((0,0,0); r)$ ושי קצותיה הן הנקודות דלעיל. בפרט הרכיב

השלישי של φ הוא פונקציה רציפה בקטע $[\alpha, \beta]$ שבאחד מקצותיו ערכה חיובי

ובקצה האחר ערכה שלילי. לכן, לפי משפט ערך הביניים, יש $\gamma \in (\alpha, \beta)$ כך ש-

$$[\varphi(\gamma)]_3 = 0. \quad \text{בפרט יש נקודה } (x, y, 0) \in S \cap B((0,0,0); r). \text{ מכך שנקודה זאת ב-} S$$

$$\text{נובע שמתקיים } 1 = x^2 + y^2 + 0^2 < r^2 \text{ ולכן } x^2 + y^2 = 1, \text{ אבל אז}$$

$$1 = x^2 + y^2 + 0^2 < r^2 \text{ בסתירה לנתון } r \leq 1. \text{ לכן בניגוד להנחת השלילה הקבוצה}$$

$$S \cap B((0,0,0); r) \text{ אינה קשורה מסילתית.}$$

כדי להראות שהקבוצה $S \cap B((0,0,0); r) \cup \{(0,0,0)\}$ קשורה מסילתית די להראות

לכל $(x, y, z) \in S \cap B((0,0,0); r)$ מסילה שתמונתה ב- $S \cap B((0,0,0); r) \cup \{(0,0,0)\}$

וקצותיה הנקודות $(0,0,0)$ ו- (x, y, z) . נעזר בהצגה הקוטבית של נקודות S שמצאנו

בפתרון סעיף א. ראינו קודם פונקציה חד-חד ערכית f מ- $B((0,0); \pi)$ על

$$S \cup \{(0,0,0)\} \text{ מתקיים } f(x) \in S \cap B((0,0,0); r) \cup \{(0,0,0)\}$$

אם ורק אם $|f(x)| < r$. כעת:

$$|f(x)| = \left| \left(\frac{\sin^2|x|}{|x|} x, \sin|x| \cos|x| \right) \right| = \sqrt{\sin^4|x| + \sin^2|x| \cos^2|x|} = \sqrt{\sin^2|x|} = \sin|x|$$

אם $f(x) \in S \cap B((0,0,0); r)$ ו- $[f(x)]_3 > 0$ אז $\cos|x| > 0$ ולכן $|x| \in (0, \frac{\pi}{2})$. אז לכל

$t \in [0,1]$ מתקיים $|tx| = t|x| \leq |x| < \frac{\pi}{2}$ ולכן $\sin|tx| \leq \sin|x| < r$.

אז $f(tx) \in S \cap B((0,0,0);r)$ ותמונת המסילה $\varphi: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ שמוגדרת עלידי

$\varphi: t \mapsto f(tx)$ מוכלת ב- $S \cap B((0,0,0);r) \cup \{(0,0,0)\}$, וקצותיה הם

$\varphi(0) = f(0,0) = (0,0,0)$ ו- $\varphi(1) = f(x)$. זה משלים את הוכחת הקשירות

המסילתית של $S \cap B((0,0,0);r) \cup \{(0,0,0)\}$.

בסעיף ג נניח בשלילה ש- $S' = S \cup \{(0,0,0)\}$ היא משטח, וננסה לקבל סתירה בעזרת

סעיף ב. מהנחת השלילה נובע שיש קבוצה פתוחה U שמכילה את $(0,0,0)$ כך ש-

$S' \cap U$ היא טלאי דו־ממדי. אז יש הומאומורפיזם $h: \Omega \rightarrow S' \cap U$ ו- Ω היא קבוצה

פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$. נסמן ב- α את האיבר של Ω עבורו $h(\alpha) = (0,0,0)$. U סביבה פתוחה

של $(0,0,0)$, לכן יש כדור $B((0,0,0);r)$ שמוכל ב- U . יש כדור כזה עבורו $r \leq 1$.

$h^{-1}(B((0,0,0);r))$ היא קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$ שמכילה את α ומוכלת ב- Ω , ותמונתה

על ידי h היא $S' \cap B((0,0,0);r)$. אז ללא הגבלת הכלליות אפשר להניח ש-

$U = B((0,0,0);r)$. לפי סעיף ב $S' \cap U$ קשורה־מסילתית ואילו $S \cap U$ אינה קשורה־

מסילתית. Ω היא תמונת $S' \cap U$ עלידי הפונקציה הרציפה h^{-1} ולכן לפי טענה 2.ט.2

Ω קשורה־מסילתית. לעומת זאת $\Omega \setminus \{\alpha\}$ אינה קשורה־מסילתית כי אחרת תמונתה

על ידי h היא $S \cap U$ שהיא $h(\Omega \setminus \{\alpha\}) = S' \cap U \setminus \{(0,0,0)\} = S \cap U$ קשורה־מסילתית, וידוע

שהיא אינה כזאת. קיבלנו אם כן ש- Ω היא סביבה פתוחה של α ב- $\mathbb{R}^2$ שהיא קשורה־

מסילתית ואילו $\Omega \setminus \{\alpha\}$ אינה קשורה מסילתית. דבר זה אינו ייתכן. מדוע? ובכן: Ω

מכילה עיגול $B(\alpha; \delta)$. תהיינה β ו- γ נקודות ב- $\Omega \setminus \{\alpha\}$ שאין קו שבור ביניהן ששוכן

ב- $\Omega \setminus \{\alpha\}$. לפי טענה 2.ט.16 Ω קשורה־מצולעית. אז יש ביניהן קו שבור ששוכן ב- Ω .

נניח גם מספר קטעיו מינימלי. בפרט נובע מכך שאין נקודות משותפות לשני קטעים

של הקו שאינם עוקבים. אין קו שבור בין שתי הנקודות β ו- γ ששוכן ב- $\Omega \setminus \{\alpha\}$ ולכן

הנקודה α נמצאת על אחד הקטעים בקו השבור או שהיא קצה משותף לשניים מהם.

לפחות חלק של אותו קטע או שני קטעים של הקו נמצא בעיגול $B(\alpha; \delta)$. העיגול

הנקוב $B(\alpha; \delta) \setminus \{\alpha\}$ גם הוא קשור מצולעית, ולכן נוכל להחליף את החלקים האלה

של הקו השבור בקטעים אחרים שנמצאים בתוך העיגול הנקוב, ולקבל קו שבור בין β

ו- γ ששוכן ב- $\Omega \setminus \{\alpha\}$, בסתירה לכך שאין קו שבור כזה. הסתירה מראה שהנחת

השלילה אינה נכונה, דהיינו S' אינו משטח.