

מתווה לפתרון ממ"ן 11

סמסטר : 2025

הקורס : 2024 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 1–2

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $r > 0$ ותהי $a \in \mathbb{R}^k$. תהי $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה אפינית שמקיימת: $\varphi(B(0^{[k]}; 1)) = B(a; r)$. הוכיחו ש- $\varphi(S(0^{[k]}; 1)) = S(a; r)$.

פתרון

נסמן $b = -\varphi(0^{[k]})$.¹ כמו בהגדרה 2.ב.1 נסמן $\tau_b: x \mapsto x + b$. לפי שאלה 18.ב.1 ההרכבה $\tau_b \circ \varphi$ היא פונקציה אפינית ומתקיים: $\tau_b \circ \varphi(0^{[k]}) = \tau_b(\varphi(0^{[k]})) = \tau_b(-b) = -b + b = 0^{[k]}$. לפי שאלה 15.ב.1 $\tau_b \circ \varphi$ היא פונקציה לינארית.

כמוכן: $\tau_b \circ \varphi(B(0^{[k]}; 1)) = \tau_b(\varphi(B(0^{[k]}; 1))) = \tau_b(B(a; r)) = B(a + b; r)$.

תמונת הפונקציה הלינארית $\tau_b \circ \varphi$ היא תת-מרחב לינארי V של המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^k$.

מתקיים $B(a + b; r) \subseteq V$ ובפרט $a + b \in V$.

לכל וקטור $v \in \mathbb{R}^k$ מתקיים $a + b + \frac{r}{2|v|}v \in B(a + b; r)$

ולכן $a + b + \frac{r}{2|v|}v \in V$. אז $v = \frac{2|v|}{r} \left(\left(a + b + \frac{r}{2|v|}v \right) - (a + b) \right) \in V$

ולכן $V = \mathbb{R}^k$, כלומר הפונקציה הלינארית $\tau_b \circ \varphi$ היא על, ולכן היא פונקציה לינארית הפיכה.²

לכן $\varphi = \tau_{-b} \circ (\tau_b \circ \varphi)$ היא פונקציה אפינית הפיכה. בפרט φ וגם φ^{-1} הן פונקציות רציפות.

אם $A \subseteq \mathbb{R}^k$ ו- $B = \varphi(A)$ אז גם $A = \varphi^{-1}(B)$. מטענה 19.ד.2 עבור הפונקציה φ מקבלים

$\varphi(\partial A) \subseteq \partial B$ ולכן $\partial A = \partial \varphi^{-1}(B) \subseteq \varphi^{-1}(\partial B)$ מטענה 19.ד.2 עבור הפונקציה φ^{-1} מקבלים

$\varphi(\partial A) = \partial B$ ולכן $\partial B = \partial \varphi(A) \subseteq \varphi(\partial A)$.

בפרט עבור $A = B(0^{[k]}; 1)$ נקבל $B = B(a; r)$ ולפי שאלה 7.א.2 $\partial A = S(0^{[k]}; 1)$ וכן $\partial B = S(a; r)$

ולכן $\varphi(S(0^{[k]}; 1)) = S(a; r)$ והמבוקש בשאלה הוכח.

¹ אפשר להוכיח ש- $\varphi(0^{[k]}) = a$, אך לא נוכיח כאן עובדה זאת ולכן גם לא נסתמך עליה.

² למעשה מוכח כאן שתת-מרחב לינארי שמכיל כדור הוא כל המרחב האוקלידי, ובאופן שקול: לתת-מרחב לינארי שאינו המרחב כולו אין נקודה פנימית. גם לתת-מרחב אפיני שאינו המרחב כולו אין נקודה פנימית. יש דרכים רבות להוכיח עובדה זאת.

שאלה 2 (15 נקודות)

הוכיחו או הפריכו: אם A קבוצה ב- $\mathbf{R}^k$ אז $\partial(A \setminus \partial A) \subseteq \partial A$.

פתרון

הטענה נכונה.

לו הייתה הטענה לא נכונה הייתה קבוצה A והיה $a \in \partial(A \setminus \partial A)$ כך ש- $a \notin \partial A$. מכך ש- $a \notin \partial A$ יש כדור $B(a; r)$ שמוכל ב- A או זר ל- A . מכך ש- $a \in \partial(A \setminus \partial A)$ נובע שיש איבר משותף לכדור הזה ול- $A \setminus \partial A$. כלומר הכדור אינו זר ל- A ולכן הוא מוכל ב- A , כלומר $B(a; r) \subseteq A$. אז a נקודה פנימית של A , ולכן $a \in A \setminus \partial A$. אבל a היא גם נקודת שפה של $A \setminus \partial A$, ולכן $A \setminus \partial A$ אינה קבוצה פתוחה, בניגוד לחלק א של שאלה 2.א.28.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה עולה במובן הרחב, דהיינו אם $x < y$ אז $f(x) \leq f(y)$.

הוכיחו כי הקבוצה $U = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid y > f(x)\}$ היא קבוצה פתוחה אם ורק אם לכל $a \in \mathbf{R}$

מתקיים $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$.

פתרון

נניח שהקבוצה U פתוחה ונוכיח ש- $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$.

עבור $a \in \mathbf{R}$ ו- $\varepsilon > 0$ מתקיים $(a, f(a) + \varepsilon) \in U$ ולכן יש כדור עבורו: $B((a, f(a) + \varepsilon); \delta) \subseteq U$

אם $x \in (a, a + \delta)$ אז $(x, f(a) + \varepsilon) \in B((a, f(a) + \varepsilon); \delta)$ ולכן $(x, f(a) + \varepsilon) \in U$ ומכאן:

$$f(a) + \varepsilon > f(x)$$

כמוכן מכך ש- f עולה במובן הרחב נובע $f(x) \geq f(a) > f(a) - \varepsilon$ ולכן $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

ראינו שלכל $\varepsilon > 0$ יש $\delta > 0$ כך שאם $x \in (a, a + \delta)$ אז $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

לכן $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$.

להפך, נניח שלכל $a \in \mathbf{R}$ מתקיים $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$ ונוכיח ש- U קבוצה פתוחה.

תהי $(a, b) \in U$. אז $b > f(a)$ ולכן $\varepsilon = \frac{b - f(a)}{2} > 0$ מתקיים $f(x) \xrightarrow{x \rightarrow a^+} f(a)$

ולכן יש $\delta > 0$ כך שלכל $x \in (a, a + \delta)$ מתקיים $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

$$f(x) < f(a) + \varepsilon = f(a) + \frac{b - f(a)}{2} = \frac{b + f(a)}{2} = b + \frac{f(a) - b}{2} = b - \varepsilon$$

בפרט:

נסמן $r = \min\{\delta, \varepsilon\}$. נוכיח ש- $B((a, b); r) \subseteq U$, וזה יראה שכל נקודה ב- U היא נקודה פנימית

של U , כלומר U היא קבוצה פתוחה.

ובכן יהי $(x, y) \in B((a, b); r)$ אז

$$|y - b| \leq |(x, y) - (a, b)| < r \leq \varepsilon$$

ולכן $y - b > -\varepsilon$ ומכאן (בעזרת מה שחישבנו קודם):

$$y > b - \varepsilon = f(a) + \varepsilon$$

כמוכן

$$|x - a| \leq |(x, y) - (a, b)| < r \leq \delta$$

כלומר $x \in (a - \delta, a + \delta)$ אם $x \in (a, a + \delta)$ אז $f(x) < b - \varepsilon < y$ ולכן $(x, y) \in U$.

אחרת $x \leq a$ ולכן $f(x) \leq f(a) < f(a) + \varepsilon < y$ ושוב $(x, y) \in U$.

הוכחנו שאם $(x, y) \in B((a, b); r)$ אז $(x, y) \in U$ ולכן $B((a, b); r) \subseteq U$.

שאלה 4 (15 נקודות)

יהי $\alpha > 0$. האם קיים הגבול $\lim_{x \rightarrow 0^{[k]}} \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i|\right)^\alpha}$?

פתרון

אנו מסמנים $x = (x_1, \dots, x_k)$ וכן מסמנים ב- $e_1, \dots, e_k$ את וקטורי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbf{R}^k$.

$$|x| = \left| \sum_{i=1}^k x_i e_i \right| \leq \sum_{i=1}^k |x_i e_i| = \sum_{i=1}^k |x_i| \cdot |e_i| = \sum_{i=1}^k |x_i| \quad \text{אז } x = \sum_{i=1}^k x_i e_i \text{ ולפי אישוויון המשולש:}$$

$$0 \leq \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i|\right)^\alpha} \leq \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{|x|^\alpha} = \frac{\left(e^{-\frac{1}{\alpha|x|}}\right)^\alpha}{|x|^\alpha} = \left(\frac{e^{-\frac{1}{\alpha|x|}}}{|x|}\right)^\alpha = \varphi\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha \quad \text{לכן}$$

$$\varphi: t \mapsto t e^{-\frac{1}{\alpha t}} \quad \text{עם:}$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{\frac{1}{\alpha t}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{\frac{1}{\alpha} e^{\frac{1}{\alpha t}}} = \lim_{t \rightarrow \infty} \alpha e^{-\frac{1}{\alpha t}} = \alpha \cdot 0 = 0 \quad \text{בעזרת כלל לופיטל:}$$

$$\text{נגדיר } g(t) = \varphi\left(\frac{1}{|t|}\right) \text{ לכל } t \in \mathbf{R} \setminus \{0\} \text{ וכן } g(0) = 0. \text{ אז } g(t) = \varphi\left(\frac{1}{|t|}\right) \xrightarrow{t \rightarrow 0} 0 = g(0) \text{ כלומר } g \text{ רציפה ב-} 0.$$

רציפה ב- 0 . הפונקציות $f: t \mapsto |t|^\alpha$ ו- $h: x \mapsto |x|$ הן פונקציות יסודיות ולכן הן רציפות בתחום

הגדרתן. לפי משפט 7.ה.2 הפונקציה $f \circ g \circ h$ רציפה ב- $0^{[k]}$. לכל $x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ מתקיים:

$$f \circ g \circ h(x) = \varphi\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha$$

$$\varphi\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha = f \circ g \circ h(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0^{[k]}} f \circ g \circ h(0) = 0 \quad \text{לכן:}$$

$$0 \leq \frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i|\right)^\alpha} \leq \varphi\left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha \quad \text{לבסוף כפי שראינו}$$

$$\frac{e^{-\frac{1}{|x|}}}{\left(\sum_{i=1}^k |x_i|\right)^\alpha} \xrightarrow{x \rightarrow 0^{[k]}} 0 \quad \text{ולכן מכלל הכריך:}$$

שאלה 5 (30 נקודות)

א. הראו שהקבוצה $S = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2 + z^2)^2 = x^2 + y^2\} \setminus \{(0, 0, 0)\}$ היא משטח.

הערה: למעשה אפשר להוכיח ש- S היא טלאי דרממדי. שימוש בשיעורים קוטביים או גליליים יכול להועיל.

ב. הראו שלכל $r \in (0, 1]$ הקבוצה $S \cap B((0, 0, 0); r)$ אינה קשורה מסילתית ואילו הקבוצה

$S \cap B((0, 0, 0); r) \cup \{(0, 0, 0)\}$ קשורה מסילתית.

ג. הראו שהקבוצה $S \cup \{(0, 0, 0)\}$ אינה משטח.

פתרון

לפני פתרון כל סעיף וסעיף של השאלה, נתחיל בהבנת המצב המתואר בה. הדגמה ויזואלית של הקבוצות בשאלה זאת אפשר לראות בקישור: <https://www.desmos.com/3d/6sisthwd9e>

אם $(x, y, z) \in S$ אז $(x, y) \neq (0, 0)$ כי אחרת $z^4 = (0^2 + 0^2 + z^2)^2 = 0^2 + 0^2 = 0$

ולכן $z = 0$ ו- $(x, y, z) = (0, 0, 0)$. לכן כמו שמתואר בדוגמה 5.1.1, הקבוצה S מוכלת בתחום בו נקבעים השיעורים הקוטביים ביחידות. נרשום אפוא $(x, y, z) = (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)$ עם $\theta \in [0, 2\pi)$ ו- $\phi \in (0, \pi)$, $r \in (0, \infty)$.

מתקיים $x^2 + y^2 = r^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r^2 \sin^2 \phi$

וכן $x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi = r^2$

ולכן נקודה זאת נמצאת ב- S אם ורק אם $(r^2)^2 = r^2 \sin^2 \phi$

ובאופן שקול $r^2 = \sin^2 \phi$ או $r = \sin \phi$ (עבור $\phi \in (0, \pi)$ מתקיים $\sin \phi > 0$).

לכן: $(x, y, z) = (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$

קיבלנו שיש פונקציה הפיכה $S \rightarrow (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ שמוגדרת כך:

$(\phi, \theta) \mapsto (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$

אבל תחום הפונקציה הזאת אינו קבוצה פתוחה, ולכן הפונקציה אינה מעידה עליה שיתמונתה היא טלאי.

בטרם נמשיך נשים לב גם שמאחר ש- $r = \sin \phi \leq 1$ מתקיים $S \subseteq \overline{B}(0^{[3]}; 1)$ ובפרט S חסומה.

עוד דבר שימושי: במקום הקטע $[0, 2\pi)$ אפשר לקחת כל קטע אחר שאורכו 2π וכולל בדיוק

אחד משני קצותיו: אם J הוא קטע כזה, אז כל הטענות בסעיף 1.1 נשארות נכונות כאשר

מחליפים את הקטע $[0, 2\pi)$ בקטע J ומחליפים את האישויונות מהצורה $0 \leq \theta < 2\pi$ או

$0 \leq \theta_1 < 2\pi$ באישויונות המתאימים לקצות הקטע J .

נסמן: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$

$(\phi, \theta) \mapsto (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$

זאת פונקציה יסודית ולכן היא רציפה ב- $\mathbf{R}^2$. השיקולים לעיל מראים שלכל $(\phi, \theta) \in \mathbf{R}^2$ מתקיים $f(\phi, \theta) \in S$ וכן $|f(\phi, \theta)| = |\sin \phi|$, ולכל קטע J שאורכו 2π וכולל בדיוק אחד משני קצותיו הצמצום $f|_{(0, \pi) \times J}$ הוא פונקציה חד-חד-ערכית ורציפה שתמונתה S .

פתרון סעיף א

נדגים שתי דרכים לפתור את הסעיף. נעזר בפונקציה f שהגדרנו לעיל.³

דרך א: לכל $a \in S$ נגדיר סביבה פתוחה $U_a \subseteq \mathbf{R}^3$ ונראה ש- $S \cap U_a$ היא טלאי דרממדי.

אז כמובן $S \subseteq \bigcup_{a \in S} U_a$ ולפי הגדרה 7.2.7 הקבוצה S היא יריעה דרממדית, דהיינו משטח.

לשם כך נגדיר קבוצה פתוחה $\Omega_I \subseteq \mathbf{R}^2$ והומאומורפיזם $h_I: \Omega_I \rightarrow S \cap U_I$ שיעיד על כך שהקבוצה $S \cap U_I$ היא טלאי דרממדי.

יהי $a \in S$. יש $\omega \in (0, \pi) \times [0, 2\pi)$ כך ש- $a = f(\omega)$.

יש $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ממשיים כך ש- $0 < \alpha < \beta < \pi$ ו- $\gamma < \delta < \gamma + 2\pi$ וכן $\omega \in (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$.

נסמן $\Omega_I = (\alpha, \beta) \times (\gamma, \delta)$ ו- $h_I = f|_{\Omega_I}$ ובנוסף גם $K_I = [\alpha, \beta] \times [\gamma, \delta]$.

כדי לחסוך באינדקסים נסמן גם $\Omega = \Omega_I, h = h_I, K = K_I$. נסמן גם $J = [\gamma, \gamma + 2\pi)$.

ראינו קודם שהפונקציה $f|_{(0, \pi) \times J}$ היא פונקציה רציפה וחד-חד-ערכית שתמונתה S .

מתקיים $\Omega \subseteq K \subseteq (0, \pi) \times J$ ולכן גם $f|_K$ ו- $h = f|_{\Omega}$ הן פונקציות רציפות וחד-חד-ערכיות.

הקבוצה K היא סגורה וחסומה, ולכן קומפקטית, והקבוצה Ω פתוחה, ולכן לפי טענה 5.2.5

הפונקציה $h = f|_{\Omega}$ היא הומאומורפיזם מהקבוצה Ω לקבוצה $h(\Omega)$. לכן הקבוצה $h(\Omega)$ היא

טלאי דרממדי, ונותר למצוא קבוצה פתוחה U כך ש- $S \cap U = h(\Omega)$ כדי לסיים את ההוכחה.

נסמן: $K_1 = [0, \alpha] \times [\gamma, \gamma + 2\pi]$, $K_2 = [\beta, \pi] \times [\gamma, \gamma + 2\pi]$, $K_3 = [\alpha, \beta] \times [\delta, \gamma + 2\pi]$
 $U = \mathbf{R}^3 \setminus f(K_1 \cup K_2 \cup K_3)$

הקבוצות K_1, K_2, K_3 סגורות וחסומות, ולכן כזאת גם הקבוצה $K_1 \cup K_2 \cup K_3$ ולכן היא

קומפקטית. הפונקציה f רציפה ולפי חלק א של טענה 29.2.7 $f(K_1 \cup K_2 \cup K_3)$ קומפקטית,

ובפרט היא סגורה, ולכן משלימתה U היא קבוצה פתוחה.

נסמן $J' = (\gamma, \gamma + 2\pi]$. הפונקציה $g = f|_{(0, \pi) \times J'}$ היא פונקציה חד-חד-ערכית שתמונתה S .

מתקיים גם $h = g|_{\Omega}$ ו- $((0, \pi) \times J') \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3) = \Omega$.

לכן: $S \cap U = S \setminus f(K_1 \cup K_2 \cup K_3) = g(((0, \pi) \times J') \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3))$
 $= g(((0, \pi) \times J') \setminus (K_1 \cup K_2 \cup K_3)) = g(\Omega) = h(\Omega)$

³ בפרק 7 נלמד על יריעות חלקות, ובעזרת מסקנה 13.7.3 נוכל בקלות להוכיח ש- S היא משטח חלק.

דרך ב: נוכיח ש- S עצמה היא טלאי דרממדי, ולכן בפרט היא משטח.

לפי דוגמה 5.1.1, ושיקולים שפורטו קודם, אם J הוא קטע שאורכו 2π וכולל בדיוק אחד משני קצותיו אז ההתאמה $(r, \theta) \mapsto (r \cos \theta, r \sin \theta)$ של שיעורים קוטביים במישור מגדירה פונקציה

$$p: (0, \pi) \times J \rightarrow B(0^{[2]}; \pi) \setminus \{0^{[2]}\} \quad \text{הפיכה:}$$

$$h = f \circ p^{-1} = f|_{(0, \pi) \times J} \circ p^{-1} \quad \text{גם } f|_{(0, \pi) \times J}: (0, \pi) \times J \rightarrow S \quad \text{היא פונקציה הפיכה, ולכן ההרכבה}$$

$$\Omega = B(0^{[2]}; \pi) \setminus \{0^{[2]}\} \quad \text{לקבוצה } S.$$

אם נראה ש- h היא הומאומורפיזם מ- Ω ל- S זה יעיד על כך ש- S היא טלאי דרממדי. זה לא ברור מאליו, שכן ההופכית p^{-1} אינה רציפה בנקודות שתמונתן (r, θ) עם θ שהוא קצה הקטע J .

$$h: p(r, \theta) \mapsto f(r, \theta) \quad \text{נמצא הצגה מפורשת יותר של } h: \text{ הפונקציה } h \text{ מוגדרת על ידי}$$

$$h: r(\cos \theta, \sin \theta) \mapsto (\sin^2 r \cos \theta, \sin^2 r \sin \theta, \sin r \cos r) \quad \text{דהיינו:}$$

$$\omega = p(r, \theta) = r(\cos \theta, \sin \theta) \quad \text{כל } \omega \in \Omega \text{ יש } (r, \theta) \in (0, \pi) \times J \text{ שנקבעים באופן יחיד עבורם}$$

$$(\cos \theta, \sin \theta) = \frac{1}{|\omega|} \omega \quad \text{ומתקיים } r = |\omega| \text{ ולכן:}$$

$$h(x) = h(r(\cos \theta, \sin \theta)) = (\sin^2 r \cos \theta, \sin^2 r \sin \theta, \sin r \cos r) \quad \text{לכן:}$$

$$= (\sin^2 r(\cos \theta, \sin \theta), \sin r \cos r) = \left(\frac{\sin^2 |\omega|}{|\omega|} \omega, \sin |\omega| \cos |\omega| \right)$$

(שימו לב שהזוגות הרשומים בשורה הקודמת הם איברים של $\mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$ שמזוהים עם שלשות

במרחב האוקלידי $\mathbf{R}^3$, שהן כולן איברים של הקבוצה S). ובכן, יש לנו פונקציה הפיכה

$$h: \Omega \rightarrow S \quad \text{שהיא הצמצום של הפונקציה היסודית } \omega \mapsto \left(\frac{\sin^2 |\omega|}{|\omega|} \omega, \sin |\omega| \cos |\omega| \right) \text{ לקבוצה}$$

הפתוחה Ω , ולכן היא רציפה ב- Ω .

$$\text{נגדיר פונקציה } g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3 \text{ על ידי } g(\omega) = \left(\frac{\sin^2 |\omega|}{|\omega|} \omega, \sin |\omega| \cos |\omega| \right) \text{ אם } \omega \neq 0^{[2]} \text{ וכן}$$

$$g(0^{[2]}) = 0^{[3]} \quad \text{הפונקציה הזאת יסודית ולכן רציפה ב-} \mathbf{R}^2 \setminus \{0^{[2]}\}. \text{ היא רציפה גם ב-} 0^{[2]}: \text{ הרכיב}$$

$$\text{השלישי } [g]_3: \omega \mapsto \sin |\omega| \cos |\omega| \text{ הוא פונקציה יסודית שמוגדרת ולכן רציפה במישור כולו.}$$

$$([g]_1, [g]_2): \omega \mapsto \frac{\sin^2 |\omega|}{|\omega|} \omega \quad \text{הפונקציה } \omega \neq 0 \text{ עבור } \omega \neq 0 \text{ נתבונן באיסוף של שני הרכיבים הראשונים:}$$

$$\text{היא מכפלה של הפונקציה החסומה } \omega \mapsto \frac{1}{|\omega|} \omega \text{ בפונקציה } \omega \mapsto \sin^2 |\omega| \text{ שהיא יסודית ולכן רציפה}$$

$$\text{בראשית ושואפת ל-} \sin^2 0 = 0 \text{ כאשר } \omega \rightarrow 0^{[2]}. \text{ לכן } ([g]_1, [g]_2) \text{ שואפת ל-} (0, 0) \text{ כאשר}$$

$$\omega \rightarrow 0^{[2]}, \text{ וכיוון שזה גם ערכה בראשית היא רציפה בראשית. היא גם יסודית ולכן רציפה ב-}$$

$$\mathbf{R}^2 \setminus \{0^{[2]}\}, \text{ ולכן היא רציפה ב-} \mathbf{R}^2. \text{ כל שלושת רכיבי } g \text{ רציפים ב-} \mathbf{R}^2, \text{ ולכן } g \text{ רציפה ב-} \mathbf{R}^2.$$

כאמור h היא הצמצום של g לקבוצה הפתוחה Ω , ולכן היא רציפה, והיא גם חד-חד-ערכית.

עכשיו הייתי רוצה להסיק בעזרת טענה 5.2.1 ש- $h = g|_{\Omega}$ היא הומאומורפיזם. ברם, כל קבוצה

סגורה K אשר מכילה את Ω מכילה גם את הכדור הסגור $\bar{B}(0^{[2]}; \pi)$ ו- g אינה חד־חד־ערכית

בקבוצה זאת כיוון שערכה על כל הנקודות של הספירה $S(0^{[2]}; \pi)$ הוא $0^{[3]}$. מה עושים?

לפני שנמשיך נחשב כמה דברים לטובת ההמשך. לכל $\omega \in \mathbb{R}^2$ מתקיים $|g(\omega)| = |\sin|\omega||$.

זה ברור אם $\omega = 0^{[2]}$ ואחרת:

$$\begin{aligned} |g(\omega)|^2 &= \left| \left(\frac{\sin^2|\omega|}{|\omega|} \omega, \sin|\omega| \cos|\omega| \right) \right|^2 = \left| \frac{\sin^2|\omega|}{|\omega|} \omega \right|^2 + \sin^2|\omega| \cos^2|\omega| \\ &= \left(\frac{\sin^2|\omega|}{|\omega|} |\omega| \right)^2 + \sin^2|\omega| \cos^2|\omega| = \sin^2|\omega| (\sin^2|\omega| + \cos^2|\omega|) = \sin^2|\omega| \end{aligned}$$

יהיו $\alpha \in (0, \frac{\pi}{2})$ ו- $r \in (0, 1)$ כך ש- $r = \sin \alpha$. עבור $\omega \in \Omega$ מתקיים $|\omega| \in (0, \pi)$ ולכן מתקיים

$|h(\omega)| = |g(\omega)| = \sin|\omega|$ ומתקיים $|h(\omega)| > r$ אם ורק אם $\alpha < |\omega| < \pi - \alpha$, וכן $|h(\omega)| = r$ אם

ורק אם $|\omega| \in \{\alpha, \pi - \alpha\}$. נסמן: $K_\alpha = \bar{B}(0^{[2]}; \pi - \alpha) \setminus B(0^{[2]}; \alpha)$

זאת קבוצה סגורה וחסומה ולכן קומפקטית, ולפי טענה 29.2.2 הקבוצה $h(K_\alpha) = S \setminus B(0^{[3]}; r)$

היא קבוצה קומפקטית והפונקציה $h|_{K_\alpha}^{-1} = h^{-1}|_{S \setminus B(0^{[3]}; r)}$ רציפה.

כעת אפשר להראות את רציפות הפונקציה הופכית $h^{-1}: S \rightarrow \Omega$, למשל כך:

תהי $a \in S$ ויהי $r \in (0, 1)$ כך ש- $|a| > r$. הקבוצה $U_r = \mathbb{R}^3 \setminus \bar{B}(0^{[3]}; r)$ היא סביבה פתוחה של a .

יש $\omega \in \Omega$ יחיד כך ש- $a = h(\omega)$, וכפי שראינו עבור $\alpha = \arcsin r$ מתקיים $\alpha < |\omega| < \pi - \alpha$ (ולכן

K_α היא סביבה של ω).

תהי W סביבה של ω . הפונקציה $h|_{K_\alpha}^{-1} = h^{-1}|_{S \setminus B(0^{[3]}; r)}$ רציפה ולכן לפי טענה 12.2.2 יש לנקודה

a סביבה U שעבורה: $h^{-1}\left(U \cap \left(S \setminus B(0^{[3]}; r)\right)\right) = h^{-1}|_{S \setminus B(0^{[3]}; r)}\left(U \cap \left(S \setminus B(0^{[3]}; r)\right)\right) \subseteq W$

אבל $U \cap U_r$ היא סביבה של a וכן:

$$(U \cap U_r) \cap S = U \cap (U_r \cap S) = U \cap \left(S \setminus \bar{B}(0^{[3]}; r)\right) \subseteq U \cap \left(S \setminus B(0^{[3]}; r)\right)$$

ולכן: $h^{-1}\left((U \cap U_r) \cap S\right) \subseteq h^{-1}\left(U \cap \left(S \setminus B(0^{[3]}; r)\right)\right) \subseteq W$

לכל $a \in S$ ולכל סביבה W של $h^{-1}(a)$ יש סביבה $U \cap U_r$ עבורה $h^{-1}\left((U \cap U_r) \cap S\right) \subseteq W$

ולכן לפי טענה 12.2.2 הפונקציה $h^{-1}: S \rightarrow \Omega$ רציפה, וזה מסיים את ההוכחה שהפונקציה h היא

הומאומורפיזם מ- Ω ל- S , ולכן כאמור $S = h(\Omega)$ היא טלאי דרממדי, ובפרט היא משטח.

נתבונן למשל בשתי הנקודות $\left(\frac{1}{2}r^2, 0, \pm\sqrt{\frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{1}{2}r^2\right)}\right)$ הן ב- $B((0,0,0);r)$ כי:

$$\left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + 0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{1}{2}r^2\right)}^2 = \left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + \frac{1}{2}r^2 - \left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 = \frac{1}{2}r^2 < r^2$$

$$\left(\left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + 0^2 + \sqrt{\frac{1}{2}r^2\left(1-\frac{1}{2}r^2\right)}^2\right)^2 = \left(\frac{1}{2}r^2\right)^2 + 0^2 \quad \text{כמוכן הן ב- } S \text{ כי:}$$

נניח בשלילה ש- $S \cap B((0,0,0);r)$ קשורה מסילתית. אז יש מסילה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^3$ שתמונתה

מוכלת ב- $B((0,0,0);r)$ ושני קצותיה הן שתי הנקודות דלעיל. בפרט הרכיב השלישי של φ הוא פונקציה רציפה בקטע $[\alpha, \beta]$ שבאחד מקצותיו ערכה חיובי ובקצה האחר ערכה שלילי. לכן, לפי משפט ערך הביניים, יש $\gamma \in (\alpha, \beta)$ כך ש- $[\varphi(\gamma)]_3 = 0$.

בפרט יש נקודה $(x, y, 0) \in S \cap B((0,0,0);r)$ אז $x^2 + y^2 \neq 0$ ו- $(x^2 + y^2 + 0^2)^2 = x^2 + y^2 \neq 0$ ולכן

$$x^2 + y^2 = 1, \text{ אבל אז } 1 = x^2 + y^2 + 0^2 < r^2 \text{ בסתירה לנתון } r \leq 1.$$

לכן בניגוד להנחת השלילה הקבוצה $S \cap B((0,0,0);r)$ אינה קשורה מסילתית.

כדי להראות שהקבוצה $S \cap B((0,0,0);r) \cup \{(0,0,0)\}$ קשורה מסילתית די להראות לכל

$(x, y, z) \in S \cap B((0,0,0);r)$ מסילה שתמונתה ב- $S \cap B((0,0,0);r) \cup \{(0,0,0)\}$ וקצותיה

הנקודות $(0,0,0)$ ו- (x, y, z) . נעזר בהצגה הקוטבית של נקודות S שמצאנו קודם.

ראינו שיש $\phi \in (0, \pi)$ ו- $\theta \in [0, 2\pi)$ עבורם: $(x, y, z) = (\sin^2 \phi \cos \theta, \sin^2 \phi \sin \theta, \sin \phi \cos \phi)$

כמוכן ראינו ש- $|(x, y, z)| = \sin \phi$ ולכן העובדה ש- $(x, y, z) \in B((0,0,0);r)$ פירושה: $\sin \phi < r$

אם $z \geq 0$ אז $\sin 2\phi = 2 \sin \phi \cos \phi \geq 0$ ולכן $2\phi \in (0, \pi]$ ומכאן $\phi \in (0, \frac{\pi}{2}]$.

נגדיר $\psi: [0, \phi] \rightarrow \mathbf{R}^3$ על ידי:

$$\psi(t) = (\sin^2 t \cos \theta, \sin^2 t \sin \theta, \sin t \cos t)$$

אז מהשיקולים לעיל ברור שלכל $t \in (0, \phi]$ מתקיים $\psi(t) \in S$ וכן $|\psi(t)| = \sin t \leq \sin \phi < r$

ולכן $\psi(t) \in S \cap B((0,0,0);r)$ וגם $\psi(0) = (0,0,0)$ ו- $\psi(\phi) = (x, y, z)$ ולכן ψ היא מסילה

שקצותיה הנקודות $(0,0,0)$ ו- (x, y, z) ותמונתה מוכלת בקבוצה: $S \cap B((0,0,0);r) \cup \{(0,0,0)\}$

אם $z < 0$ נשתמש בעובדה הפשוטה שמתקיים $(x, y, z) \in S \cap B((0,0,0);r)$ אם ורק אם מתקיים

$(-x, -y, -z) \in S \cap B((0,0,0);r)$. אנו יודעים כבר שיש מסילה ψ שקצותיה הנקודות $(0,0,0)$ ו-

$(-x, -y, -z)$ ותמונתה מוכלת בקבוצה $S \cap B((0,0,0);r) \cup \{(0,0,0)\}$, ואם כך $-\psi$ היא מסילה

שקצותיה הנקודות $(0,0,0)$ ו- (x, y, z) ותמונתה מוכלת בקבוצה: $S \cap B((0,0,0);r) \cup \{(0,0,0)\}$

זה משלים את הוכחת הקשירות המסילתית של $S \cap B((0,0,0);r) \cup \{(0,0,0)\}$.

נניח בשלילה ש- $S' = S \cup \{(0,0,0)\}$ היא משטח, וננסה לקבל סתירה בעזרת סעיף ב. מהנחת השלילה נובע שיש קבוצה פתוחה U שמכילה את $(0,0,0)$ כך ש- $S' \cap U$ היא טלאי דורממדי. אז יש הומאומורפיזם $h: \Omega \rightarrow S' \cap U$ היא קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$. נסמן ב- α את האיבר של Ω עבורו $h(\alpha) = (0,0,0)$. הקבוצה U היא סביבה פתוחה של $(0,0,0)$, לכן יש כדור $B((0,0,0); r)$ שמוכל ב- U . יש כדור כזה עבורו $r \leq 1$. $h^{-1}(B((0,0,0); r))$ היא קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$ שמכילה את α ומוכלת ב- Ω , ותמונתה על ידי h היא $S' \cap B((0,0,0); r)$. נוכל אפוא להחליף את Ω ב- $h^{-1}(B((0,0,0); r))$ ואת h בצמצומה לקבוצה זאת. במלים אחרות ללא הגבלת הכלליות נוכל להניח ש- $U = B((0,0,0); r)$. לפי סעיף ב $S' \cap U$ קשורה מסילתית ואילו $S \cap U$ אינה קשורה מסילתית. Ω היא תמונת $S' \cap U$ עלידי הפונקציה הרציפה h^{-1} ולכן לפי טענה 2.ט.2 Ω קשורה מסילתית. לעומת זאת $\Omega \setminus \{\alpha\}$ אינה קשורה מסילתית כי אחרת תמונתה על ידי h שהיא $h(\Omega \setminus \{\alpha\}) = S' \cap U \setminus \{(0,0,0)\} = S \cap U$ היא קבוצה קשורה מסילתית, וידוע שהיא אינה כזאת. קיבלנו אם כן ש- Ω היא סביבה פתוחה של α ב- $\mathbb{R}^2$ שהיא קשורה מסילתית ואילו $\Omega \setminus \{\alpha\}$ אינה קשורה מסילתית. דבר זה לא ייתכן. מדוע?

תהיינה β ו- γ נקודות ב- $\Omega \setminus \{\alpha\}$ שאין קו שבור ביניהן ששוכן ב- $\Omega \setminus \{\alpha\}$. לפי טענה 16.ט.2 הקבוצה Ω קשורה מצולעית. אז יש בין β ו- γ קו שבור ששוכן ב- Ω . נניח גם שמספר קטעיו של הקו השבור הזה מינימלי. מהמינימליות נובע שאין נקודות משותפות לשני קטעים של הקו שאינם עוקבים. אין קו שבור בין שתי הנקודות β ו- γ ששוכן ב- $\Omega \setminus \{\alpha\}$ ולכן הנקודה α נמצאת על אחד הקטעים בקו השבור או שהיא קצה משותף לשניים מהם. Ω מכילה עיגול $B(\alpha; \delta)$ ולפחות חלק של אותו קטע או שני קטעים של הקו נמצא בעיגול זה. לפי שאלה 13.ט.2 העיגול הנקוב $B(\alpha; \delta) \setminus \{\alpha\}$ גם הוא קשור מצולעית, ולכן נוכל להחליף את החלקים האלה של הקו השבור בקטעים אחרים שנמצאים בתוך העיגול הנקוב $B(\alpha; \delta) \setminus \{\alpha\}$, ולקבל קו שבור בין β ו- γ ששוכן ב- $\Omega \setminus \{\alpha\}$, בסתירה לכך שאין קו שבור כזה. הסתירה מראה שהנחת השלילה אינה נכונה, דהיינו S' אינו משטח.