

האוניברסיטה הפתוחה

2024

חשבון אינפיניטסימלי 3

חוברת הקורס - סתיו 2024/א1

כתב: ד"ר עופר הדס

נובמבר 2023 - סמסטר סתיו - תשפ"ד
משך זמן כפול

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	שלום וברכה – הנחיות כלליות
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס
1	מטלות אופל
2	ממ"ן 11
4	ממ"ן 12
6	ממ"ן 13
8	ממ"ן 14
10	ממ"ן 15
12	ממ"ן 16

שלום וברכה,

חוברת זאת כוללת פרטים שיש להכיר, כדי לבצע את הנדרש ולסיים בהצלחה את לימוד הקורס חשבון אינפיניטסימלי 3. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.¹

עם קבלת חומר הלימוד בקורס יש להתחיל בלימוד עצמי, בקצב המותאם ללוח הזמנים שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד כל פרק כלול גם הזמן הנדרש לפתרון המטלה הקשורה אליו ולהגשתה. חשוב לתכנן לוח זמנים אישי שיאפשר את לימוד החומר ופתרון והגשת המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים וחשוב לעיין בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

הקורס נלמד במתכונת שנתית, מתחילת סמסטר א ועד תום סמסטר ב. הסיבה העיקרית לכך היא שמנסיונו דרוש זמן ארוך מסמסטר אחד כדי להתרגל ולהפנים את הרעיונות והמושגים הנלמדים בקורס, ולתרגל את יישומם. התקופה שבין שני הסמסטרים כלולה בזמן לימוד הקורס. עם זאת, בתכנון לוח הזמנים נלקח בחשבון שחלק מתקופה זאת, אך לא כולה, יוקדש לבחינות בקורסים אחרים. יש אפשרות לבקש להבחן בקורס בתום סמסטר א. אפשרות זאת אינה מומלצת. בשנה זאת, עקב קיצור לוח הזמנים, לא נאשר זאת אלא במקרים חריגים. למידע על מימוש אפשרות זאת יש לפנות למרכז ההוראה במהלך השבועיים הראשונים של סמסטר א.

לקורס **אתר אינטרנט**. חלק מהמטלות להגשה יש לפתור באתר הקורס באינטרנט ("מטלות אופל"). יש מטלת אופל אחת לכל פרק בספר הלימוד, והיא מיועדת לפתרון במקביל ללימוד הפרק המתאים בספר. מטלות המנחה (הממ"נים) נמצאות בחוברת זאת (שעותק שלה נמצא גם באתר הקורס). באתר גם חומרי תרגול נוספים, כגון מטלות ובחינות משנים קודמות.

אתר הקורס מהווה ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטיות וסטודנטים אחרים בקורס. זה המקום המתאים להעלות בו לדיון כל רעיון או שאלה בנושאי הלימוד. **הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.**

צוות הקורס מעוניין לעזור לך בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, חשוב לא להסס ולפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותך דרכי ההתקשרות הבאות:

- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת oferh@openu.ac.il.
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ד בין השעות 12:00–14:00.
- טלפון למנחה בשעת ההנחיה הטלפונית המפורטת יחד עם לוח המפגשים.
- פניה למנחה בדואר אלקטרוני.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.
- **שאלתא** – לפניויות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאלתא (לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים < משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות).

נאחל לכולנו סמסטר מוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

¹ פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס יש באתר שה"ם שכתובתו: <http://www.openu.ac.il/shoham>
מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותך יש באתר הספרייה שכתובתו:

<http://www.openu.ac.il/Library>

לוח זמנים ופעילויות (2024 \ 20224) – משך זמן כפול (מקוצר)

מפגשי הנחיה*	הערות	מועדי משלוח המטלות	תאריכים	שבועות הלימוד	פרקי הלימוד
	תחילת סמסטר א : 22.10 חנוכה : 10.12	מטלה 01 : עד 15.12.2023	15.12.2023–3.12.2023	2–1	פרק 1
		מטלה 02 : עד 29.12.2023 ממ"ן 11 : עד 31.12.2023	29.12.2023–17.12.2023	4–3	פרק 2
		מטלה 03 : עד 12.1.2024	12.1.2024–31.12.2023	6–5	פרק 3
		מטלה 04 : עד 21.6.2024	חומר רשות בשנה זאת		פרק 4
		מטלה 05 : עד 19.1.2024	19.1.2024–14.1.2024	7	פרק 5
		מטלה 06 : עד 2.2.2024 ממ"ן 12 : עד 4.2.2024	2.2.2024–21.1.2024	9–8	פרק 6
	סיום סמסטר א : 11.2				
		מטלה 07 : עד 15.3.2024 ממ"ן 13 : עד 17.3.2024	15.3.2024–4.2.2024	15–10	פרק 7
	תחילת סמסטר ב : 17.3 פורים : 24.3				
		מטלה 08 : עד 12.4.2024 ממ"ן 14 : עד 14.4.2024	12.4.2024–17.3.2024	19–16	פרק 8
	פסח: 29.4–22.4 יום הזכרון לשואה : 6.5 יום הזכרון : 13.5 יום העצמאות : 14.5				
		מטלה 09 : עד 24.5.2024 ממ"ן 15 : עד 26.5.2024	24.5.2024–14.4.2024	25–20	פרק 9
	ל"ג בעומר שבועות : 12.6–11.6 סיום סמסטר ב : 21.6	מטלה 10 : עד 21.6.2024 ממ"ן 16 : עד 21.6.2024	21.6.2024–26.5.2024	29–26	פרק 10

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים". אנא שבצו אותם בכתב ידכם.

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס

כדי לעבור את הקורס ולקבל נקודות זכות יש לעמוד בכל התנאים האלה :

- א. להגיש מטלות בהיקף של 10 נקודות לפחות (אפשר עד 30).
- חובה להגיש לפחות ממ"ן אחד מבין הממ"נים 11, 12 ו-13.
- חובה להגיש לפחות ממ"ן אחד מבין הממ"נים 14, 15 ו-16.
- ב. לקבל בבחינת הגמר ציון לפחות 60.
- ג. לקבל בציון הסופי לפחות 60.

פירוט המטלות ומשקליהן

סך הכל משקל המטלות 30 נקודות. מהן :

- עשר מטלות אופל, משקל כל אחת נקודה אחת, בסה"כ 10 נקודות.
- שישה ממ"נים, להלן משקליהם :

משקל	ממ"ן
2	11
2	12
4	13
4	14
4	15
4	16
20	סה"כ

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם. זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**

מטלות אופל

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס. כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו
אחר ההוראות בגוף המטלה.

יש עשר מטלות אופל, אחת לכל פרק. משקל כל מטלת אופל: נקודה אחת.

מטלות אלה מיועדות לפתרון תוך כדי לימוד הפרק מהספר, דהיינו במקביל לקריאת חומרי
הלימוד. תוכלו לעזוב את המטלה ולחזור אליה באתר הקורס ולהמשיך לפתור אותה, כל עוד לא
הגשם אותה באמצעות כפתור ההגשה שבסוף המטלה. תשובותיכם נשמרות באתר הקורס.

לפני המועד האחרון להגשת כל מטלת אופל, יש להגיש אותה בעזרת כפתור ההגשה.

אחרי הגשת המטלה לא ניתן לשנות עוד את התשובות.

אחרי המועד האחרון לא ניתן להגיש את המטלה.

המועדים המדויקים לפתרון כל מטלת אופל נמצאים בגוף המטלה באתר הקורס.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר: 1א2024
חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–2
משקל המטלה: 2 נקודות
מספר השאלות: 5
מועד אחרון להגשה: 31.12.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה A ו- B קבוצות ב- $\mathbb{R}^k$. תהי C איחוד כל הקטעים הסגורים שקצה אחד שלהם ב- A והקצה השני ב- B , דהיינו $C = \{ta + (1-t)b \mid a \in A, b \in B, 0 \leq t \leq 1\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A ו- B קבוצות קמורות אז C קבוצה קמורה.

ב. אם A ו- B קבוצות פתוחות אז C קבוצה פתוחה.

ג. אם A ו- B קבוצות סגורות אז C קבוצה סגורה.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. נתון ש- B כדור שמכיל את A ושאינו כדור אחר שמכיל את A ומוכל ב- B .

א. הוכיחו שאם A היא קבוצה פתוחה אז B הוא כדור פתוח.

ב. הוכיחו שאם A היא קבוצה סגורה אז B הוא כדור סגור.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ פונקציה רציפה.

לכל מספר טבעי n תהי A_n קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^k$ ותהי $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

הראו ש- $f(A_n)$ אינה בהכרח קבוצה סגורה.

הוכיחו שיש קבוצות סגורות B_n ב- $\mathbb{R}^l$ כך ש- $f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

שאלה 4 (20 נקודות)

- תהי A קבוצה קמורה וחסומה ב- $\mathbf{R}^k$ ש- $0^{[k]}$ נקודה פנימית שלה.
בשאלה זאת תוכיחו ש- ∂A היא משטחעל.
א. הוכיחו שאם $x \in \partial A$ ו- $0 < \alpha < 1$ אז αx היא נקודה פנימית של A .
ב. הוכיחו שהפונקציה $f: \partial A \rightarrow S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$ המוגדרת על ידי $x \mapsto \frac{1}{|x|}x$ היא פונקציה חד-חד-ערכית ורציפה.
ג. הראו שהפונקציה ההופכית $f^{-1}: S^{k-1}(0^{[k]}; 1) \rightarrow \partial A$ היא פונקציה רציפה ב- $S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$.
ד. היעזרו בדוגמה 14.2 ו-14.3 ובפונקציה f דלעיל כדי להסיק ש- ∂A היא משטחעל ב- $\mathbf{R}^k$.

שאלה 5 (20 נקודות)

- הדרגה של מטריצה היא מימד מרחב השורות שלה, והיא גם מימד מרחב העמודות שלה.
את מרחב המטריצות 2×3 נוהה עם המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^6$ (ראו הערה 1.א.1).
הוכיחו שקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 2 היא קבוצה פתוחה, ושקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 1 היא יריעה ממימד 4.
הערה: במעט יותר מאמץ אפשר להוכיח שאם $r = \min\{k, l\}$ אז קבוצת המטריצות $k \times l$ שדרגתן r היא קבוצה פתוחה ושם $0 < r < \min\{k, l\}$ אז היא יריעה ממימד $kl - (k-r)(l-r)$.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

סמסטר : 1א2024

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 3–6

מועד אחרון להגשה : 4.2.2024

מספר השאלות : 4

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(x, y, z) = 0$ אם $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ ואחרת $f(x, y, z) = \sin(xyz)$.

הראו ש- f גזירה בנקודה $(0, 0, 0)$ ואינה גזירה בנקודה $(1, 1, \pi)$.

($\mathbb{Q}$ היא קבוצת המספרים הרציונליים. π הוא מספר אי-רציונלי.)

אתגר (לא להגשה): מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה f רציפה, וכל הנקודות בהן היא גזירה.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי f הפונקציה החלקית מ- $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ ל- $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ שמתאימה לכל מטריצה הפיכה X את

ההופכית שלה X^{-1} , כלומר $f(X) = X^{-1}$. תהי $A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ הפיכה.

הוכיחו ש- f גזירה ב- A ו- $Df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$ לכל $H \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$.

בדרך כדאי להוכיח ולנצל את האישויון $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ שנוון עבור כל זוג מטריצות A ו- B שמכפלתן AB מוגדרת.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ הומוגנית חיובית ממעלה α . תהי $a \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ ויהי $\lambda > 0$.

א. עבור $u \in \mathbb{R}^k$ הראו שהנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה a קיימת אם ורק אם הנגזרת

הכיוונית בכיוון u של f בנקודה λa קיימת, ומצאו את הקשר בין $\partial_u f(a)$ לבין $\partial_u f(\lambda a)$.

ב. הראו ש- f גזירה ב- a אם ורק אם f גזירה ב- λa , ומצאו את הקשר בין $\nabla f(a)$ ו- $\nabla f(\lambda a)$.

ג. הראו ש- f גזירה פעמיים ב- a אם ורק אם f גזירה פעמיים ב- λa , ומצאו את הקשר בין Hf_a

ו- $Hf_{\lambda a}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי α מספר ממשי ותהי $A = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y + z = \alpha\}$

הוכיחו כי לפונקציה $f: (x, y, z) \mapsto xy + yz + xz - 2xyz$ יש ערך מזערי ב- A אם ורק אם $\alpha \geq 4.5$.

(עצה: כדאי לחשוב גם על ערכי f ב- ∂A .)

שאלת רשות (0 נקודות)

שימו לב: שאלה זאת היא על פרק 4, שהוגדר השנה חומר רשות במסגרת ההקלות עקב מלחמת חרבות ברזל.

תהי $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbf{R}^3$. נניח שלכל $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ מתקיים

השוויון $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)$. נגדיר פונקציה:

$$g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto \int_0^y f(x, y-z, z) dz$$

הוכיחו שלכל $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + f(x, 0, y)$$

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

סמסטר : 1א2024

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 7

מועד אחרון להגשה : 17.3.2024

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי a נקודה ב- $\mathbb{R}^k$. תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}^l$ המוגדרת וגזירה בסביבה U של הנקודה a , וגזירה ברציפות בנקודה a . נתון שהמטריצה Jf_a היא בעלת דרגה מלאה. הוכיחו שאם $k \geq l$ אז $f(U)$ היא סביבה של $f(a)$.
עצה: בעזרת הפונקציה הנתונה בנו פונקצית עזר עבורה יתקיימו תנאי משפט הפונקציה ההופכית.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי α מספר ממשי כלשהו. תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ שהיא הומוגנית-חיובית ממעלה α וגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ וכן $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. הקבוצה $S = \{x \mid f(x) = 1\}$ היא משטח-על חלק. תהי $a \in S$. מצאו מה המרחק בין ראשית הצירים והמישור-על המשיק ל- S בנקודה a .

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו שקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 1 היא יריעה חלקה.
מצאו מטריצה שדרגתה מלאה שנמצאת במרחב המשיק ליריעה זאת בנקודה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ שעליה.

שאלה 4 (20 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו את אי-שוויון הממוצעים כמסקנה ממשפט 11.ה.7 ("כופלי לגרנז").
א. הראו שלפונקצית המכפלה $f: (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 \cdots x_k$ יש ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה

$$\left\{ (x_1, \dots, x_k) \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k = k \right\}$$

ומצאו את כל נקודות הקיצון של f בקבוצה זאת.

ב. הסיקו מסעיף א את אי-שוויון הממוצעים:

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$$

אם $a_1, \dots, a_k$ מספרים אישיליים אז מתקיים:

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} < \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$$

ואם לא כל המספרים $a_1, \dots, a_k$ שווים זה לזה אז מתקיים גם:

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי:

$$(x, y, z) \mapsto xy^2z^3$$

מצאו את כל נקודות הקיצון של f בקבוצה $D = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq z, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1 \}$

ואת הערך המזערי והערך המרבי שלה בקבוצה (אם אלה קיימים).

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

סמסטר : 142024

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 8

מועד אחרון להגשה : 14.4.2024

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ו- $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$
 $t \mapsto \varphi(t) \times \psi(t)$

א. הוכיחו כי γ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).

ב. אם φ ו- ψ הן מסילות סדירות, האם גם γ היא מסילה סדירה?

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה המסילה: $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$
 $t \mapsto (\sin t \cdot |\sin t|, \cos t \cdot |\cos t|)$

א. הראו ש- φ היא לולאה פשוטה ששקולה למסילה אפינית למקוטעין.

ב. הסיקו שאורכה סופי, וחשבו אותו.

ג. חשבו את מספר הליפוף של φ סביב $(0,0)$.

הקפידו לבסס את כל טיעוניכם וחישוביכם על הגדרות ועובדות מהספר.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ובעלת השתנות חסומה המקיימת $f(a) = f(b) = 0$ וכן
 $f(0) \neq 0$. נסמן $\varphi(t) = (t, f(t))$ לכל $t \in [a, b]$. הוכיחו כי:

$$\int_{\varphi} \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + y \right) dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_a^b f(x) dx$$

שאלה 4 (20 נקודות)

הראו כי הפונקציה $F: (x, y) \mapsto \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 y} (\cos x \cos y, \sin x \sin y)$

המוגדרת בקבוצה $D = \{(x, y) \mid \sin^2 x + \cos^2 y > 0\}$ היא שדה משמר בקבוצה $B((0,0);1)$ ואינה

שדה משמר בקבוצה D . (שימו לב שהמכנה קבוע על הישרים $y = n\pi \pm x$).

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ שגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ וכך שהמטריצה JF_a סימטרית לכל

$a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. נתונה מסילה $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4$ ולכל i המסילה φ_i היא מסילה פשוטה

שתמונתה קטע שקצותיו P_{i-1} ו- P_i כאשר:

$$P_0 = (-2,1), P_1 = (2,-1), P_2 = (2,1), P_3 = (-2,-1), P_4 = (-2,1)$$

חשבו את האינטגרל המסילתי:

$$\int_{\varphi} (F(x-1,y) + F(x+1,y)) \cdot d(x,y)$$

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 מספר השאלות: 4
 סמסטר: 1א2024
 משקל המטלה: 4 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 26.5.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

- א. תהי A קבוצה בעלת נפח. הראו שאם $c < \text{vol}_k A$ אז יש קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח K כך ש- $K \subseteq A$ ו- $\text{vol}_k K > c$.
- ב. תהי U קבוצה לא ריקה ב- $\mathbb{R}^k$ שהיא פתוחה, קשורה מסילתית ובעלת נפח. יהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפאומורפיזם המקיים $\varphi(U) = U$. הראו שיש $x \in U$ כך ש- $|\det J\varphi_x| = 1$.
- ג. הראו בעזרת דוגמאות מתאימות שבסעיף ב אף אחת משתי ההנחות ש- U קשורה מסילתית וש- U בעלת נפח אינה מיותרת, כלומר בלעדי כל אחת מהנחות אלה המסקנה אינה הכרחית.

שאלה 2 (25 נקודות)

- תהי B קבוצה סגורה בעלת נפח $k-1$ ממדי ב- $\mathbb{R}^{k-1}$. נסמן: $C = \{(tx, t) \mid t \in [0, 1], x \in B\}$ (זאת תת-קבוצה של $\mathbb{R}^k$ המזוהה עם $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}$).
- א. הוכיחו ש- C היא קבוצה בעלת נפח k ממדי.
- ב. נניח ש- $\text{vol}_{k-1}(B) = 1$ ויהי $b \in \mathbb{R}^{k-1}$ המרכז הגיאומטרי של B . מצאו את הנפח ואת המרכז הגיאומטרי של C .

שאלה 3 (25 נקודות)

- יהי α מספר ממשי חיובי. תהי: $K = \{(x, y, z) \mid x^4 + y^4 + z^4 \leq \alpha^4\}$
- הוכיחו: $\text{vol}_3 K = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^4}{6\pi\sqrt{2}} \alpha^3$
- הדרכה: כדאי להשתמש בהחלפת משתנים מתאימה. הסימן Γ מציין את פונקציית גמא מדוגמה 1.ד.4. יכול להועיל בשלב מסוים להוכיח ש- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(p, q)$ (כאן B מציין את פונקציית בֶּטָא מדוגמה 13.ח.9).

שאלה 4 (25 נקודות)

- תהי $f: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbf{R}^2$, גזירה ברציפות ב- $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, שהיא הומוגנית-חיובית ממעלה 2, וכן $f(x,y) > 0$ לכל $(x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. תהי $K = \{(x,y) \mid f(x,y) \leq 1\}$.
- א. הראו שהפונקציה $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי
$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{f(\cos t, \sin t)}} (\cos t, \sin t)$$
 היא לולאה פשוטה סדירה ש- K שוכנת לשמאלה.
- ב. תהי $F: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ פונקציה המוגדרת על ידי
$$(x,y) \mapsto \frac{1}{f(x,y)} (-y, x)$$
 ותהי ψ לולאה שאורכה סופי ו- $(0,0)$ אינה בתמונתה.
- הוכיחו שמספר הליפוף של ψ סביב ראשית הצירים הוא:
$$\frac{1}{2 \operatorname{vol}_2 K} \int_{\psi} F \cdot d(x,y)$$

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

סמסטר : 1א2024

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 10

מועד אחרון להגשה : 21.6.2024

מספר השאלות : 4

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

הגרף $G(f)$ של הפונקציה $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי $x \mapsto \ln|x|$ הוא יריעה חלקה

ממימד 3 ב- $\mathbb{R}^4$ (אינכם נדרשים להוכיח זאת; זאת מסקנה מידית מדוגמה 7.ג.7 בספר הלימוד).

חשבו את הנפח (המוכלל) התלת־ממדי של הקבוצה $K = G\left(f|_{\overline{B^3(0;1)} \setminus \{0\}}\right)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונות הנקודות $A=(1,0,0)$, $B=(5,0,4)$, $C=(2,3,1)$

ומסילות פשוטות $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ שתמונותיהן הקטעים AB, BC, CA בהתאמה, וכך שמוגדר

השרשר $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3$. חשבו את האינטגרל המסילתי $\int_{\varphi} f(x) \cdot dx$ תוך שימוש במשפט קלווין–

סטוקס, כאשר: $f: (x, y, z) \mapsto (xe^y, xze^y, 2x)$

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה שגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^k$, ונניח שהאינטגרל המוכלל $\int_{\mathbb{R}^k} |F|$ מתכנס.

הוכיחו שאם $k \geq 2$ ואם האינטגרל המוכלל $\int_{\mathbb{R}^k} \nabla \cdot F$ מתכנס אז $\int_{\mathbb{R}^k} \nabla \cdot F = 0$.

הערה: הטענה נכונה גם במקרה $k=1$.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי $a > 0$ ונתבונן במשטח החלק: $S = \{(x, y, z) \mid 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4a^2\}$

לכל $x \in S$ יהי $p(x)$ המרחק מראשית הצירים למישור המשיק למשטח S בנקודה x (דהיינו

המרחק המזערי בין הראשית ונקודה על מישור זה). הוכיחו שמתקיים: $\int_S \frac{1}{p} d\sigma_2 = 6\pi a$

ראו גם שאלה 2 בממ"ן 13.

▶▶▶ סוף המטלה