

מטלת מנחה (ממ"ן) 16

סמסטר : 1א2024

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 10

מועד אחרון להגשה : 21.6.2024

מספר השאלות : 4

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

הגרף $G(f)$ של הפונקציה $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי $x \mapsto \ln|x|$ הוא יריעה חלקה

ממימד 3 ב- $\mathbb{R}^4$ (אינכם נדרשים להוכיח זאת; זאת מסקנה מידית מדוגמה 7.ג.7 בספר הלימוד).

חשבו את הנפח (המוכלל) התלת־ממדי של הקבוצה $K = G\left(f|_{\overline{B^3(0;1)} \setminus \{0\}}\right)$.

שאלה 2 (25 נקודות)

נתונות הנקודות $A=(1,0,0)$, $B=(5,0,4)$, $C=(2,3,1)$

ומסילות פשוטות $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ שתמונותיהן הקטעים AB, BC, CA בהתאמה, וכך שמוגדר השרשור $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3$. חשבו את האינטגרל המסילתי $\int_{\varphi} f(x) \cdot dx$ תוך שימוש במשפט קלווין–

סטוקס, כאשר: $f: (x, y, z) \mapsto (xe^y, xze^y, 2x)$

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה שגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^k$, ונניח שהאינטגרל המוכלל $\int_{\mathbb{R}^k} |F|$ מתכנס.

הוכיחו שאם $k \geq 2$ ואם האינטגרל המוכלל $\int_{\mathbb{R}^k} \nabla \cdot F$ מתכנס אז $\int_{\mathbb{R}^k} \nabla \cdot F = 0$.

הערה: הטענה נכונה גם במקרה $k=1$.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי $a > 0$ ונתבונן במשטח החלק: $S = \{(x, y, z) \mid 4x^2 + 4y^2 + z^2 = 4a^2\}$

לכל $x \in S$ יהי $p(x)$ המרחק מראשית הצירים למישור המשיק למשטח S בנקודה x (דהיינו

המרחק המזערי בין הראשית ונקודה על מישור זה). הוכיחו שמתקיים: $\int_S \frac{1}{p} d\sigma_2 = 6\pi a$

ראו גם שאלה 2 בממ"ן 13.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2023\ב\81.

הקבוצה K אינה סגורה, ולכן הנפח מוכלל, והוא האינטגרל המוכלל: $\iint_K 1 d\sigma_3$

הוא גבול של סדרת קירוב $\iint_{K_n} 1 d\sigma_3$ כאשר למשל: $K_n = G\left(f|_{\bar{B}^3(0;1) \setminus B^3(0;\frac{1}{n})}\right)$

מטענה 17.ג.10: $\sigma_3(K_n) = \int_{K_n} 1 d\sigma_3 = \int_{\bar{B}^3(0;1) \setminus B^3(0;\frac{1}{n})} \sqrt{1+|\nabla f|^2}$

אפשר לחשב את ∇F בעזרת כלל השרשרת: מתקיים $F = \ln \circ q$ עם $q: x \mapsto |x|$ ולכן:

$$\nabla F(x) = \ln'(q(x)) \nabla q(x) = \frac{1}{q(x)} \cdot \frac{1}{|x|^2} x = \frac{1}{|x|^2} x$$

$$\sigma_3(K_n) = \int_{\bar{B}^3(0;1) \setminus B^3(0;\frac{1}{n})} \sqrt{1 + \left|\frac{1}{|x|^2} x\right|^2} dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{\bar{B}^3(0;1) \setminus B^3(0;\frac{1}{n})} \sqrt{1 + \frac{1}{|x|^2}} dx_1 dx_2 dx_3 \quad \text{אז:}$$

כעת בעזרת נוסחת Coarea (טענה 20.ג.10, לחילופין אפשר לחשב אינטגרל משולש בשיעורים ספריים):

$$\begin{aligned} \sigma_3(K_n) &= \int_{\bar{B}^3(0;1) \setminus B^3(0;\frac{1}{n})} \sqrt{1 + \frac{1}{|x|^2}} dx_1 dx_2 dx_3 \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_{S^2(0;t)} \frac{1}{|\nabla q(x)|} \sqrt{1 + \frac{1}{|x|^2}} d\sigma_2 \right) dt = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\int_{S^2(0;t)} \sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} d\sigma_2 \right) dt \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \cdot \sigma_2(S^2(0;t)) \right) dt = \int_{\frac{1}{n}}^1 \left(\sqrt{1 + \frac{1}{t^2}} \cdot 4\pi t^2 \right) dt = 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{t^2 + 1} \cdot 2t dt \end{aligned}$$

$$\sigma_3(K) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_3(K_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi \int_{\frac{1}{n}}^1 \sqrt{t^2 + 1} \cdot 2t dt = 2\pi \int_0^1 \sqrt{t^2 + 1} \cdot 2t dt \quad \text{אז:}$$

$$= 2\pi \int_1^2 \sqrt{z} dz = 2\pi \left[\frac{2}{3} z^{\frac{3}{2}} \right]_1^2 = \frac{4}{3} \pi \left(2^{\frac{3}{2}} - 1 \right) = \frac{4}{3} \pi (2\sqrt{2} - 1)$$

לשאלה 2: 2023\ב\93.

אפשר בקצת עבודה לחשב את האינטגרל המסילתי ישירות. לכן השאלה דורשת במפורש שימוש במשפט סטוקס-קלווין על המשולש ABC .

$$\nabla \times f = (-xe^y, -2, ze^y - xe^y) \quad \text{יצא לי}$$

$$\nabla \times f = (-xe^y, -2, -e^y) \quad \text{המשטח הוא המישור } x-z=1 \text{ ועליו:}$$

מניסוח משפח קלווין-סטוקס בעזרת הערה 19.ה.10 מקבלים:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} f(x) \cdot dx &= \iint_{ABC} (\nabla \times f) \cdot N d\sigma_2 = \iint_{ABC} (-xe^y, -2, -e^y) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) d\sigma_2 \\ &= \iint_{ABC} \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)e^y d\sigma_2 = \iint_{\Gamma} \frac{1}{\sqrt{2}}(x-1)e^y \sqrt{2} dx dy = \iint_{\Gamma} (x-1)e^y dx dy\end{aligned}$$

כאשר Γ הוא היטל המשולש ABC על מישור xy , ולבסוף:

$$\begin{aligned}\int_{\varphi} f(x) \cdot dx &= \iint_{\Gamma} (x-1)e^y dx dy = \int_0^3 \left(\int_{1+\frac{1}{3}y}^{5-y} (x-1)e^y dx \right) dy = \int_0^3 \left(\left[\frac{1}{2}(x-1)^2 \right]_{1+\frac{1}{3}y}^{5-y} \right) e^y dy \\ &= \int_0^3 \left(\frac{4}{9}y^2 - 4y + 8 \right) e^y dy = \left[\frac{4}{9}(y^2 - 11y + 29)e^y \right]_0^3 = \frac{4}{9}(5e^3 - 29)\end{aligned}$$

לשאלה 3: הפונקציות $|F|$ ו- $\nabla \cdot F$ הן פונקציות רציפות ב- $\mathbf{R}^k$ ולכן לפי מסקנה 24.ג.9 הן

אינטגרביליות בכל קבוצה חסומה ובעלת נפח.

נשתמש בנוסחת Coarea (דהיינו טענה 20.ג.10), עם הפונקציה $q: x \mapsto |x|$. זאת

פונקציה יסודית שמוגדרת בכל המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^k$ ולכן רציפה בו, ולפי שאלה

10.ז.3 זאת פונקציה שגזירה בקבוצה הפתוחה $U = \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, והגרדיאנט שלה הוא

$$\nabla q(x) = \frac{1}{|x|}x \quad : \text{פונקציה רציפה ב- } U$$

$$A_{\alpha,\beta} = \bar{B}^k(0;\beta) \setminus B^k(0;\alpha) \quad : \text{עבור } 0 < \alpha < \beta \text{ נסמן}$$

$$S_r = S^{k-1}(0;r) = \{x \in \mathbf{R}^k \mid q(x) = r\} \quad : r > 0 \text{ נסמן גם לכל}$$

לכל $x \in U$ מתקיים $|\nabla q(x)| = \left| \frac{1}{|x|}x \right| = \frac{1}{|x|}|x| = 1$ ולכן לפי נוסחת Coarea מתקיים:

$$\int_{A_{\alpha,\beta}} |F| = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{S_r} \frac{1}{|\nabla q|} |F| d\sigma_{k-1} \right) = \int_{\alpha}^{\beta} \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right)$$

נסמן $K_{\beta} = \bar{B}^k(0;\beta)$. זאת קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח, והסדרה $\left(A_{\frac{1}{n},\beta} \right)_{n=1}^{\infty}$

$$\int_{A_{\frac{1}{n},\beta}} |F| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{K_{\beta}} |F| \quad : \text{עולה לקבוצה } K_{\beta} \setminus \{0\}, \text{ ולכן לפי טענה 32.ה.9}$$

$$\int_{A_{\frac{1}{n},\beta}} |F| = \int_{\frac{1}{n}}^{\beta} \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^{\beta} \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right) \quad \text{לפי הגדרה 3.1 באינפי 2}$$

$$\int_{K_{\beta}} |F| = \int_0^{\beta} \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right) \quad : \text{ולכן לכל } \beta > 0 \text{ מתקיים}$$

אם $(\beta_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה עולה של מספרים חיוביים ששואפת לאינסוף אז $(K_{\beta_n})_{n=1}^{\infty}$

היא סדרה עולה של קבוצות סגורות, חסומות ובעלות נפח שעולה ל- $\mathbf{R}^k$, ולכן לפי

הגדרה 5.ח.9 מתקיים :

$$\int_{K_{\beta_n}} |F| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^k} |F|$$

מצד שני לפי אינפי 2

$$\int_{K_{\beta_n}} |F| = \int_0^\beta \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^\infty \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right)$$

ולכן

$$\int_{\mathbf{R}^k} |F| = \int_0^\infty \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right)$$

ובפרט האינטגרל $\int_0^\infty \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right)$ מתכנס. לפי תנאי קושי להתכנסות האינטגרל לכל

$\varepsilon > 0$ יש $M > 0$ כך שאם $M < \alpha < \beta$ אז:

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right) < \varepsilon$$

נסמן $\alpha_0 = 0$ ועבור n טבעי יהי M_n כזה שאם $M_n < \alpha < \beta$ אז:

$$\int_\alpha^\beta \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right) < \frac{1}{n}$$

יהי $\alpha_n > \max\{n, \alpha_{n-1} + 1, M_n\}$. אז $\alpha_n + 1 > \alpha_n > M_n$ ולכן:

$$\int_{\alpha_n}^{\alpha_n+1} \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right) < \frac{1}{n}$$

יש $r \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ עבורו $\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} < \frac{1}{n}$ כי אחרת:

$$\int_{\alpha_n}^{\alpha_n+1} \left(\int_{S_r} |F| d\sigma_{k-1} \right) \geq \int_{\alpha_n}^{\alpha_n+1} \frac{1}{n} = \frac{1}{n}$$

יהי אפוא $\beta_n \in [\alpha_n, \alpha_{n+1}]$ עבורו:

$$\int_{S_{\beta_n}} |F| d\sigma_{k-1} < \frac{1}{n}$$

עכשיו נשים לב שלפי שאלה 2.א.7 $\partial(K_{\beta_n} \setminus \partial K_{\beta_n}) = S_{\beta_n}$, ושלפי דוגמה 1.ו.10

S_{β_n} הוא משטח על חלק שלו נורמל יחידה רציף $N = \frac{1}{|x|}x$ שפונה החוצה מ- K_{β_n} . אז

מתקיימים תנאי משפט הדיברגנץ (12.ו.10) ולכן:

$$\int_{K_{\beta_n}} \nabla \cdot F = \int_{S_{\beta_n}} F \cdot N d\sigma_{k-1}$$

אז

$$\left| \int_{K_{\beta_n}} \nabla \cdot F \right| = \left| \int_{S_{\beta_n}} F \cdot N d\sigma_{k-1} \right|$$

$$\leq \int_{S_{\beta_n}} |F \cdot N| d\sigma_{k-1} \leq \int_{S_{\beta_n}} |F| \cdot |N| d\sigma_{k-1} = \int_{S_{\beta_n}} |F| d\sigma_{k-1} < \frac{1}{n}$$

ולכן $\left| \int_{K_{\beta_n}} \nabla \cdot F \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$ ומכאן:

$$\int_{K_{\beta_n}} \nabla \cdot F \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ידוע גם ש- $\beta_n \geq \alpha_n + 1 > \alpha_{n+1} \geq \beta_{n+1}$ וכן $\beta_n \geq \alpha_n > n$ ולכן $\beta_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$, ומכאן

שהסדרה $(K_{\beta_n})_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קבוצות סגורות, חסומות ובעלות נפח שעולה ל- $\mathbf{R}^k$,

ולכן הסדרה $\left(\int_{K_{\beta_n}} \nabla \cdot F \right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קירוב לאינטגרל $\int_{\mathbf{R}^k} \nabla \cdot F$ (הגדרה 2.נ.9).

נתון שהאינטגרל $\int_{\mathbf{R}^k} \nabla \cdot F$ מתכנס, ולפי הגדרה 5.נ.9: $\int_{K_{\beta_n}} \nabla \cdot F \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbf{R}^k} \nabla \cdot F$.
 לכן $\int_{\mathbf{R}^k} \nabla \cdot F = 0$.

עבור $k=1$ הפונקציה F היא פונקציה של משתנה אחד שגזירה ברציפות בכל הישר

והטענה בשאלה היא: אם $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$ מתכנס בהחלט וגם $\int_{-\infty}^{\infty} F'(x) dx$ מתכנס אז

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(x) dx = 0. \text{ כאן ידוע ש- } \int_0^{\infty} F'(x) dx \text{ ו- } \int_{-\infty}^0 F'(x) dx \text{ מתכנסים ולכן מתקיים}$$

$$F(t) - F(0) = \int_0^t F'(x) dx \xrightarrow{t \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} F'(x) dx$$

ולכן קיים הגבול של $F(x)$ כאשר $x \rightarrow \infty$, והוא בהכרח 0 כי $\int_0^{\infty} F(x) dx$ מתכנס.

$$\int_{-\infty}^0 F'(x) dx = F(0) \quad \text{לכן } \int_0^{\infty} F'(x) dx = -F(0). \text{ בדומה } F(x) \xrightarrow{x \rightarrow -\infty} 0 \text{ ולכן:}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} F'(x) dx = \int_{-\infty}^0 F'(x) dx + \int_0^{\infty} F'(x) dx = F(0) - F(0) = 0 \quad \text{לבסוף:}$$

למעשה נחוצה הייתה רק התכנסות ולא התכנסות בהחלט של $\int_{-\infty}^{\infty} F(x) dx$, וגם

רציפות הנגזרת לא הייתה נחוצה.

שאלה 4: 2023\ב\916.

חלק ממה שצריך בשאלה זאת כבר חושב בשאלה 2 בממ"ן 13.

שאלה מדף מצולם שקיבלתי מחזי (שנראה שצולם מ־Gillespie/Integration, עמוד 67).

באופן יותר כללי אפשר לקחת $F: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ שהיא גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbf{R}^k$ וכן

$$f(x) > 0 \text{ לכל } x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\} \text{ ו- } F \text{ הומוגנית חיובית ממעלה 2 ב- } \mathbf{R}^k \setminus \{0\} \text{ ולהגדיר}$$

$$S = \{x \mid F(x) = 1\} \text{ ו- } K = \{x \mid F(x) \leq 1\} \text{ ולהוכיח שהלפלסיאן של } F \text{ קבוע (כל רכיבי}$$

ההסיאן הם פונקציות הומוגניות חיוביות ממעלה 0 וגם רציפות ב-0 ולכן קבועות)

$$\int_S \frac{1}{p} d\sigma_{k-1} = \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla F(0) \cdot \text{vol}_k(K) \quad \text{ושמתקיים:}$$

בכל אופן, מישור (העל) המשיק הוא $x + T_x(S)$ ו- $\{z \mid \nabla F(x) \cdot z = 0\}$ לפי $T_x(S)$.

דוגמה 6.7.6 המרחק $p(x)$ הוא אורך הניצב מהראשית למישור המשיק, וניצב זה

פרופורציוני ל- $\nabla F(x)$. לכן $\nabla F(x) \in x + T_x(S)$ ולכן $\pm p(x) \frac{1}{|\nabla F(x)|} \nabla F(x) \in x + T_x(S)$:

$$\pm p(x) \frac{1}{|\nabla F(x)|} \nabla F(x) - x \in T_x(S)$$

$$\left(\pm p(x) \frac{1}{|\nabla F(x)|} \nabla F(x) - x \right) \cdot \nabla F(x) = 0$$

$$\pm p(x) \frac{1}{|\nabla F(x)|} \nabla F(x) \cdot \nabla F(x) = x \cdot \nabla F(x)$$

$$\pm p(x) |\nabla F(x)| = x \cdot \nabla F(x) = 2F(x) = 2 > 0$$

בשורה האחרונה נעשה שימוש בזהות אוילר לפונקציה הומוגנית חיובית מסדר 2.

הסימן הוא "+", ובהכרח הגורמים באגף ימין אינם אפס ולכן: $\frac{1}{p(x)} = \frac{1}{2} |\nabla F(x)|$

$$\int_S \frac{1}{p} d\sigma_{k-1} = \frac{1}{2} \int_S |\nabla F| d\sigma_{k-1} = \frac{1}{2} \int_S \frac{\nabla F \cdot \nabla F}{|\nabla F|} d\sigma_{k-1} \quad \text{אז:}$$

$$= \frac{1}{2} \int_S \nabla F \cdot \frac{1}{|\nabla F|} \nabla F d\sigma_{k-1} = \frac{1}{2} \int_S \nabla F \cdot N d\sigma_{k-1}$$

$$= \frac{1}{2} \int_K \nabla \cdot \nabla F = \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla F(0) \int_K 1 = \frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla F(0) \cdot \text{vol}_k(K)$$

כאשר השתמשתי בכך ש- $N = \frac{1}{|\nabla F(x)|} \nabla F(x)$ נורמל יחידה רציף ל- S בנקודה x

שעליה, ובמשפט הדיוורגנץ, ולא בדקתי אם הוא פונה פנימה או החוצה, אבל אפשר

לקבוע שהוא פונה החוצה לפי זה ש $\frac{1}{2} \nabla \cdot \nabla F(0) = \sum_{i=1}^k F(e_i) > 0$.

בשאלה הספציפית שלנו $\nabla F(x, y, z) = \frac{1}{a^2} (2x, 2y, \frac{1}{2}z)$ ו- $F(x, y, z) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{4a^2}$

$$\text{ולכן } HF_{(x,y,z)} = \frac{1}{a^2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\nabla \cdot \nabla F = \text{div}(\nabla F) = \frac{1}{a^2} \left(2 + 2 + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2a^2} (4 + 4 + 1) = \frac{9}{2a^2}$$

$$\int_S \frac{1}{p} d\sigma_2 = \frac{9}{4a^2} \cdot \text{vol}_3(K) \quad \text{ומכאן:}$$

את הנפח של K אפשר לחשב על ידי החלפת משתנים $(x, y, z) \mapsto (x, y, 2z)$ ולראות

שהוא פעמיים נפח כדור ברדיוס a כלומר $\text{vol}_3(K) = 2 \cdot \frac{4}{3} \pi a^3 = \frac{8}{3} \pi a^3$

$$\int_S \frac{1}{p} d\sigma_2 = \frac{9}{4a^2} \cdot \frac{8}{3} \pi a^3 = 6\pi a \quad \text{ולכן:}$$