

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 מספר השאלות: 4
 מועד אחרון להגשה: 26.5.2024
 סמסטר: 1א2024
 משקל המטלה: 4 נקודות

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")	
• באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).	
• באמצעות מערכת המטלות המקוונת.	

שאלה 1 (25 נקודות)

- א. תהי A קבוצה בעלת נפח. הראו שאם $c < \text{vol}_k A$ אז יש קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח K כך ש- $K \subseteq A$ ו- $\text{vol}_k K > c$.
- ב. תהי U קבוצה לא ריקה ב- $\mathbb{R}^k$ שהיא פתוחה, קשורה מסילתית ובעלת נפח. יהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפאומורפיזם המקיים $\varphi(U) = U$. הראו שיש $x \in U$ כך ש- $|\det J\varphi_x| = 1$.
- ג. הראו בעזרת דוגמאות מתאימות שבסעיף ב אף אחת משתי ההנחות ש- U קשורה מסילתית וש- U בעלת נפח אינה מיותרת, כלומר בלעדי כל אחת מהנחות אלה המסקנה אינה הכרחית.

שאלה 2 (25 נקודות)

- תהי B קבוצה סגורה בעלת נפח $k-1$ ממדי ב- $\mathbb{R}^{k-1}$. נסמן: $C = \{(tx, t) \mid t \in [0, 1], x \in B\}$ (זאת תת-קבוצה של $\mathbb{R}^k$ המזוהה עם $\mathbb{R}^{k-1} \times \mathbb{R}$).
- א. הוכיחו ש- C היא קבוצה בעלת נפח k ממדי.
- ב. נניח ש- $\text{vol}_{k-1}(B) = 1$ ויהי $b \in \mathbb{R}^{k-1}$ המרכז הגיאומטרי של B . מצאו את הנפח ואת המרכז הגיאומטרי של C .

שאלה 3 (25 נקודות)

- יהי α מספר ממשי חיובי. תהי: $K = \{(x, y, z) \mid x^4 + y^4 + z^4 \leq \alpha^4\}$
- הוכיחו: $\text{vol}_3 K = \frac{\Gamma(\frac{1}{4})^4}{6\pi\sqrt{2}} \alpha^3$
- הדרכה: כדאי להשתמש בהחלפת משתנים מתאימה. הסימן Γ מציין את פונקציית גמא מדוגמה 1.ד.4. יכול להועיל בשלב מסוים להוכיח ש- $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta = \frac{1}{2} B(p, q)$ (כאן B מציין את פונקציית בֶּטָא מדוגמה 13.ח.9).

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbb{R}^2$, גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, שהיא הומוגנית-חיובית ממעלה 2, וכן $f(x,y) > 0$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. תהי $K = \{(x,y) \mid f(x,y) \leq 1\}$

א. הראו שהפונקציה $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{f(\cos t, \sin t)}}(\cos t, \sin t)$

היא לולאה פשוטה סדירה ש- K שוכנת לשמאלה.

ב. תהי $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ פונקציה המוגדרת על ידי $(x,y) \mapsto \frac{1}{f(x,y)}(-y,x)$

ותהי ψ לולאה שאורכה סופי ו- $(0,0)$ אינה בתמונתה.

הוכיחו שמספר הליפוף של ψ סביב ראשית הצירים הוא: $\frac{1}{2 \text{vol}_2 K} \int_{\psi} F \cdot d(x,y)$

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: סעיף ב זה הרחבה של 3\14\2022, כאשר U באה במקום כדור היחידה. א. נועד לשמש טענת עזר לִב.

תמונת $|\det J\varphi|$ היא קטע ואם 1 לא נמצא בו אז בה"כ (על ידי החלפת φ ב־ φ^{-1} לפי הצורך) כל איבריו גדולים מ־1. לכל $K \subseteq U$ סגורה, חסומה ובעלת נפח חיובי יש מינימום גדול מ־1 ל־ $|\det J\varphi|$ ב־ K ולכן $\int_K |\det J\varphi| > \text{vol}_k(K)$. $\text{vol}_k(\varphi(K)) = \int_K |\det J\varphi|$

אז $\text{vol}_k(\varphi(U \setminus K)) < \text{vol}_k(U \setminus K)$ ועכשיו צריך לספק סתירה על ידי מציאת תת־

קבוצה קומפקטית מספיק גדולה בתוך $U \setminus K$. ואת זה מקבלים מסעיף א: יש L

סגורה וחסומה ובעלת נפח כך ש־ $L \subseteq U \setminus K$ וגם $\text{vol}_k L > \text{vol}_k \varphi(U \setminus K)$.

אז: $\text{vol}_k \varphi(U \setminus K) < \text{vol}_k L < \text{vol}_k \varphi(L) \leq \text{vol}_k \varphi(U \setminus K)$

והתקבלה סתירה.

לסעיף א אפשר להשתמש בסכומי דארבו: תהי B תיבה מיושרת סגורה שמכילה

את A . אז: $c < \text{vol}_k A = \int_A 1 = \int_B \chi_A = \sup \{ \int_B \chi_P \mid P \in \hat{\Pi}(B) \}$

לכן יש פירוק $P \in \hat{\Pi}(B)$ כך ש־ $c < \int_B \chi_P$, כלומר:

$$c < \sum_{\Gamma \in P} \left(\inf \{ \chi_A(x) \mid x \in \Gamma \} \right) \text{vol}_k \Gamma$$

אם $\Gamma \subseteq A$ אז לכל $x \in \Gamma$ מתקיים $\chi_A(x) = 1$ ולכן $\inf \{ \chi_A(x) \mid x \in \Gamma \} = 1$. אחרת

יש $x \in \Gamma$ עבורו מתקיים $\chi_A(x) = 0$ ולכן $\inf \{ \chi_A(x) \mid x \in \Gamma \} = 0$. אם נסמן

$$c < \sum_{\Gamma \in \Omega_+} \text{vol}_k \Gamma = \text{vol}_k \left(\bigcup_{\Gamma \in \Omega_+} \Gamma \right) \quad \text{אז: } \Omega_+ = \{ \Gamma \in P \mid \Gamma \subseteq A \}$$

הקבוצה $K = \bigcup_{\Gamma \in \Omega_+} \Gamma$ היא איחוד מספר סופי של תת־קבוצות סגורות, חסומות ובעלות

נפח של A ולכן היא תת־קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח של A .

בסעיף ג: אם לוקחים $U = \mathbf{R}^k$ ו־ $\varphi: x \mapsto 2x$ אז $\det J\varphi_x = 2^k \neq 1$, ו־ U קשורה־

מסילתית ואינה בעלת נפח כי אינה חסומה.

אם לוקחים למשל $U = (-1, 0) \cup (0, 2)$ והפונקציה $\varphi: x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases}$

אז U בעלת נפח ואינה קשורה־מסילתית וכן: $\det J\varphi_x = \varphi'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases}$

לשאלה 2: סעיף א זה 5\93\2023. סעיף ב זה 5\81\2023.

בסעיף א צריך להראות שהפונקציה הקבועה 1 אינטגרבילית ב־ C . בסימוני מסקנה

26.1.9 (בערך) נקבל עבור $t \in \Lambda = [0, 1]$ ש- $C_t = tB = \{tx \mid x \in B\}$ וזאת קבוצה בעלת

נפח $k-1$ ממדי למשל בתור תמונה של B על ידי פונקציה אפינית הפיכה. אז מסקנה

26.1.9 מבטיחה ש-1 אינטגרלית בקבוצה C .

אפשרות אחרת היא להשתמש במשפט החלפת משתנים עם הפונקציה

$\varphi: (x, t) \mapsto (tx, t)$ שמשרה דיפאומורפיזם מ- $U = \mathbf{R}^{k-1} \times (0, \infty)$ לעצמו, וכאן כדי

להצליח להשתמש במשפט 23.1.9 צריך בעצם להסתכל על הקבוצות

$C \cap (\mathbf{R}^{k-1} \times [\varepsilon, \infty))$ ולהשתמש באיזה טיעון על ההבדל הקטן בין השפות שלהן

ושל C . אפשר גם לתאר את השפה של C בעזרת B ו- ∂B ולהוכיח שזאת קבוצה

צנומה. אולי יש טענה שפספסתי שמאפשרת הוכחה קצרה יותר.

בסעיף ב צריך לחשב את האינטגרלים $\int_C f$ עבור $f: x \mapsto 1$ ועבור $f: x \mapsto x_i$.

אפשר בעזרת החלפת משתנים עם $\varphi: (x, t) \mapsto (tx, t)$ ולשם כך צריך בעצם להשתמש

בסדרת קירוב עם הקבוצות $C_n = C \cap (\mathbf{R}^{k-1} \times [\frac{1}{n}, \infty))$, ואפשר להשתמש במסקנה

$$26.1.9. \text{ מקבלים: } \int_C f = \int_0^1 \left(\int_{C_t} f(z, t) dz_1 \cdots dz_{k-1} \right) dt = \int_0^1 \left(t^{k-1} \int_B f(tx, t) dx_1 \cdots dx_{k-1} \right) dt$$

$$\text{אז: } \text{vol}_k(C) = \int_C 1 = \int_0^1 \left(t^{k-1} \int_B 1 dx_1 \cdots dx_{k-1} \right) dt = \text{vol}_{k-1}(B) \int_0^1 t^{k-1} dt = 1 \cdot \frac{1}{k} = \frac{1}{k}$$

$$\text{עבור } i < k: \int_C x_i = \int_0^1 \left(t^{k-1} \int_B tx_i dx_1 \cdots dx_{k-1} \right) dt = \int_0^1 t^k dt \cdot \int_B x_i dx_1 \cdots dx_{k-1} = \frac{1}{k+1} \cdot b_i$$

ועבור $i = k$:

$$\int_C x_i = \int_0^1 \left(t^{k-1} \int_B t dx_1 \cdots dx_{k-1} \right) dt = \int_0^1 t^k dt \cdot \int_B 1 dx_1 \cdots dx_{k-1} = \frac{1}{k+1} \cdot \text{vol}_{k-1}(B) = \frac{1}{k+1}$$

אם $c \in \mathbf{R}^k$ המרכז הגיאומטרי של C אז עבור $i < k$ מתקיים

$$c_i = \frac{1}{\text{vol}_k(C)} \int_C x_i = \frac{\frac{1}{k+1} \cdot b_i}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \cdot b_i$$

$$\text{עבור } i = k \text{ מתקיים: } c_i = \frac{1}{\text{vol}_k(C)} \int_C x_i = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1}$$

$$c = \frac{k}{k+1}(b, 1) \quad \text{כלומר:}$$

לשאלה 3: השאלה לפי אתר madasmaths.com (שאלה אחרונה בקובץ Jacobians).

ברור ש- $(x, y, z) \in K$ אם ורק אם $(x^2, y^2, z^2) \in \bar{B}(0^{[3]}; \alpha^2)$, כלומר:

$$K = \varphi^{-1}(\bar{B}(0^{[3]}; \alpha^2))$$

כאשר: $\varphi: (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2)$

נרצה, אם כן, להשתמש בהחלפת משתנים עם φ , אלא שזאת אינה "החלפת משתנים" כלומר אינה דיפאומורפיזם: למשל היא אינה חד־חד־ערכית ב־ K . ובכל זאת: היא דיפאומורפיזם בקבוצה $U = (0, \infty)^3$, ואחרי כמה הכנות נוכל להיעזר בה.

נסמן $B = [0, \infty)^3 \cap \bar{B}(0^{[3]}; \alpha^2)$ (זאת קבוצה בעלת נפח, למשל כחיתוך של כדור ותיבה). נסמן גם $A = [0, \infty)^3 \cap K$. גם זאת קבוצה בעלת נפח (למשל אפשר לבדוק

שהיא קמורה ולהשתמש בטענה 26.ג.9, ואפשר גם להסיק זאת בעזרת שאלות 19.ד.9 ו־20.ד.9). הפונקציה φ היא חד־חד־ערכית על A ומתקיים $A = \varphi^{-1}(B)$ ובאופן שקול

גם $B = \varphi(A)$. ראשית נראה ש־ $\text{vol}_3 K = 8 \text{vol}_3 A$ ואחרי כל נחשב את הנפח של A .

ובכן נסמן: $\psi_{i_x, i_y, i_z}: (x, y, z) \mapsto ((-1)^{i_x} x, (-1)^{i_y} y, (-1)^{i_z} z)$

אלה העתקות חפיפה ולכן לכל ערך של (i_x, i_y, i_z) מתקיים: $\text{vol}_3 \psi_{i_x, i_y, i_z}(A) = \text{vol}_3 A$

ברור גם שאם $\psi_{i_x, i_y, i_z}(A) \neq \psi_{j_x, j_y, j_z}(A)$ אז

$$\psi_{i_x, i_y, i_z}(A) \cap \psi_{j_x, j_y, j_z}(A) \subseteq (\{0\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \{0\})$$

ואגף ימין קבוצה צנומה, ולכן החיתוכים באגף שמאל הם קבוצות סגורות וחסומות

$$K = \bigcup_{(i_x, i_y, i_z) \in \{0,1\}^3} \psi_{i_x, i_y, i_z}(A) \quad \text{ובעלות נפח אפס, וכן}$$

$$\text{vol}_3 K = \sum_{(i_x, i_y, i_z) \in \{0,1\}^3} \text{vol}_3 \psi_{i_x, i_y, i_z}(A) = 8 \text{vol}_3 A \quad \text{ולכן מטענה 18.ג.9 נקבל:}$$

נותר לחשב את $\text{vol}_3 A$. נרצה להשתמש בפונקציה φ ובמסקנה 34.ז.9.

נסמן $B_n = [\frac{1}{n}, \infty)^3 \cap B$ ו־ $A_n = U \cap \varphi^{-1}(B_n)$. הצמצום $\varphi|_U$ הוא הפונקציה חד־חד־

ערכית ולכן גם $\varphi(A_n) = B_n$. לא קשה לבדוק שמתקיים

$$A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A \cap ((\{0\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \{0\}))$$

ואגף ימין הוא קבוצה סגורה וחסומה וצנומה, ולכן גם נפחה אפס. בדומה

$$B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq B \cap ((\{0\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \{0\}))$$

וגם כאן אגף ימין הוא קבוצה ש־נפחה אפס.

$$J\varphi: (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \quad \text{הפונקציה } \varphi \text{ גזירה ברציפות וכן:}$$

$$\det J\varphi: (x, y, z) \mapsto 8xyz \quad \text{לכן:}$$

אז $\varphi|_U$ היא דיפאומורפיזם, ומסקנה 35.9.ז.9 אומרת לנו שלכל f שרציפה ב- B

$$\int_B f = \int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |\det J\varphi| \quad \text{מתקיים:}$$

אנו מעוניינים בחישוב $\text{vol}_3 A = \int_A 1$ ולכן נרצה לבחור את f כך ש- $(f \circ \varphi) |\det J\varphi| = 1$

. לכל $(x, y, z) \in A$ מתקיים

$$(f \circ \varphi) |\det J\varphi|(x, y, z) = f(\varphi(x, y, z)) |8xyz| = 8xyz \cdot f(x^2, y^2, z^2)$$

$$f(x^2, y^2, z^2) = \frac{1}{8} x^{-1} y^{-1} z^{-1} \quad \text{ולכן נרצה:}$$

$$f(u, v, w) = \frac{1}{8} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} \quad \text{הצבה של } x = u^{\frac{1}{2}}, y = v^{\frac{1}{2}}, z = w^{\frac{1}{2}} \text{ נותנת:}$$

אלא מה? זאת אינה פונקציה רציפה ב- B ! לא נרים ידיים, שכן עשויים אנו ללא חת! בכל אחת מהקבוצות B_n הפונקציה הזאת רציפה, ולכן לפי מסקנה 26.9.ז.9 מתקיים:

$$\int_{B_n} f = \int_{\varphi(A_n)} f = \int_{A_n} (f \circ \varphi) |\det J\varphi| = \int_{A_n} 1 = \text{vol}_3 A_n$$

מטענה 32.9.ה.9 $\text{vol}_3 A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{vol}_3 A$ ואילו הסדרה $\left(\int_{B_n} f \right)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קירוב

$$\text{לאינטגרל המוכלל } \int_{B \cap U} f \text{ לכן: } \text{vol}_3 A = \int_{B \cap U} f$$

נותר לחשב את האינטגרל המוכלל $\int_{B \cap U} f$. הקבוצה B היא שמינית כדור סביב

הראשית, ולכן טענה 42.9.ז.9 הייתה מתאימה לנו מאוד אילו היה מדובר באינטגרל של

f שרציפה בקבוצה B . טענה זאת מוכחת בעזרת טענה 35.9.ז.9, ואפשר כמו שהוצג

לעיל לנסח ולהוכיח גרסה שלה גם לאינטגרל מוכלל כמו שיש לנו. לא אפרט את

ההוכחה במקרה זה ופשוט אשתמש בנוסחה: הקבוצה $B \cap U$ תשמש במקום

הקבוצה K בניסוח טענה 42.9.ז.9. בסימון A כבר השתמשנו לדבר אחר, ולכן נשתמש

במקומו ב- D . דרושה לנו $D \subseteq [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ כך שמתקיים $(r, \phi, \theta) \in D$ אם

$$\text{ורק אם } (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \in B \cap U \text{ ואפשר לראות שהקבוצה}$$

$$D = \left(0, \alpha^2\right] \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \quad \text{המתאימה היא:}$$

אז

$$\begin{aligned}
\int_{B \cap U} f &= \iiint_D f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{8} \iiint_D r^{-\frac{1}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \phi \cos^{-\frac{1}{2}} \theta r^{-\frac{1}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \phi \sin^{-\frac{1}{2}} \theta r^{-\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \phi r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{8} \iiint_D r^{\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \theta \sin^{-\frac{1}{2}} \phi \cos^{-\frac{1}{2}} \phi dr d\theta d\phi \\
&= \frac{1}{8} \left(\int_0^{\alpha^2} r^{\frac{1}{2}} dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \theta \sin^{-\frac{1}{2}} \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \phi d\phi \right)
\end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון הוא שימוש כפול בטענה 3.1.9 (גרסה פשוטה של משפט פוביני).

$$\int_0^{\alpha^2} r^{\frac{1}{2}} dr = \left[\frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\alpha^2} = \frac{2}{3} (\alpha^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \alpha^3$$

אפשר לחשב כל אחד מהגורמים:

$$\text{ובעזרת הנוסחה } B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta$$

כה נקבל:

$$\begin{aligned}
\text{vol}_3 K &= 8 \text{vol}_3 A = 8 \int_{B \cap U} f = \left(\int_0^{\alpha^2} r^{\frac{1}{2}} dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \theta \sin^{-\frac{1}{2}} \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \phi d\phi \right) \\
&= \frac{2}{3} \alpha^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \alpha^3 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\
&= \frac{1}{6} \alpha^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{6} \alpha^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\pi \sqrt{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{6\pi \sqrt{2}} \alpha^3
\end{aligned}$$

כאשר בחישוב נעשה שימוש גם בנוסחאות מדוגמה 13.נ.9 ושאלה 16.נ.9.

לבסוף נוכיח כמובטח את הנוסחה שנעשה בה שימוש, וזאת בעזרת ההצבה $x = \cos^2 \theta$ (ר' $dx = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta$):

$$\begin{aligned}
B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} \theta d\theta \\
&= \int_0^1 (\cos^2 \theta)^{p-1} (1 - \cos^2 \theta)^{q-1} (-2) \cos \theta \sin \theta d\theta \\
&= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta)^{p-1} (\sin^2 \theta)^{q-1} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta
\end{aligned}$$

שאלה 4: מבוסס על אותו רעיון כמו 2021ב\5.

נסמן $u(t) = (\cos t, \sin t)$ ו- $r(t) = \frac{1}{\sqrt{f(u(t))}}$ אז $\varphi(t) = r(t)u(t)$ ובקיצור $\varphi = ru$.

הפונקציות u ו- f רציפות ולכן גם r ו- φ רציפות. מתקיים $u(2\pi) = (1, 0) = u(0)$

ולכן גם $r(2\pi) = r(0)$ ו- $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$ ולכן φ היא לולאה. היא לולאה פשוטה,

למשל לפי תכונות ההצגה הקוטבית של נקודות במישור (אם $t_1 \neq t_2$ ו- $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ אז $\varphi(t_1)$ ו- $\varphi(t_2)$ הם וקטורים בכיוונים שונים במישור).

נשתמש ב- $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – מטריצת הסיבוב שמאלה ב- 90° .

$$\dot{u}(t) = (-\sin t, \cos t) = u(t)J \quad \text{אז}$$

$$\dot{u}(t)J = u(t)J^2 = -u(t) \quad \text{ולכן גם:}$$

$$\text{מתקיים } r(t) = f(u(t))^{-\frac{1}{2}} \text{ ולכן}$$

$$r'(t) = -\frac{1}{2} f(u(t))^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{d}{dt} f(u(t)) = -\frac{1}{2} r(t)^3 \nabla f(u(t)) \cdot \dot{u}(t)$$

ובפרט r פונקציה גזירה ברציפות. אז גם φ גזירה ברציפות ומתקיים:

$$\dot{\varphi}(t) = r'(t)u(t) + r(t)\dot{u}(t) = r'(t)u(t) + r(t)u(t)J$$

$$|\dot{\varphi}(t)|^2 = \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad \text{לכן:}$$

$$\begin{aligned} &= r'(t)^2 \underbrace{u(t) \cdot u(t)}_1 + 2r'(t)r(t) \underbrace{u(t) \cdot u(t)J}_0 + r(t)^2 \underbrace{u(t)J \cdot u(t)J}_1 \\ &= r'(t)^2 + r(t)^2 > 0 \end{aligned}$$

אז הלולאה φ היא לולאה סדירה.

לפי הנתון ש- f היא פונקציה הומוגנית-חיובית ממעלה 2 לכל $t \in [0, 2\pi]$ מתקיים:

$$f(\varphi(t)) = f(r(t)u(t)) = r(t)^2 f(u(t)) = \frac{1}{f(u(t))} f(u(t)) = 1$$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad \text{לפי כלל השרשרת}$$

אבל הנגזרת של פונקציה קבועה היא 0 ולכן:

$$0 = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t) + r(t)u(t)J)$$

נשתמש בעוד דרך בנתון ש- f היא פונקציה הומוגנית-חיובית ממעלה 2: לפי דוגמה

$$11.ב.3. \quad a \cdot \nabla f(a) = 2f(a) \quad \text{זהות אוילר}$$

$$\varphi(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) = 2f(\varphi(t)) = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{אז}$$

$$u(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) = \frac{1}{r(t)} \varphi(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) = \frac{2}{r(t)} \quad \text{ולכן:}$$

$$0 = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t) + r(t)u(t)J) \quad \text{ראינו קודם:}$$

$$\begin{aligned} &= r'(t)u(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) + r(t)u(t)J \cdot \nabla f(\varphi(t)) \\ &= \frac{2r'(t)}{r(t)} + r(t)u(t)J \cdot \nabla f(\varphi(t)) \end{aligned}$$

$$u(t)J \cdot \nabla f(\varphi(t)) = -\frac{2r'(t)}{r(t)^2} \quad \text{ולכן:}$$

נגדיר עכשיו, עבור $t \in [0, 2\pi]$ קבוע פונקציה $g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ על ידי:

$$g(\lambda) = f(\varphi(t) + \lambda \dot{\varphi}(t)J)$$

$$g'(0) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)J \quad \text{לפי כלל השרשרת:}$$

$$\text{ראינו קודם } \dot{\varphi}(t) = r'(t)u(t) + r(t)u(t)J \quad \text{ולכן:}$$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \nabla f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)J = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t) + r(t)u(t)J)J \\ &= \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t)J + r(t)u(t)J^2) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t)J - r(t)u(t)) \\ &= r'(t)u(t)J \cdot \nabla f(\varphi(t)) - r(t)u(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) = -\frac{2r'(t)^2}{r(t)^2} - 2 < 0 \end{aligned}$$

מכך ש- $g'(0) < 0$ נובע שיש $\delta > 0$ כך שאם $\lambda \in (0, \delta)$ אז $g(\lambda) < g(0)$ כלומר

$$f(\varphi(t) + \lambda \dot{\varphi}(t)J) < f(\varphi(t)) = 1$$

$$\varphi(t) + \lambda \dot{\varphi}(t)J \in K \quad \text{ולכן}$$

$$f(\varphi(t) + \lambda \dot{\varphi}(t)J) > f(\varphi(t)) = 1 \quad \text{וגם } g(-\lambda) > g(0) \quad \text{כלומר}$$

$$\varphi(t) - \lambda \dot{\varphi}(t)J \notin K \quad \text{ולכן}$$

ולפי הגדרה 5.ט.9 הקבוצה K שוכנת לשמאל הלולאה φ .

לסעיף ב: הקבוצה K היא קבוצה סגורה לפי מסקנה 23.ד.2, שלפיה גם:

$$\partial K \subseteq \{(x, y) \mid f(x, y) = 1\}$$

$$f(t, 0) = t^2 f(1, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{מתקיים } f(t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f(0, 0) \text{ וגם:}$$

$$(x, y) \in K \quad \text{ולכן } f(0, 0) = 0 \text{ ובפרט } (0, 0) \in K \setminus \partial K. \text{ אם } f(x, y) = 1 \text{ אז מתקיים}$$

$$\text{ובנוסף } t(x, y) \xrightarrow{t \rightarrow 1^+} (x, y) \text{ ולכן בכל סביבה של } (x, y) \text{ יש נקודה } t(x, y) \text{ עם } t > 1$$

$$\text{ומתקיים } f(t(x, y)) = t^2 f(x, y) = t^2 > 1 \text{ ולכן } t(x, y) \notin K, \text{ כלומר בכל סביבה של}$$

$$(x, y) \text{ יש נקודות מ-} K \text{ ומ-} \mathbf{R}^2 \setminus K \text{ ולכן } (x, y) \in \partial K. \text{ אז } \partial K = \{(x, y) \mid f(x, y) = 1\}$$

$$\text{ראינו שלכל } t \in [0, 2\pi] \text{ מתקיים } f(\varphi(t)) = 1 \text{ ולכן תמונת } \varphi \text{ מוכלת ב-} \partial K. \text{ מצד שני}$$

$$\text{אם } (x, y) \in \partial K \text{ אז } f(x, y) = 1 \text{ ובפרט } (x, y) \neq (0, 0). \text{ אז יש } \theta \in [0, 2\pi] \text{ ו-} r > 0 \text{ כך}$$

$$1 = f(x, y) = f(ru(\theta)) = r^2 f(u(\theta)) \quad \text{אז } (x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta) = ru(\theta)$$

$$r = \frac{1}{\sqrt{f(u(\theta))}} = r(\theta) \quad \text{ולכן}$$

$$\text{ולכן } (x, y) = r(\theta)u(\theta) = \varphi(\theta). \text{ אז } \partial K \text{ מוכלת בתמונת } \varphi \text{ ולכן } \partial K \text{ היא תמונת } \varphi.$$

ממה שקיבלנו עד כה אפשר להסיק מיד, בעזרת שאלה 22.ט.9 שמספר הליפוף של φ

סביב הראשית הוא 1.

משאלה 10.ח.8 נקבל שיש מספר γ_F שמקיים

$$\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \gamma_F$$

וכן אם n הוא מספר הליפוף של ψ סביב הראשית אז :

$$\oint_{\psi} F \cdot d(x, y) = \gamma_F n$$

אז

$$n = \frac{\oint_{\psi} F \cdot d(x, y)}{\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y)}$$

וכדי לסיים נותר להראות שמתקיים :

$$\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = 2 \operatorname{vol}_2 K$$

נשים לב שלפי מה שהוכחנו כבר הקבוצה K יחד עם המסילה φ מקיימות את הנחות

משפט גרין, ונסמן $P(x, y) = -y$ ו $Q(x, y) = x$. לכל (x, y) בתמונת φ מתקיים

$f(x, y) = 1$ ולכן $(x, y) \in \partial K$ ומכאן : $F(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}(-y, x) = (P(x, y), Q(x, y))$

ולכן בעזרת משפט גרין :

$$\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \oint_{\varphi} (P(x, y), Q(x, y)) \cdot d(x, y) = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \iint_K (1 + 1) = 2 \operatorname{vol}_2 K$$