

מתווה לפתרון ממ"ן 15

סמסטר: 1א2024

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה: 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה: פרק 9

שאלה 1 (25 נקודות)

א. תהי A קבוצה בעלת נפח. הראו שאם $c < \text{vol}_k A$ אז יש קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח K כך ש- $K \subseteq A$ ו- $\text{vol}_k K > c$.

ב. תהי U קבוצה לא ריקה ב- $\mathbb{R}^k$ שהיא פתוחה, קשורה-מסילתית ובעלת נפח. יהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^k$ דיפאומורפיזם המקיים $\varphi(U) = U$. הראו שיש $x \in U$ כך ש- $|\det J\varphi_x| = 1$.

ג. הראו בעזרת דוגמאות מתאימות שבסעיף ב אף אחת משתי ההנחות ש- U קשורה-מסילתית וש- U בעלת נפח אינה מיותרת, כלומר בלעדי כל אחת מהנחות אלה המסקנה אינה הכרחית.

פתרון סעיף א

תהי B תיבה מיושרת סגורה שמכילה את A .

$$c < \text{vol}_k A = \int_A 1 = \int_B \chi_A = \sup \left\{ \int_B \chi_P \mid P \in \hat{\Pi}(B) \right\} \quad \text{מתקיים:}$$

$$c < \underline{S}_P(\chi_A) = \sum_{\Gamma \in P} \left(\inf \{ \chi_A(x) \mid x \in \Gamma \} \right) \text{vol}_k \Gamma \quad \text{לכן יש פירוק } P \in \hat{\Pi}(B) \text{ עבורו:}$$

$$\text{אם } \Gamma \subseteq A \text{ אז לכל } x \in \Gamma \text{ מתקיים } \chi_A(x) = 1 \text{ ולכן } \inf \{ \chi_A(x) \mid x \in \Gamma \} = 1.$$

$$\text{אחרת יש } x \in \Gamma \text{ עבורו מתקיים } \chi_A(x) = 0 \text{ ולכן } \inf \{ \chi_A(x) \mid x \in \Gamma \} = 0.$$

$$c < \sum_{\Gamma \in \Omega_+} \text{vol}_k \Gamma = \text{vol}_k \left(\bigcup_{\Gamma \in \Omega_+} \Gamma \right) \quad \text{אם נסמן } \Omega_+ = \{ \Gamma \in P \mid \Gamma \subseteq A \} \text{ אז:}$$

תיבה סגורה היא קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח, ו- Ω_+ היא קבוצה סופית, הקבוצה

$$K = \bigcup_{\Gamma \in \Omega_+} \Gamma \text{ היא כמובן חסומה, לפי חלק ד של טענה 24.א.2 היא סגורה, ומחלק א של טענה}$$

18.ג.9 נובע שהיא בעלת נפח, והיא תת-קבוצה של A .

פתרון סעיף ב

נניח בשלילה שהטענה אינה נכונה, כלומר שלכל $x \in U$ מתקיים $|\det J\varphi_x| \neq 1$.

הפונקציה φ היא דיפאומורפיזם מהקבוצה U לקבוצה $U = \varphi(U)$. לפי הערה 24.ז.9

הפונקציה $f: x \mapsto |\det J\varphi_x|$ רציפה ב- U . לפי טענה 2.ט.2 והנתון ש- U קשורה-מסילתית תמונתה

$f(U)$ קשורה-מסילתית, ולפי טענה 10.ט.2 $f(U)$ קמורה. לפי הנחת השלילה המספר $1 \notin f(U)$

ומאחר ש- $f(U)$ קמורה לא יתכן שיש בתמונה מספר גדול מ-1 וגם מספר קטן מ-1. כמוכן מטענה 17.ז.9 נובע ש- $f(x) = |\det J\varphi_x| > 0$ לכל $x \in U$. ולכן $f(U) \subseteq (0, \infty)$. לכן בהכרח $f(U) \subseteq (1, \infty)$ או $f(U) \subseteq (0, 1)$.

נניח ראשית ש- $f(U) \subseteq (1, \infty)$. לפי משפט ויירשטראס (4.א.6) לכל תתקבוצה $K \subseteq U$ שהיא סגורה וחסומה יש ערך מזערי של f ב- K , כלומר יש $a \in K$ כך ש- $f(x) \geq f(a)$ לכל $x \in K$. אם בנוסף K היא בעלת נפח אז מתקיים

$$\text{vol}_k \varphi(K) = \int_K |\det J\varphi| = \int_K f \geq f(x_0) \text{vol}_k K$$

ואם $\text{vol}_k K > 0$ אז:

$$\text{vol}_k \varphi(K) \geq f(x_0) \text{vol}_k K > \text{vol}_k K$$

ובכן לכל $K \subseteq U$ שהיא סגורה ובעלת נפח חיובי הראינו:

$$\text{vol}_k \varphi(K) > \text{vol}_k K$$

הקבוצה U היא קבוצה פתוחה לא ריקה, ולכן מכילה איזשהו כדור $B(a; r)$.

היא גם בעלת נפח ולכן $\text{vol}_k U \geq \text{vol}_k B(a; r) > 0$. לכן לפי סעיף א (עם $A = U$ ו- $c = 0$) יש קבוצה $K \subseteq U$ שהיא סגורה, חסומה ובעלת נפח כך ש- $\text{vol}_k K > 0$. אז:

$$\text{vol}_k \varphi(K) > \text{vol}_k K$$

לפי חלק ב של טענה 18.ג.9 $U \setminus K$ היא קבוצה בעלת נפח ומתקיים:

$$\text{vol}_k (U \setminus K) = \text{vol}_k U - \text{vol}_k K > \text{vol}_k U - \text{vol}_k \varphi(K)$$

לפי סעיף א (עם $A = U \setminus K$ ו- $c = \text{vol}_k U - \text{vol}_k \varphi(K)$) שהיא קבוצה סגורה, חסומה ובעלת נפח כך שמתקיים:

$$\text{vol}_k L > \text{vol}_k U - \text{vol}_k \varphi(K)$$

כעת:

$$\text{vol}_k \varphi(L) = \int_L |\det J\varphi| \geq \text{vol}_k L > \text{vol}_k U - \text{vol}_k \varphi(K) = \text{vol}_k (U \setminus \varphi(K))$$

אבל $\varphi(L) \subseteq \varphi(U \setminus K) = \varphi(U) \setminus \varphi(K) = U \setminus \varphi(K)$ ולכן

$$\text{vol}_k \varphi(L) \leq \text{vol}_k (U \setminus \varphi(K))$$

וקיבלנו סתירה. זה היה בהנחה ש- $f(U) \subseteq (1, \infty)$, כלומר בהנחה ש- $|\det J\varphi_x| > 1$ לכל $x \in U$. במקרה השני $f(U) \subseteq (0, 1)$ כלומר $0 < |\det J\varphi_x| < 1$ לכל $x \in U$.

הפונקציה φ היא דיפאומורפיזם מ- U ל- U . אז גם הפונקציה ההפוכה φ^{-1} היא דיפאומורפיזם

מ- U ל- U ולכל $y \in U$ מתקיים

$$J(\varphi^{-1})_y = \left(J\varphi_{\varphi^{-1}(y)} \right)^{-1}$$

ולכן:

$$\left| \det J(\varphi^{-1})_y \right| = \left| \det \left(J\varphi_{\varphi^{-1}(y)} \right)^{-1} \right| = \frac{1}{\left| \det \left(J\varphi_{\varphi^{-1}(y)} \right) \right|} > 1$$

אז אותו טיעון עם הדיפאומורפיזם φ^{-1} במקום φ מביא לסתירה.

בשני המקרים מתקבלת סתירה, ולכן בניגוד להנחת השלילה הטענה נכונה, כלומר יש $x \in U$ עבורו $|\det J\varphi_x| = 1$.

פתרון סעיף ג

יש דוגמאות רבות המראות את הנדרש.

למשל: הקבוצה $U = \mathbf{R}^k$ אינה בעלת נפח כי היא אינה חסומה, והיא כמובן קשורה-מסילתית.

לפי דוגמה 8.1.3 הפונקציה הלינארית $\varphi: x \mapsto 2x$ גזירה ברציפות ו- $J\varphi_x = 2I_k$ לכל $x \in \mathbf{R}^k$.

אז לכל $x \in U$ $|\det J\varphi_x| = 2^k \neq 1$.

זאת פונקציה לינארית הפיכה. בפרט היא על, כלומר $\varphi(U) = U$.

דוגמה זאת מראה שהתנאי ש- U בעלת נפח אינו מיותר.

דוגמה שמראה שהתנאי ש- U קשורה-מסילתית אינו מיותר:

$$\varphi: x \mapsto \begin{cases} -\frac{1}{2}x, & x > 0 \\ -2x & x < 0 \end{cases} \quad U = (-1, 0) \cup (0, 2) \text{ והפונקציה:}$$

$$\det J\varphi_x = \varphi'(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & x > 0 \\ -2 & x < 0 \end{cases} \quad \text{אז } U \text{ בעלת נפח ואינה קשורה-מסילתית וכן:}$$

מתקיים $\varphi((-1, 0)) = (0, 2)$ ו- $\varphi(0, 2) = (-1, 0)$ ולכן $\varphi(U) = U$, אבל $|\det J\varphi_x| \neq 1$ לכל $x \in U$.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי B קבוצה סגורה בעלת נפח $k-1$ ממדי ב- $\mathbf{R}^{k-1}$. נסמן: $C = \{(tx, t) \mid t \in [0, 1], x \in B\}$ (זאת תת-קבוצה של $\mathbf{R}^k$ המזוהה עם $\mathbf{R}^{k-1} \times \mathbf{R}$).

א. הוכיחו ש- C היא קבוצה בעלת נפח k ממדי.

ב. נניח ש- $\text{vol}_{k-1}(B) = 1$ ויהי $b \in \mathbf{R}^{k-1}$ המרכז הגיאומטרי של B .

מצאו את הנפח ואת המרכז הגיאומטרי של C .

פתרון סעיף א

אם $B = \emptyset$ אז גם $C = \emptyset$ והיא בעלת נפח. נניח בהמשך ש- $B \neq \emptyset$.

הקבוצה B היא בעלת נפח ובפרט היא חסומה. היא גם סגורה. אז הקבוצה $K = B \times [0, 1]$ היא

סגורה וחסומה לפי שאלה 17.ב.2. הפונקציה $\varphi: (x, t) \mapsto (tx, t)$ היא פונקציה פולינומית ולכן

רציפה בכל המרחב. בפרט היא רציפה ב- K ולכן לפי טענה 29.ד.2, וכן טענה 7.ב.2 ומשפט 9.ב.2

(הלמה שלה היינה-בורל) גם $C = \varphi(K)$ סגורה וחסומה. בפרט היא חסומה, ולכן אם נראה ש-

∂C קבוצה צנומה אז ממסקנה 13.ה.9 ינבע ש- C היא קבוצה בעלת נפח k ממדי.

הקבוצה ∂B צנומה ולפי אבחנה 6.ה.9 ושאלה 18.ה.9 גם $\partial B \times [0, 1]$ קבוצה צנומה. היא גם

קבוצה סגורה וחסומה, ולכן לפי שאלה 21.ה.9 היא בעלת נפח אפס. הפונקציה הפולינומית φ

גזירה ברציפות ב- $\mathbf{R}^k$, ולכן לפי טענה 26.ד.9 גם $\varphi(\partial B \times [0, 1])$ היא קבוצה בעלת נפח אפס,

ובפרט היא צנומה.

בעזרת שאלה 18.ה.9 אפשר להסיק שגם הקבוצה $\mathbf{R}^{k-1} \times \{1\}$ צנומה.

נראה ש- $\partial C \subseteq (\mathbf{R}^{k-1} \times \{1\}) \cup \varphi(\partial B \times [0, 1])$ ולפי טענה 16.ה.9 ואבחנה 6.ה.9 ינבע ש- ∂C צנומה.

תהי $c \in \partial C$. מאחר ש- C סגורה נובע ש- $c \in C = \varphi(B \times [0, 1])$. בפרט יש $(x, t) \in B \times [0, 1]$ כך ש-

$c = \varphi(x, t) = (tx, t)$. אז $x \in B$ ו- $t \in [0, 1]$. נניח בשלילה ש- $c \notin (\mathbf{R}^{k-1} \times \{1\}) \cup \varphi(\partial B \times [0, 1])$.

נובע מכך ש- $t \in (0, 1)$ ו- $x \in B \setminus \partial B$. הצמצום של φ לקבוצה הפתוחה $U = \mathbf{R}^{k-1} \times (0, \infty)$ היא

פונקציה הפיכה, וההופכית $(\varphi|_U)^{-1}: (z, t) \mapsto (\frac{z}{t}, t)$ היא פונקציה רציפה. הקבוצה הפתוחה

$(B \setminus \partial B) \times (0, 1)$ היא סביבה פתוחה של (x, t) , ולכן $\varphi((B \setminus \partial B) \times (0, 1))$ היא סביבה של

$c = \varphi(x, t)$ שמוכלת ב- $C = \varphi(B \times [0, 1])$, ומכאן ש- c אינה נקודה שפה של C בסתירה להנחה,

לכן הנחת השלילה אינה נכונה, וההכלה $\partial C \subseteq (\mathbf{R}^{k-1} \times \{1\}) \cup \varphi(\partial B \times [0, 1])$ הוכחה, וזה סיים את

ההוכחה ש- C קבוצה בעלת נפח.

לחישוב המרכז הגיאומטרי של C דרושים האינטגרלים $\int_C f$ עבור הפונקציה $f: x \mapsto 1$

והפונקציות $f: x \mapsto x_i$. אלה כולן פונקציות רציפות ולכן לפי סעיף א ומסקנה 24.ג.9 הן אינטגרביליות ב- C .

נשתמש במסקנה 26.ו.9 ובסימונים שבה, עם C במקום A , $k-1$ במקום k ו- $l=1$. כמוכן נשתמש באות t במקום y ובאות z במקום x . בסימונים אלה עבור $t \in \Lambda = [0,1]$ החתכים הם

$$C_t = \{z \mid (z, t) \in C\} = \{tx \mid x \in B\}$$

וכן $C_t = \emptyset$ עבור $t \notin \Lambda$. עבור $t \in \Lambda$ הקבוצה C_t היא תמונת הקבוצה B על ידי הפונקציה הלינארית $x \mapsto tx$ ולפי חלק ג של שאלה 25.ד.9 היא בעלת נפח $k-1$ ממדי, ולפי טענה 29.ד.2 היא סגורה וחסומה, ולכן כל פונקציה שרציפה בה היא גם אינטגרבילית בקבוצה C_t . לכן לפי מסקנה 26.ו.9 לכל פונקציה f שאינטגרבילית בקבוצה C מתקיים

$$\int_C f = \int_{\Lambda} \left(\int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1} \right) dt$$

כדי להשתמש בנוסחה זאת צריך לחשב עבור כל $t \in [0,1]$ את האינטגרלים $\int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1}$:

נניח $t > 0$ כי ברור ש- $C_0 = \{0^{[k-1]}\}$ והאינטגרל על קבוצה זאת הוא 0.

עבור $t > 0$ הפונקציה $\varphi: \mathbf{R}^{k-1} \rightarrow \mathbf{R}^{k-1}$ שמוגדרת על ידי $\varphi: x \mapsto tx$ היא פונקציה אפינית הפיכה. מתקיים $C_t = \varphi(B)$.

מהגרסה המאוד פשוטה של החלפת משתנים שבטענה 1.ז.9 (עם $A = C_t = \varphi(B)$ ועם הפונקציה

$$\int_{C_t} g = t^{k-1} \int_B g \circ \varphi \quad \text{נקבל } g: z \mapsto f(z, t)$$

$$\int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1} = t^{k-1} \int_B f(\varphi(x), t) dx_1 \dots dx_{k-1} = t^{k-1} \int_B f(tx, t) dx_1 \dots dx_{k-1} \quad \text{כלומר:}$$

בפרט עם הפונקציה $f: (z, t) \mapsto 1$ נקבל:

$$\text{vol}_{k-1} C_t = \int_{C_t} 1 dz_1 \dots dz_{k-1} = t^{k-1} \int_B 1 dx_1 \dots dx_{k-1} = t^{k-1} \text{vol}_{k-1} B = t^{k-1}$$

$$\text{vol}_k C = \int_C f = \int_{\Lambda} \left(\int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1} \right) dt = \int_0^1 \text{vol}_{k-1} C_t dt = \int_0^1 t^{k-1} dt = \left[\frac{1}{k} t^k \right]_0^1 = \frac{1}{k} \quad \text{לכן:}$$

עבור הפונקציה $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ המוגדרת על ידי $f: x \mapsto x_k$, בסימונו מתקיים $f(z, t) = t$ ולכן:

$$\begin{aligned} \int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1} &= t^{k-1} \int_B f(tx, t) dx_1 \dots dx_{k-1} \\ &= t^{k-1} \int_B t dx_1 \dots dx_{k-1} = t^k \int_B 1 dx_1 \dots dx_{k-1} = t^k \text{vol}_{k-1} B = t^k \end{aligned}$$

$$\int_C x_k dx_1 \dots dx_k = \int_C f = \int_0^1 \left(\int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1} \right) dt = \int_0^1 t^k dt = \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} \right]_0^1 = \frac{1}{k+1} \quad \text{אז:}$$

$$c_k = \frac{\int_C x_k dx_1 \dots dx_k}{\text{vol}_k C} = \frac{\frac{1}{k+1}}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} \quad \text{נסמן ב- } c \text{ את המרכז הגיאומטרי של } C. \text{ אז:}$$

עבור $i < k$ והפונקציה $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ המוגדרת על ידי $f: x \mapsto x_i$, בסימונו מתקיים $f(z, t) = z_i$

$$\begin{aligned} \int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1} &= t^{k-1} \int_B f(tx, t) dx_1 \dots dx_{k-1} \\ &= t^{k-1} \int_B t x_i dx_1 \dots dx_{k-1} = t^k \int_B x_i dx_1 \dots dx_{k-1} \end{aligned} \quad \text{ולכן:}$$

$$b_i = \frac{\int_B x_i dx_1 \dots dx_{k-1}}{\text{vol}_{k-1} B} = \int_B x_i dx_1 \dots dx_{k-1} \quad \text{נתון ש- } b \text{ הוא המרכז הגיאומטרי של } B \text{ ולכן:}$$

$$\int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1} = t^k b_i \quad \text{לכן:}$$

$$\int_C x_i dx_1 \dots dx_k = \int_C f = \int_0^1 \left(\int_{C_t} f(z, t) dz_1 \dots dz_{k-1} \right) dt = \int_0^1 t^k b_i dt = \left[\frac{1}{k+1} t^{k+1} b_i \right]_0^1 = \frac{1}{k+1} b_i \quad \text{אז}$$

$$c_i = \frac{\int_C x_i dx_1 \dots dx_k}{\text{vol}_k C} = \frac{\frac{1}{k+1} b_i}{\frac{1}{k}} = \frac{k}{k+1} b_i \quad \text{ולכן:}$$

$$c = \left(\frac{k}{k+1} b_1, \dots, \frac{k}{k+1} b_{k-1}, \frac{k}{k+1} \right) = \frac{k}{k+1} (b, 1) \quad \text{קיבלנו לבסוף שהמרכז הגיאומטרי של } C \text{ הוא:}$$

הערה: אפשר לחשב את האינטגרלים הדרושים בסעיף זה גם בהחלפת משתנים:

במסקנה 35.9.1, $\Omega = \mathbf{R}^k$ ו- $\varphi: (x, t) \mapsto (xt, t)$ וכן $U = \mathbf{R}^{k-1} \times (0, \infty)$, $K = B \times [0, 1]$,

$$K_n = B \in \left[\frac{1}{n}, 1 \right] \text{ ו- } Z = \mathbf{R}^{k-1} \times \{0\} \text{ אז } \varphi(K) = C \text{ ו- } \det J\varphi_{(x,t)} = t^{k-1}.$$

$$\int_C f = \int_{\varphi(K)} f = \int_K (f \circ \varphi) |\det J\varphi| = \int_{B \times [0,1]} t^{k-1} f(xt, t) dx_1 \dots dx_{k-1} dt \quad \text{35.9.2 שמתקיים:}$$

לכל אחת מהפונקציות שדרושות לנו לחישוב המרכז הגיאומטרי אפשר להמשיך תוך שימוש

בגרסה הפשוטה של משפט פוביני שבטענה 3.1.9.

שאלה 3 (25 נקודות)

יהי α מספר ממשי חיובי. תהי $K = \{(x, y, z) \mid x^4 + y^4 + z^4 \leq \alpha^4\}$

הוכיחו:
$$\text{vol}_3 K = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{6\pi\sqrt{2}} \alpha^3$$

הדרכה: כדאי להשתמש בהחלפת משתנים מתאימה. הסימן Γ מציין את פונקציית גמא מדוגמה 1.4.1. יכול להועיל

בשלב מסויים להוכיח ש- $B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta$ (כאן B מציין את פונקציית בטא מדוגמה 9.13.1).

פתרון

ברור ש- $(x, y, z) \in K$ אם ורק אם $(x^2, y^2, z^2) \in \bar{B}(0^{[3]}; \alpha^2)$, כלומר: $K = \varphi^{-1}(\bar{B}(0^{[3]}; \alpha^2))$

כאשר: $\varphi: (x, y, z) \mapsto (x^2, y^2, z^2)$

נרצה, אם כן, להשתמש בהחלפת משתנים עם φ , אלא שזאת אינה "החלפת משתנים" כלומר

אינה דיפאומורפיזם: למשל היא אינה חד־חד־ערכית ב- K . ובכל זאת: היא דיפאומורפיזם

בקבוצה $U = (0, \infty)^3$, ואחרי כמה הכנות נוכל להיעזר בה.

נסמן $B = [0, \infty)^3 \cap \bar{B}(0^{[3]}; \alpha^2)$ (זאת קבוצה בעלת נפח, למשל כחיתוך של כדור ותיבה). נסמן גם

$A = [0, \infty)^3 \cap K$. גם זאת קבוצה בעלת נפח (למשל אפשר לבדוק שהיא קמורה ולהשתמש בטענה

26.9.9, ואפשר גם להסיק זאת בעזרת שאלות 9.19.1 ו-9.20.1). הפונקציה φ היא חד־חד־ערכית על

A ומתקיים $A = \varphi^{-1}(B)$ ובאופן שקול גם $B = \varphi(A)$. ראשית נראה ש- $\text{vol}_3 K = 8 \text{vol}_3 A$ ואחרי

כן נחשב את הנפח של A .

ובכן נסמן: $\psi_{i_x, i_y, i_z}: (x, y, z) \mapsto ((-1)^{i_x} x, (-1)^{i_y} y, (-1)^{i_z} z)$

אלה העתקות חפיפה ולכן לכל ערך של (i_x, i_y, i_z) מתקיים: $\text{vol}_3 \psi_{i_x, i_y, i_z}(A) = \text{vol}_3 A$

ברור גם שאם $\psi_{i_x, i_y, i_z}(A) \neq \psi_{j_x, j_y, j_z}(A)$ אז

$$\psi_{i_x, i_y, i_z}(A) \cap \psi_{j_x, j_y, j_z}(A) \subseteq (\{0\} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \{0\} \times \mathbb{R}) \cup (\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \{0\})$$

ואגף ימין קבוצה צנומה, ולכן החיתוכים באגף שמאל הם קבוצות סגורות וחסומות ובעלות נפח

אפס, וכן
$$K = \bigcup_{(i_x, i_y, i_z) \in \{0,1\}^3} \psi_{i_x, i_y, i_z}(A)$$

ולכן מטענה 9.18.9 נקבל:
$$\text{vol}_3 K = \sum_{(i_x, i_y, i_z) \in \{0,1\}^3} \text{vol}_3 \psi_{i_x, i_y, i_z}(A) = 8 \text{vol}_3 A$$

נותר לחשב את $\text{vol}_3 A$. נרצה להשתמש בפונקציה φ ובמסקנה 9.34.1.

נסמן $B_n = [\frac{1}{n}, \infty)^3 \cap B$ ו- $A_n = U \cap \varphi^{-1}(B_n)$. הצמצום $\varphi|_U$ הוא פונקציה חד־חד־ערכית וכן

$\varphi(U) = U$ ולכן גם $\varphi(A_n) = B_n$. לא קשה לבדוק שמתקיים

$$A \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A \cap \left((\{0\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \{0\}) \right)$$

ואגף ימין הוא קבוצה סגורה וחסומה וצנומה, ולכן גם נִפְתָּחָה אפס. בדומה

$$B \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq B \cap \left((\{0\} \times \mathbf{R} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \{0\} \times \mathbf{R}) \cup (\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times \{0\}) \right)$$

וגם כאן אגף ימין הוא קבוצה שִנְפָּחָה אפס.

$$J\varphi: (x, y, z) \mapsto \begin{pmatrix} 2x & 0 & 0 \\ 0 & 2y & 0 \\ 0 & 0 & 2z \end{pmatrix} \quad \text{הפונקציה } \varphi \text{ גזירה ברציפות וכן:}$$

$$\det J\varphi: (x, y, z) \mapsto 8xyz \quad \text{לכן:}$$

אז $\varphi|_U$ היא דיפאומורפיזם, ומסקנה 35.ז.9 אומרת לנו שלכל f שרציפה ב־ B מתקיים:

$$\int_B f = \int_{\varphi(A)} f = \int_A (f \circ \varphi) |\det J\varphi|$$

אנו מעוניינים בחישוב $\text{vol}_3 A = \int_A 1$ ולכן נרצה לבחור את f כך ש־ $(f \circ \varphi) |\det J\varphi| = 1$. לכל

$$(f \circ \varphi) |\det J\varphi|(x, y, z) = f(\varphi(x, y, z)) |8xyz| = 8xyz \cdot f(x^2, y^2, z^2) \quad \text{מתקיים } (x, y, z) \in A$$

$$f(x^2, y^2, z^2) = \frac{1}{8} x^{-1} y^{-1} z^{-1} \quad \text{ולכן נרצה:}$$

$$f(u, v, z) = \frac{1}{8} u^{-\frac{1}{2}} v^{-\frac{1}{2}} w^{-\frac{1}{2}} \quad \text{הצבה של } x = u^{\frac{1}{2}}, y = v^{\frac{1}{2}}, z = w^{\frac{1}{2}} \text{ נותנת:}$$

אלא מה? זאת אינה פונקציה רציפה ב־ B ! לא נרים ידיים, שכן עשויים אנו ללא חת! בכל אחת

מהקבוצות B_n הפונקציה הזאת רציפה, ולכן לפי מסקנה 26.ז.9 מתקיים:

$$\int_{B_n} f = \int_{\varphi(A_n)} f = \int_{A_n} (f \circ \varphi) |\det J\varphi| = \int_{A_n} 1 = \text{vol}_3 A_n$$

$$\text{מטענה 32.ה.9 } \text{vol}_3 A_n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{vol}_3 A \quad \text{ואילו הסדרה } \left(\int_{B_n} f \right)_{n=1}^{\infty} \text{ היא סדרת קירוב לאינטגרל}$$

$$\text{המוכלל } \int_{B \cap U} f \text{ לכן: } \text{vol}_3 A = \int_{B \cap U} f$$

נותר לחשב את האינטגרל המוכלל $\int_{B \cap U} f$. הקבוצה B היא שמינית כדור סביב הראשית, ולכן

טענה 42.ז.9 הייתה מתאימה לנו מאוד אילו היה מדובר באינטגרל של f שרציפה בקבוצה B .

טענה זאת מוכחת בעזרת טענה 35.ז.9, ואפשר כמו שהוצג לעיל לנסח ולהוכיח גרסה שלה גם

לאינטגרל מוכלל כמו שיש לנו. לא אפרט את ההוכחה במקרה זה ופשוט אשתמש בנוסחה:

הקבוצה $B \cap U$ תשמש במקום הקבוצה K בניסוח טענה 42.ז.9. בסימון A כבר השתמשנו לדבר

אחר, ולכן נשתמש במקומו ב־ D . דרושה לנו $D \subseteq [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ כך שמתקיים

$$(r, \phi, \theta) \in D \text{ אם ורק אם } (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \in B \cap U \text{ ואפשר לראות שהקבוצה}$$

$$D = \left(0, \alpha^2\right] \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right) \times \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$$

המתאימה היא :

אז

$$\begin{aligned} \int_{B \cap U} f &= \iiint_D f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{8} \iiint_D r^{-\frac{1}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \phi \cos^{-\frac{1}{2}} \theta r^{-\frac{1}{2}} \sin^{-\frac{1}{2}} \phi \sin^{-\frac{1}{2}} \theta r^{-\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \phi r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{8} \iiint_D r^{\frac{1}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \theta \sin^{-\frac{1}{2}} \theta \cos^{-\frac{1}{2}} \phi dr d\theta d\phi \\ &= \frac{1}{8} \left(\int_0^{\alpha^2} r^{\frac{1}{2}} dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \theta \sin^{-\frac{1}{2}} \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \phi d\phi \right) \end{aligned}$$

כאשר המעבר האחרון הוא שימוש כפול בטענה 3.1.9 (גרסה פשוטה של משפט פוביני). אפשר

$$\int_0^{\alpha^2} r^{\frac{1}{2}} dr = \left[\frac{2}{3} r^{\frac{3}{2}} \right]_0^{\alpha^2} = \frac{2}{3} (\alpha^2)^{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} \alpha^3$$

לחשב כל אחד מהגורמים :

$$\text{ובעזרת הנוסחה } B(p, q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta$$

איתה נוכיח בסוף ומה שהוכח עד כה נקבל :

$$\begin{aligned} \text{vol}_3 K &= 8 \text{vol}_3 A = 8 \int_{B \cap U} f = \left(\int_0^{\alpha^2} r^{\frac{1}{2}} dr \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \theta \sin^{-\frac{1}{2}} \theta d\theta \right) \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{-\frac{1}{2}} \phi d\phi \right) \\ &= \frac{2}{3} \alpha^3 \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{2} B\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{6} \alpha^3 \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} \\ &= \frac{1}{6} \alpha^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} = \frac{1}{6} \alpha^3 \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{\pi \sqrt{2}} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)^4}{6\pi \sqrt{2}} \alpha^3 \end{aligned}$$

כאשר בחישוב נעשה שימוש גם בנוסחאות מדוגמה 13.ח.9 ושאלה 16.ח.9.

לבסוף נוכיח כמובטח את הנוסחה שנעשה בה שימוש, וזאת בעזרת ההצבה $x = \cos^2 \theta$ (ר) $dx = -2 \cos \theta \sin \theta d\theta$:

$$\begin{aligned} B(p, q) &= \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx \\ &= \int_{\frac{\pi}{2}}^0 (\cos^2 \theta)^{p-1} (1 - \cos^2 \theta)^{q-1} (-2) \cos \theta \sin \theta d\theta \\ &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos^2 \theta)^{p-1} (\sin^2 \theta)^{q-1} \cos \theta \sin \theta d\theta = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2p-1} \theta \sin^{2q-1} \theta d\theta \end{aligned}$$

שאלה 4 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbb{R}^2$, גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, שהיא הומוגנית-חיובית ממעלה 2, וכן $f(x,y) > 0$ לכל $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. תהי $K = \{(x,y) \mid f(x,y) \leq 1\}$.

א. הראו שהפונקציה $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{f(\cos t, \sin t)}} (\cos t, \sin t)$

היא לולאה פשוטה סדירה ש- K שוכנת לשמאלה.

ב. תהי $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ פונקציה המוגדרת על ידי $(x,y) \mapsto \frac{1}{f(x,y)}(-y,x)$

ותהי ψ לולאה שאורכה סופי ו- $(0,0)$ אינה בתמונתה.

הוכיחו שמספר הליפוף של ψ סביב ראשית הצירים הוא: $\frac{1}{2 \text{vol}_2 K} \int_{\psi} F \cdot d(x,y)$

פתרון סעיף א

נסמן $u(t) = (\cos t, \sin t)$ ו- $r(t) = \frac{1}{\sqrt{f(u(t))}}$. אז $\varphi(t) = r(t)u(t)$ ובקיצור $\varphi = ru$.

הפונקציות u ו- f רציפות ולכן גם r ו- φ רציפות. מתקיים $u(2\pi) = (1,0) = u(0)$ ולכן גם $r(2\pi) = r(0)$ ו- $\varphi(2\pi) = \varphi(0)$ ולכן φ היא לולאה. היא לולאה פשוטה, למשל לפי תכונות ההצגה הקוטבית של נקודות במישור (אם $t_1, t_2 \in [0, 2\pi]$ ו- $t_1 \neq t_2$ אז $\varphi(t_1) \neq \varphi(t_2)$ הם וקטורים בכיוונים שונים במישור).

נשתמש ב- $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ – מטריצת הסיבוב של 90°. אז $\dot{u}(t) = (-\sin t, \cos t) = u(t)J$

ולכן גם: $\dot{u}(t)J = u(t)J^2 = -u(t)$

מתקיים $r(t) = f(u(t))^{-\frac{1}{2}}$ ולכן $r'(t) = -\frac{1}{2} f(u(t))^{-\frac{3}{2}} \cdot \frac{d}{dt} f(u(t)) = -\frac{1}{2} r(t)^3 \nabla f(u(t)) \cdot \dot{u}(t)$ ובפרט r פונקציה גזירה ברציפות. אז גם φ גזירה ברציפות ומתקיים:

$$\dot{\varphi}(t) = r'(t)u(t) + r(t)\dot{u}(t) = r'(t)u(t) + r(t)u(t)J$$

לכן: $|\dot{\varphi}(t)|^2 = \dot{\varphi}(t) \cdot \dot{\varphi}(t)$

$$\begin{aligned} &= r'(t)^2 \underbrace{u(t) \cdot u(t)}_1 + 2r'(t)r(t) \underbrace{u(t) \cdot u(t)J}_0 + r(t)^2 \underbrace{u(t)J \cdot u(t)J}_1 \\ &= r'(t)^2 + r(t)^2 > 0 \end{aligned}$$

אז הלולאה φ היא לולאה סדירה.

לפי הנתון ש- f היא פונקציה הומוגנית-חיובית ממעלה 2 לכל $t \in [0, 2\pi]$ מתקיים:

$$f(\varphi(t)) = f(r(t)u(t)) = r(t)^2 f(u(t)) = \frac{1}{f(u(t))} f(u(t)) = 1$$

$$\frac{d}{dt} f(\varphi(t)) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) \quad \text{לפי כלל השרשרת}$$

אבל הנגזרת של פונקציה קבועה היא 0 ולכן :

$$0 = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t) + r(t)u(t)J)$$

נשתמש בנתון ש- f היא פונקציה הומוגנית יחידות ממעלה 2 בדרך נוספת :

$$\text{לפי דוגמה 11.ב.3 נובעת מכך זהות אוילר } a \cdot \nabla f(a) = 2f(a)$$

$$\varphi(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) = 2f(\varphi(t)) = 2 \cdot 1 = 2 \quad \text{אז}$$

$$u(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) = \frac{1}{r(t)} \varphi(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) = \frac{2}{r(t)} \quad \text{ולכן :}$$

$$0 = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t) + r(t)u(t)J) \quad \text{ראינו קודם :}$$

$$= r'(t)u(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) + r(t)u(t)J \cdot \nabla f(\varphi(t)) = \frac{2r'(t)}{r(t)} + r(t)u(t)J \cdot \nabla f(\varphi(t))$$

$$u(t)J \cdot \nabla f(\varphi(t)) = -\frac{2r'(t)}{r(t)^2} \quad \text{ולכן :}$$

$$g(\lambda) = f(\varphi(t) + \lambda \dot{\varphi}(t)J) \quad \text{נגדיר עכשיו, עבור } t \in [0, 2\pi] \text{ קבוע פונקציה } g: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ על ידי :}$$

$$g'(0) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)J \quad \text{לפי כלל השרשרת :}$$

$$\text{ראינו קודם } \dot{\varphi}(t) = r'(t)u(t) + r(t)u(t)J \text{ ולכן :}$$

$$\begin{aligned} g'(0) &= \nabla f(\varphi(t)) \cdot \dot{\varphi}(t)J = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t) + r(t)u(t)J)J \\ &= \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t)J + r(t)u(t)J^2) = \nabla f(\varphi(t)) \cdot (r'(t)u(t)J - r(t)u(t)) \\ &= r'(t)u(t)J \cdot \nabla f(\varphi(t)) - r(t)u(t) \cdot \nabla f(\varphi(t)) = -\frac{2r'(t)^2}{r(t)^2} - 2 < 0 \end{aligned}$$

מכך ש- $g'(0) < 0$ נובע שיש $\delta > 0$ כך שאם $\lambda \in (0, \delta)$ אז $g(\lambda) < g(0)$ כלומר

$$f(\varphi(t) + \lambda \dot{\varphi}(t)J) < f(\varphi(t)) = 1$$

$$\varphi(t) + \lambda \dot{\varphi}(t)J \in K \quad \text{ולכן}$$

$$f(\varphi(t) + \lambda \dot{\varphi}(t)J) > f(\varphi(t)) = 1 \quad \text{וגם } g(-\lambda) > g(0) \text{ כלומר}$$

$$\varphi(t) - \lambda \dot{\varphi}(t)J \notin K \quad \text{ולכן}$$

ולפי הגדרה 5.ט.9 הקבוצה K שוכנת לשמאל הלולאה φ .

פתרון סעיף ב

הקבוצה K היא קבוצה סגורה לפי מסקנה 23.ד.2, שלפיה גם: $\partial K \subseteq \{(x, y) \mid f(x, y) = 1\}$

מתקיים $f(t, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} f(0, 0)$

וגם: $f(t, 0) = t^2 f(1, 0) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} 0$

ולכן $f(0, 0) = 0$ ובפרט $(0, 0) \in K \setminus \partial K$.

אם $f(x, y) = 1$ אז מתקיים $(x, y) \in K$ ובנוסף $t(x, y) \xrightarrow{t \rightarrow 1^+} (x, y)$ ולכן בכל סביבה של

(x, y) יש נקודה $t(x, y)$ עם $t > 1$ ומתקיים $f(t(x, y)) = t^2 f(x, y) = t^2 > 1$ ולכן $t(x, y) \notin K$,

כלומר בכל סביבה של (x, y) יש נקודות מ- K ומ- K^c ולכן $(x, y) \in \partial K$.

אז: $\partial K = \{(x, y) \mid f(x, y) = 1\}$

ראינו שלכל $t \in [0, 2\pi]$ מתקיים $f(\varphi(t)) = 1$ ולכן תמונת φ מוכלת ב- ∂K .

מצד שני אם $(x, y) \in \partial K$ אז $f(x, y) = 1$ ובפרט $(x, y) \neq (0, 0)$.

לכן יש $\theta \in [0, 2\pi]$ ו- $r > 0$ כך ש: $(x, y) = r(\cos \theta, \sin \theta) = ru(\theta)$

אז $1 = f(x, y) = f(ru(\theta)) = r^2 f(u(\theta))$

ולכן $r = \frac{1}{\sqrt{f(u(\theta))}} = r(\theta)$

ולכן $(x, y) = r(\theta)u(\theta) = \varphi(\theta)$. אז ∂K מוכלת בתמונת φ ולכן ∂K היא תמונת φ .

ממה שקיבלנו עד כה אפשר להסיק מיד, בעזרת שאלה 22.ט.9 שמספר הליפוף של φ סביב

הראשית הוא 1. משאלה 10.ח.8 נקבל שיש מספר γ_F שמקיים $\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \gamma_F$

וכן אם n הוא מספר הליפוף של ψ סביב הראשית אז: $\oint_{\psi} F \cdot d(x, y) = \gamma_F n$

אז $n = \frac{\oint_{\psi} F \cdot d(x, y)}{\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y)}$ וכדי לסיים נותר להראות שמתקיים: $\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = 2 \text{vol}_2 K$

נשים לב שלפי מה שהוכחנו כבר הקבוצה K יחד עם המסילה φ מקיימות את הנחות משפט

גריין, ונסמן $P(x, y) = -y$ ו- $Q(x, y) = x$. לכל $(x, y) \in \partial K$ מתקיים $(x, y) \in \partial K$ ולכן

$f(x, y) = 1$ ומכאן: $F(x, y) = \frac{1}{f(x, y)}(-y, x) = (P(x, y), Q(x, y))$

לכן בעזרת משפט גריין:

$$\oint_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \oint_{\varphi} (P(x, y), Q(x, y)) \cdot d(x, y) = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \iint_K (1 + 1) = 2 \text{vol}_2 K$$