

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

סמסטר : 142024

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 8

מועד אחרון להגשה : 14.4.2024

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ו- $\psi : [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילות שאורכן סופי. תהי :

$$t \mapsto \varphi(t) \times \psi(t)$$

א. הוכיחו כי γ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).

ב. אם φ ו- ψ הן מסילות סדירות, האם גם γ היא מסילה סדירה?

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה המסילה :

$$\varphi : [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$t \mapsto (\sin t \cdot |\sin t|, \cos t \cdot |\cos t|)$$

א. הראו ש- φ היא לולאה פשוטה ששקולה למסילה אפינית למקוטעין.

ב. הסיקו שאורכה סופי, וחשבו אותו.

ג. חשבו את מספר הליפוף של φ סביב $(0, 0)$.

הקפידו לבסס את כל טיעוניכם וחישוביכם על הגדרות ועובדות מהספר.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה ובעלת השתנות חסומה המקיימת $f(a) = f(b) = 0$ וכן

$f(0) \neq 0$. נסמן $\varphi(t) = (t, f(t))$ לכל $t \in [a, b]$. הוכיחו כי :

$$\int_{\varphi} \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + y \right) dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_a^b f(x) dx$$

שאלה 4 (20 נקודות)

הראו כי הפונקציה

$$F : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 y} (\cos x \cos y, \sin x \sin y)$$

המוגדרת בקבוצה $D = \{(x, y) \mid \sin^2 x + \cos^2 y > 0\}$ היא שדה משמר בקבוצה $B((0, 0); 1)$ ואינה

שדה משמר בקבוצה D . (שימו לב שהמכנה קבוע על הישרים $y = n\pi \pm x$).

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ שגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ וכך שהמטריצה JF_a סימטרית לכל

$a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. נתונה מסילה $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4$ ולכל i המסילה φ_i היא מסילה פשוטה

שתמונתה קטע שקצותיו P_{i-1} ו- P_i כאשר:

$$P_0 = (-2,1), P_1 = (2,-1), P_2 = (2,1), P_3 = (-2,-1), P_4 = (-2,1)$$

חשבו את האינטגרל המסילתי: $\int_{\varphi} (F(x-1,y) + F(x+1,y)) \cdot (dx, dy)$

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

שאלה 1: 1\13\2021. אפשר להשתמש באפיון של זיורדן להשתנות חסומה של רכיבי המסילה. וכמובן שהמכפלה אינה סדירה, למשל אם שני גורמי המכפלה זהים.

שאלה 2: אם $(x, y) = \varphi(t)$ אז $|x| + |y| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ כלומר תמונת φ מוכלת (ולמעשה

שווה) לריבוע $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}$. מכאן רואים איך לחלק את התמונה לארבעה קטעים ישרים.

φ היא לולאה כי $\varphi(0) = (0, 1) = \varphi(2\pi)$. כדי להראות שהיא לולאה פשוטה נראה ש-

$\varphi|_{[0, 2\pi)}$ היא פונקציה חד-חד-ערכית. נניח ש- $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ ו- $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

אז $\sin^2 t_1 = |[\varphi]_1(t_1)| = |[\varphi]_1(t_2)| = \sin^2 t_2$ ולכן:

אבל גם $\sin t_1 \cdot |\sin t_1| = [\varphi]_1(t_1) = [\varphi]_1(t_2) = \sin t_2 \cdot |\sin t_2|$ ולכן: $\sin t_1 = \sin t_2$

באופן דומה $\cos^2 t_1 = |[\varphi]_2(t_1)| = |[\varphi]_2(t_2)| = \cos^2 t_2$ ולכן:

וגם $\cos t_1 \cdot |\cos t_1| = [\varphi]_2(t_1) = [\varphi]_2(t_2) = \cos t_2 \cdot |\cos t_2|$ ולכן: $\cos t_1 = \cos t_2$

אז $(\cos t_1, \sin t_1) = (\cos t_2, \sin t_2)$ ומכך שהמסילה

$[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t \mapsto (\cos t, \sin t)$

היא לולאה פשוטה נובע שבהכרח $t_1 = t_2$.

נסמן: $\varphi_i : [(i-1)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$t \mapsto \varphi\left(i\frac{\pi}{2}\right) + \left(i - \frac{2}{\pi}t\right)\left(\varphi\left((i-1)\frac{\pi}{2}\right) - \varphi\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right)$

זאת מסילה אפינית ששקולה למסילה $\varphi|_{[(i-1)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}]}$ ולכן המסילה האפינית למקוטעין

$\varphi = \varphi|_{[0, \frac{\pi}{2}]} * \varphi|_{[\frac{\pi}{2}, 2\frac{\pi}{2}]} * \varphi|_{[2\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]} * \varphi|_{[3\frac{\pi}{2}, 4\frac{\pi}{2}]}$: שקולה למסילה: $\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4$

עכשיו אפשר למשל בעזרת שאלה 28.ב.8 לקבל שאורך המסילה הוא $4\sqrt{2}$.

מספר הליפוף הוא -1. יש מגוון דרכים להראות זאת. אפשר למשל להחליף את ארבע

המסילות האפיניות במסילות חלופיות שיחד משתרשות למסילה שתמונתה מעגל

היחידה, במגמה השלילית. אפשר גם לבנות הומוטופיה של לולאות:

$H : [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$(t, \lambda) \mapsto (\sin t(1 - \lambda + \lambda|\sin t|), \cos t(1 - \lambda + \lambda|\cos t|))$

זאת הומוטופיה של לולאות כי זאת בבירור פונקציה יסודית ולכן רציפה, ולכל

$\lambda \in [0, 1]$ מתקיים $H_\lambda(0) = H(0, \lambda) = H(2\pi, \lambda) = H_\lambda(2\pi)$ ולכן H_λ היא לולאה.

בבירור $H_1 = \varphi$. נראה שתמונת H מוכלת במישור הנקוב $\{(0, 0)\}$: $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ אחרת

יש $(t, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ כך ש- $H(t, \lambda) = (0, 0)$. בפרט: $\sin t(1 - \lambda + \lambda|\sin t|) = 0$

אפשרות אחת היא $\sin t = 0$ ובמקרה זה $|\cos t| = 1$ ולכן

$$\cos t(1 - \lambda + \lambda|\cos t|) = \pm(1 - \lambda + \lambda) = \pm 1 \neq 0$$

בסתירה ל- $H(t, \lambda) = (0, 0)$. האפשרות האחרת היא ש- $\sin t \neq 0$ ו- $1 - \lambda + \lambda|\sin t| = 0$.

במקרה זה נקבל $\lambda(1 - |\sin t|) < \lambda(1 - 0) = \lambda$ וגם כך התקבלה סתירה.

אז יש הומוטופיה של לולאות בין H_0 ו- H_1 , שתמונתה מוכלת במישור הנקוב.

הפונקציה G מדוגמה 2.ח.8 היא גזירה ברציפות ובעלת מטריצת יעקוביאן סימטרית

במישור הנקוב U , ולכן לפי טענה 13.ח.8 מתקיים $\oint_{H_0} G \cdot dx = \oint_{\varphi} G \cdot dx$, ולפי הערה

9.ח.8 פירוש הדבר שללולאות φ ו- H_0 אותו מספר ליפוף סביב ראשית הצירים. נותר

אם כן למצוא מהו מספר הליפוף של הלולאה H_0 , כלומר לחשב את: $\frac{1}{2\pi} \oint_{H_0} G \cdot dx$

דרך אחת היא בעזרת שאלה 21.ו.8 עם המטריצה $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. אבל אפשר בקלות

לחשב בעזרת משפט 24.ו.8:

$$\begin{aligned} \oint_{H_0} G \cdot dx &= \int_0^{2\pi} G(H_0(t)) \cdot \dot{H}_0(t) dt = \int_0^{2\pi} G(\sin t, \cos t) \cdot (\cos t, -\sin t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\cos t, \sin t) \cdot (\cos t, -\sin t) dt = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t - \sin^2 t) dt = -\int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi \end{aligned}$$

ולכן מספר הליפוף המבוקש הוא: $\frac{1}{2\pi} \oint_{\varphi} G \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \oint_{H_0} G \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot (-2\pi) = -1$

לשאלה 3: וריאצייה על $3\backslash 13\backslash 2021$ עם שילוב של מרכיב חישובי מ- $5\backslash 13\backslash 2023$.

זה אינטגרל של שדה משמר ועוד אינטגרל של התבנית ydx . את האינטגרל השני

אפשר לקבל מדוגמה 14.ו.8, או להראות ישירות ש- $\int_a^b y dx = \int_a^b f(x) dx$ כי

לאינטגרלים בשני האגפים בדיוק אותם סכומי רימן (שזה מה שעושים בדוגמה 14.ו.8).

לשדה המשמר יש פוטנציאל $\frac{-y}{x^2 + y^2}$ ומזה מקבלים שהאינטגרל שלו הוא 0.

לשאלה 4: $4\backslash 93\backslash 2021$ (על פי $5\backslash 86\backslash 2018$). השאלה היא כרגע שאלה 23 באוסף השאלות לדוגמה).

חישוב מראה שמטריצת היעקוביאן סימטרית. אינטגרציה על שפת ריבוע שקודקודיו

$(0, 0), (0, \pi), (\pm \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ אמורה להראות את הנדרש. כיוון שהמכנה הוא 1 על שפת

הריבוע הזה (ועל כל הישרים ברמז) אפשר לחשב את האינטגרל די בקלות ולקבל 2π .

לשאלה 5: $4\backslash 91\backslash 2023$. סכום של שתי הזזות של F . אפשר להמיר למשל בסכום אינטגרלים של

F על הזזות הפוכות של הלולאות, אחת עם מספר ליפוף 1 ואחת עם מספר ליפוף -1

סביב הראשית. אפשר גם בלי התיחסות ישירה למספר הליפוף (פתרון של אחד התלמידים בבחינה): בונים הומוטופיה של סיבוב הדרגתי ב- 180° , והיא מעבירה את המסילה הנתונה המווצת ביחידה ימינה למסילה המווצת ביחידה שמאלה, רק במגמה הפוכה (ליתר דיוק: כל אחד מרכיבי השרשור שמרכיבים את המסילה, שמוזז ימינה ואז מסובב ב- 180° שקול להיפוך מגמה של אחד הרכיבים המווצז שמאלה, מהם אפשר להרכיב לולאה מתאימה).

לשאלה 6: