

מתווה לפתרון ממ"ן 14

סמסטר : 2024א

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 8

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ו- $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3$ מסילות שאורכן סופי. תהי:

$$\gamma: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad t \mapsto \varphi(t) \times \psi(t)$$

א. הוכיחו כי γ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).

ב. אם φ ו- ψ הן מסילות סדירות, האם גם γ היא מסילה סדירה?

פתרון סעיף א

לפי אבחנה 2.8.2, כדי להוכיח שאורך המסילה סופי די להראות שהיא בעלת השתנות חסומה בקטע $[\alpha, \beta]$. נראה אם כן שהפונקציה γ היא רציפה, ולכן היא מסילה, ושהיא בעלת השתנות חסומה בקטע $[\alpha, \beta]$, ולכן היא מסילה שאורכה סופי.

מטענה 3.1.1. נ.מקבלים שפונקציית המכפלה הווקטורית

$$\pi: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad (u, v) \mapsto u \times v$$

היא פונקציה פולינומית, ולפיכך היא רציפה. האיסוף (φ, ψ) הוא פונקציה רציפה בקטע $[\alpha, \beta]$ ולכן גם ההרכבה $\gamma = \pi \circ (\varphi, \psi)$ רציפה בקטע זה, כלומר γ היא מסילה.

את העובדה ש- γ בעלת השתנות חסומה אפשר להוכיח בדרך דומה לכל אחת משתי הדרכים בפתרון חלק ב של שאלה 11.8.1, אבל אפשר גם לנצל את מה שהוכח בשאלה זאת. לפי טענה 6.8.2 די להוכיח עבור $1 \leq j \leq 3$ שהרכיב $[\gamma]_j$ הוא פונקציה בעלת השתנות חסומה בקטע $[\alpha, \beta]$.

מטענה 3.1.1. נקבל:

$$\gamma = ([\varphi]_2[\psi]_3 - [\varphi]_3[\psi]_2, [\varphi]_3[\psi]_1 - [\varphi]_1[\psi]_3, [\varphi]_1[\psi]_2 - [\varphi]_2[\psi]_1)$$

לפי טענה 6.8.2 הרכיבים $[\varphi]_1, [\varphi]_2, [\varphi]_3, [\psi]_1, [\psi]_2, [\psi]_3$ כולם פונקציות בעלות השתנות חסומה

ב- $[\alpha, \beta]$. לפי חלק ב של שאלה 11.8.1 גם כל המכפלות $[\varphi]_i[\psi]_j$ הן פונקציות בעלות השתנות

חסומה ב- $[\alpha, \beta]$, ולפי שאלה 5.8.2 גם כל ההפרשים $[\varphi]_i[\psi]_j - [\varphi]_j[\psi]_i$ הם פונקציות בעלות

השתנות חסומה ב- $[\alpha, \beta]$, ולכן כל רכיבי γ הם כאלה, ולכן γ היא פונקציה בעלת השתנות

חסומה ב- $[\alpha, \beta]$. היא גם רציפה, ולכן היא מסילה שאורכה סופי.

פתרון סעיף ב

הטענה בסעיף ב בבירור אינה נכונה. למשל אם φ היא מסילה סדירה ו- $\psi = \varphi$ אז גם ψ מסילה סדירה, ו- $\gamma = \varphi \times \psi = \varphi \times \varphi = 0$ היא פונקציה קבועה, ולכן ודאי אינה מסילה סדירה.

שאלה 2 (20 נקודות)

נתונה המסילה: $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$t \mapsto (\sin t \cdot |\sin t|, \cos t \cdot |\cos t|)$$

א. הראו ש- φ היא לולאה פשוטה ששקולה למסילה אפינית למקוטעין.

ב. הסיקו שאורכה סופי, וחשבו אותו.

ג. חשבו את מספר הליפוף של φ סביב $(0,0)$.

הקפידו לבסס את כל טיעוניכם וחישוביכם על הגדרות ועובדות מהספר.

פתרון סעיף א

φ היא לולאה כי $\varphi(0) = (0,1) = \varphi(2\pi)$. כדי להראות שהיא לולאה פשוטה נראה ש- $\varphi|_{[0,2\pi)}$ היא

פונקציה חד-חד-ערכית. נניח ש- $t_1, t_2 \in [0, 2\pi)$ ו- $\varphi(t_1) = \varphi(t_2)$.

$$|\sin t_1| = |\sin t_2| \quad \text{אז} \quad \sin^2 t_1 = |[\varphi]_1(t_1)| = |[\varphi]_1(t_2)| = \sin^2 t_2 \quad \text{ולכן:}$$

$$\sin t_1 = \sin t_2 \quad \text{אבל גם} \quad \sin t_1 \cdot |\sin t_1| = [\varphi]_1(t_1) = [\varphi]_1(t_2) = \sin t_2 \cdot |\sin t_2| \quad \text{ולכן:}$$

$$|\cos t_1| = |\cos t_2| \quad \text{באופן דומה} \quad \cos^2 t_1 = |[\varphi]_2(t_1)| = |[\varphi]_2(t_2)| = \cos^2 t_2 \quad \text{ולכן:}$$

$$\cos t_1 = \cos t_2 \quad \text{וגם} \quad \cos t_1 \cdot |\cos t_1| = [\varphi]_2(t_1) = [\varphi]_2(t_2) = \cos t_2 \cdot |\cos t_2| \quad \text{ולכן:}$$

$$[0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{אז} \quad (\cos t_1, \sin t_1) = (\cos t_2, \sin t_2) \quad \text{ומכך שהמסילה}$$

$$t \mapsto (\cos t, \sin t)$$

היא לולאה פשוטה נובע שבהכרח $t_1 = t_2$.

אם $(x, y) = \varphi(t)$ אז $|x| + |y| = \sin^2 t + \cos^2 t = 1$ כלומר תמונת φ מוכלת (ולמעשה שווה) לריבוע

$$\{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}. \quad \text{מכאן רואים איד לחלק את התמונה לארבעה קטעים ישרים.}$$

נסמן: $\varphi_i: [(i-1)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto \varphi\left(i\frac{\pi}{2}\right) + \left(i - \frac{2}{\pi}t\right)\left(\varphi\left((i-1)\frac{\pi}{2}\right) - \varphi\left(i\frac{\pi}{2}\right)\right)$$

זאת מסילה אפינית ששקולה למסילה $\varphi|_{[(i-1)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}]}$. ולכן המסילה האפינית למקוטעין

$$\varphi = \varphi|_{[0, \frac{\pi}{2}]} * \varphi|_{[\frac{\pi}{2}, 2\frac{\pi}{2}]} * \varphi|_{[2\frac{\pi}{2}, 3\frac{\pi}{2}]} * \varphi|_{[3\frac{\pi}{2}, 4\frac{\pi}{2}]} \quad \text{שקולה למסילה:} \quad \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4$$

דרך אחת לראות ש- φ_i שקולה ל- $\varphi|_{[(i-1)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}]}$ היא לבדוק ששתייהן מסילות פשוטות עם אותה

תמונה, שהיא החלק של הקבוצה $\{(x, y) \mid |x| + |y| = 1\}$ שברביע ה- i של המישור, ולשתיהן אותן

נקודות מוצא ויעד, ולפי טענה 8.א.13 הן מסילות שקולות. אפשר גם להראות את השקילות

ישירות. הפונקציה $\tau_i: [(i-1)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$

$$t \mapsto \frac{\pi}{2}\left(i - \sin^2\left(t - \frac{\pi}{2}i\right)\right)$$

היא פונקציה עולה ורציפה שתמונתה הקטע $\left[\left(i-1\right)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}\right]$, ואפשר לבדוק שעבור $i=1,2,3,4$

$$\varphi_i \circ \tau_i = \varphi \Big|_{\left[\left(i-1\right)\frac{\pi}{2}, i\frac{\pi}{2}\right]} \quad \text{מתקיים}$$

פתרון סעיף ב

מטענה 8.ב.17, טענה 8.ב.25 ושאלה 8.ב.13 נקבל:

$$\begin{aligned} L(\varphi) &= L(\varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4) = L(\varphi_1) + L(\varphi_2) + L(\varphi_3) + L(\varphi_4) \\ &= \left| \varphi_1(0) - \varphi_1\left(\frac{1}{2}\pi\right) \right| + \left| \varphi_2\left(\frac{1}{2}\pi\right) - \varphi_2(\pi) \right| + \left| \varphi_3(\pi) - \varphi_3\left(\frac{3}{2}\pi\right) \right| + \left| \varphi_4\left(\frac{3}{2}\pi\right) - \varphi_4(2\pi) \right| \\ &= |(1,0) - (0,1)| + |(0,1) - (-1,0)| + |(-1,0) - (0,-1)| + |(0,-1) - (1,0)| \\ &= |(1,-1)| + |(1,1)| + |(-1,1)| + |(-1,-1)| = \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} + \sqrt{2} = 4\sqrt{2} \end{aligned}$$

פתרון סעיף ג

נגדיר הומוטופיה של לולאות: $H: [0, 2\pi] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2$

$$(t, \lambda) \mapsto (\sin t(1 - \lambda + \lambda|\sin t|), \cos t(1 - \lambda + \lambda|\cos t|))$$

זאת בבירור פונקציה יסודית ולכן רציפה. לכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים

$$H_\lambda(0) = H(0, \lambda) = H(2\pi, \lambda) = H_\lambda(2\pi)$$

ולכן H_λ היא לולאה. בבירור $H_1 = \varphi$. לכן זאת הומוטופיה של לולאות בין H_0 ל- H_1 .

נראה שתמונת H מוכלת במישור הנקוב $U = \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$: אחרת יש $(t, \lambda) \in [0, 2\pi] \times [0, 1]$ כך

$$\sin t(1 - \lambda + \lambda|\sin t|) = 0 \quad \text{ש-} H(t, \lambda) = (0, 0) \quad \text{בפרט:}$$

אפשרות אחת היא $\sin t = 0$ ובמקרה זה $|\cos t| = 1$ ולכן

$$\cos t(1 - \lambda + \lambda|\cos t|) = \pm(1 - \lambda + \lambda) = \pm 1 \neq 0$$

בסתירה ל- $H(t, \lambda) = (0, 0)$. האפשרות האחרת היא ש- $\sin t \neq 0$ ו- $1 - \lambda + \lambda|\sin t| = 0$. במקרה זה

$$1 = \lambda(1 - |\sin t|) < \lambda(1 - 0) = \lambda \quad \text{נקבל } \lambda = 1 \text{ וגם כך התקבלה סתירה.}$$

אז יש הומוטופיה של לולאות בין H_0 ל- H_1 , שתמונתה מוכלת במישור הנקוב.

הפונקציה G מדוגמה 8.נ.2 היא גזירה ברציפות ובעלת מטריצת יעקוביאן סימטרית במישור

$$\text{הנקוב } U. \text{ לכן לפי טענה 8.נ.13 מתקיים } \oint_{H_0} G \cdot dx = \oint_{\varphi} G \cdot dx, \text{ ולפי הערה 8.נ.9 פירוש הדבר}$$

שללולאות φ ו- H_0 אותו מספר ליפוף סביב ראשית הצירים.

$$\text{נותר אם כן למצוא מהו מספר הליפוף של הלולאה } H_0, \text{ כלומר לחשב את } \frac{1}{2\pi} \oint_{H_0} G \cdot dx.$$

נשתמש במשפט 8.ו.24:

$$\oint_{H_0} G \cdot dx = \int_0^{2\pi} G(H_0(t)) \cdot \dot{H}_0(t) dt = \int_0^{2\pi} G(\sin t, \cos t) \cdot (\cos t, -\sin t) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} (-\cos t, \sin t) \cdot (\cos t, -\sin t) dt = \int_0^{2\pi} (-\cos^2 t - \sin^2 t) dt = - \int_0^{2\pi} 1 dt = -2\pi$$

$$\frac{1}{2\pi} \oint_{\varphi} G \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \oint_{H_0} G \cdot dx = \frac{1}{2\pi} \cdot (-2\pi) = -1$$

לכן מספר הליפוף המבוקש הוא :

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה רציפה ובעלת השתנות חסומה המקיימת $f(a) = f(b) = 0$ וכן $f(0) \neq 0$. נסמן $\varphi(t) = (t, f(t))$ לכל $t \in [a, b]$. הוכיחו כי:

$$\int_{\varphi} \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} + y \right) dx + \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} dy = \int_a^b f(x) dx$$

פתרון

הפונקציה $t \mapsto t$ היא פונקציה אפינית ולכן היא רציפה ובעלת השתנות חסומה בקטע $[a, b]$.

הפונקציה φ רציפה ב- $[a, b]$ כאיסוף של שתי פונקציות רציפות, ולכן היא מסילה. שני רכיבי

המסילה φ הם פונקציות בעלות השתנות חסומה ב- $[a, b]$ ולפי טענה 6.8 ג.זאת מסילה שאורכה סופי.

נסמן $P(x, y) = y$. נסמן גם $F: (x, y) \mapsto (y, 0)$ או $F: (x, y) \mapsto (P(x, y), 0)$ ולפי דוגמה 14.8 ו.זאת

$$\int_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \int_a^b P(x, f(x)) dx = \int_a^b f(x) dx \quad \text{מתקיים:}$$

$$G: (x, y) \mapsto \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \quad \text{נסמן:}$$

התבנית באינטגרל הנתון היא $(G + F) \cdot d(x, y)$. לכן האינטגרל המבוקש

$$\int_{\varphi} (G + F) \cdot d(x, y) = \int_{\varphi} G \cdot d(x, y) + \int_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \int_{\varphi} G \cdot d(x, y) + \int_a^b f(x) dx \quad \text{הוא:}$$

נותר אם כן להראות ש- $\int_{\varphi} G \cdot d(x, y) = 0$ כדי לסיים את הוכחת הנדרש בשאלה.

$$\nabla g(x, y) = \left(\frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2}, \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) = G \quad \text{נסמן } g: (x, y) \mapsto \frac{-y}{x^2 + y^2} \text{ אז:}$$

$$\int_{\varphi} G \cdot d(x, y) = \int_{\varphi} \nabla g \cdot d(x, y) \quad \text{אז לפי הגדרה 4.8 ומשפט 10.8 ז.זאת}$$

$$= g(\varphi(b)) - g(\varphi(a)) = g(b, f(b)) - g(a, f(a)) = g(b, 0) - g(a, 0) = 0 - 0 = 0$$

לדרך הזאת נדרש היה למצוא את פונקציית הפוטנציאל g . נראה בקצרה דרך נוספת שאינה

כוללת נוסחה מפורשת של פונקציית הפוטנציאל:

אפשר לחשב את מטריצת היעקוביאן $Jg_{(x,y)}$ ולבדוק שהיא רציפה וסימטרית בכל נקודה במישור

המנוקב $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. בנוסף אפשר לחשב בעזרת משפט 24.8 ו.זאת את האינטגרל $\int_{\psi} G \cdot d(x, y)$

כאשר $\psi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbf{R}^2$ היא הלולאה $\psi: t \mapsto (\cos t, \sin t)$:

$$\begin{aligned} \int_{\psi} G \cdot d(x, y) &= \int_0^{2\pi} G(\psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) dt = \int_0^{2\pi} G(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{(\cos^2 t + \sin^2 t)^2} (2 \cos t \sin t, \sin^2 t - \cos^2 t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-2 \cos t \sin^2 t + \sin^2 t \cos t - \cos^3 t) dt = \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t \cos t - \cos^3 t) dt \\ &= - \int_0^{2\pi} \cos t (\sin^2 t + \cos^2 t) dt = - \int_0^{2\pi} \cos t dt = -[\sin t]_0^{2\pi} = -\sin 2\pi + \sin 0 = 0 \end{aligned}$$

ידוע שמספר הליפוף של ψ סביב הראשית הוא 1, ולכן בסימוני שאלה 10.ח.8 $\gamma_G = 0$. אז לפי

שאלה 10.ח.8 לכל לולאה η שאורפה סופי ותמונתה במישור המנוקב $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ מתקיים

$$\int_{\eta} G \cdot d(x, y) = \gamma_G \cdot n = 0 \cdot n = 0$$

ולפי שאלה 3.ז.8 G שדה משמר ב- $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$. לפי טענה 7.ז.8 יש ל- G פונקציית פוטנציאל

נסמן אותה ב- g . לפי הגדרה 4.ז.8 מתקיים:

$$\int_{\varphi} G \cdot d(x, y) = g(\varphi(b)) - g(\varphi(a)) = g(b, f(b)) - g(a, f(a)) = g(b, 0) - g(a, 0)$$

אלא שאיננו יודעים מהי הפונקציה g . נתבונן במסילה: $\gamma: [c, d] \rightarrow \mathbf{R}^2$
 $t \mapsto (t, 0)$

אם $0 \notin [c, d]$ אז תמונת γ במישור המנוקב $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ ומתקיים:

$$\begin{aligned} g(d, 0) - g(c, 0) &= g(\gamma(d)) - g(\gamma(c)) = \int_{\gamma} G \cdot d(x, y) \\ &= \int_c^d G(\gamma(t)) \cdot \dot{\gamma}(t) dt = \int_c^d G(t, 0) \cdot (1, 0) dt = \int_c^d \left(0, \frac{-t^2}{t^4}\right) \cdot (1, 0) dt = \int_c^d 0 dt = 0 \end{aligned}$$

לכן $g(c, 0) = g(d, 0)$ אם c ו- d שניהם מספרים חיוביים או שניהם שליליים, כלומר הפונקציה

$t \mapsto g(t, 0)$ קבועה בכל אחת מהקבוצות $(-\infty, 0)$ ו- $(0, \infty)$. בנוסף, בדומה לחישוב קודם:

$$\begin{aligned} g(-1, 0) - g(1, 0) &= g(\psi(\pi)) - g(\psi(0)) = \int_{\psi[0, \pi]} G \cdot d(x, y) = \int_0^{\pi} G(\psi(t)) \cdot \dot{\psi}(t) dt \\ &= \int_0^{\pi} G(\cos t, \sin t) \cdot (-\sin t, \cos t) dt = \dots = - \int_0^{\pi} \cos t dt = -[\sin t]_0^{\pi} = -\sin \pi + \sin 0 = 0 \end{aligned}$$

ולכן $g(-1, 0) = g(1, 0)$ ולכן הפונקציה $t \mapsto g(t, 0)$ קבועה באיחוד $(-\infty, 0) \cup (0, \infty)$.

$$\int_{\varphi} G \cdot d(x, y) = g(b, 0) - g(a, 0) = 0 \quad \text{בפרט:}$$

שאלה 4 (20 נקודות)

הראו כי הפונקציה $F : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 y} (\cos x \cos y, \sin x \sin y)$

המוגדרת בקבוצה $D = \{(x, y) \mid \sin^2 x + \cos^2 y > 0\}$ היא שדה משמר בקבוצה $B((0, 0); 1)$ ואינה

שדה משמר בקבוצה D . (שימו לב שהמכנה קבוע על הישרים $y = n\pi \pm x$.)

פתרון

ראשית נחשב את מטריצת היעקוביאן של F . נסמן

וכן: $\varphi : (x, y) \mapsto \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 y}$

הפונקציה g גזירה בכל המישור ומתקיים:

הפונקציה φ גזירה ב- D ולכל $(x, y) \in D$

מתקיים: $\nabla \varphi(x, y) = \frac{2}{(\sin^2 x + \cos^2 y)^2} (-\sin x \cos x, \sin y \cos y)$

כמוכן $F = \varphi g$ ולפי חלק ב של שאלה 3.15 היא גזירה ב- D ולכל $(x, y) \in D$ מתקיים:

$$\begin{aligned} JF_{(x,y)} &= J(\varphi g)_{(x,y)} = g(x, y)^T \nabla \varphi(x, y) + \varphi(x, y) Jg_{(x,y)} \\ &= \frac{2}{(\sin^2 x + \cos^2 y)^2} \begin{pmatrix} \cos x \cos y \\ \sin x \sin y \end{pmatrix} (-\sin x \cos x, \sin y \cos y) + \frac{1}{\sin^2 x + \cos^2 y} \begin{pmatrix} -\sin x \cos y & -\cos x \sin y \\ \cos x \sin y & \sin x \cos y \end{pmatrix} \\ &= \frac{2}{(\sin^2 x + \cos^2 y)^2} \begin{pmatrix} -\sin x \cos^2 x \cos y & \cos x \sin y \cos^2 y \\ -\sin^2 x \cos x \sin y & \sin x \sin^2 y \cos y \end{pmatrix} \\ &\quad + \frac{1}{(\sin^2 x + \cos^2 y)^2} \begin{pmatrix} -\sin^3 x \cos y - \sin x \cos^3 y & -\sin^2 x \cos x \sin y - \cos x \sin y \cos^2 y \\ \sin^2 x \cos x \sin y + \cos x \sin y \cos^2 y & \sin^3 x \cos y + \sin x \cos^3 y \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{(\sin^2 x + \cos^2 y)^2} \begin{pmatrix} -\sin^3 x \cos y - \sin x \cos^3 y - 2 \sin x \cos^2 x \cos y & \cos x \sin y \cos^2 y - \sin^2 x \cos x \sin y \\ \cos x \sin y \cos^2 y - \sin^2 x \cos x \sin y & \sin^3 x \cos y + \sin x \cos^3 y + 2 \sin x \sin^2 y \cos y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

לכן מטריצת היעקוביאן $JF_{(x,y)}$ רציפה וסימטרית ב- D .

אם $(x, y) \in B((0, 0); 1)$ אז $|x| < 1 < \frac{\pi}{2}$ ולכן $\cos y > 0$ ולכן $\sin^2 x + \cos^2 y > 0$ כלומר

$(x, y) \in D$ אז $JF_{(x,y)}$ רציפה וסימטרית לכל $(x, y) \in B((0, 0); 1)$. הקבוצה $B((0, 0); 1)$ היא

כדור פתוח, ולכן קבוצה פתוחה וכוונתית. לכן לפי טענה 4.8.n.4 שדה משמר ב- $B((0, 0); 1)$.

דרך נוספת להוכיח זאת: עבור כל y קבוע אפשר

לחשב:
$$\int [F(x, y)]_1 dx = \int \frac{\cos x \cos y}{\sin^2 x + \cos^2 y} dx \stackrel{\substack{u \cos y = \sin x \\ \cos y du = \cos x dx}}{=} \int \frac{\cos^2 y}{u^2 \cos^2 y + \cos^2 y} du$$

$$= \int \frac{1}{u^2 + 1} du = \arctan u + C(y) = \arctan \frac{\sin x}{\cos y} + C(y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\cos x \cos y}{\sin^2 x + \cos^2 y} = [F(x, y)]_1 \quad \text{אז הפונקציה } f: (x, y) \mapsto \arctan \frac{\sin x}{\cos y} \text{ מקיימת:}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\sin x \sin y}{\sin^2 x + \cos^2 y} = [F(x, y)]_2 \quad \text{אפשר לגזור לפי } y \text{ ולוודא:}$$

אז f גזירה חלקית בכל נקודה (x, y) שבה $\cos y \neq 0$ ומתקיים $\nabla f(x, y) = F(x, y)$. לכן היא גזירה חלקית ברציפות קבוצת הנקודות האלה, שהיא קבוצה פתוחה, ולכן היא גזירה ברציפות בקבוצה זאת, ולכן f היא פוטנציאל של F בקבוצה זאת. הקבוצה $B((0, 0); 1)$ מוכלת בקבוצה זאת, ולכן יש ל- F פוטנציאל ב- $B((0, 0); 1)$, ולכן F שדה משמר ב- $B((0, 0); 1)$.

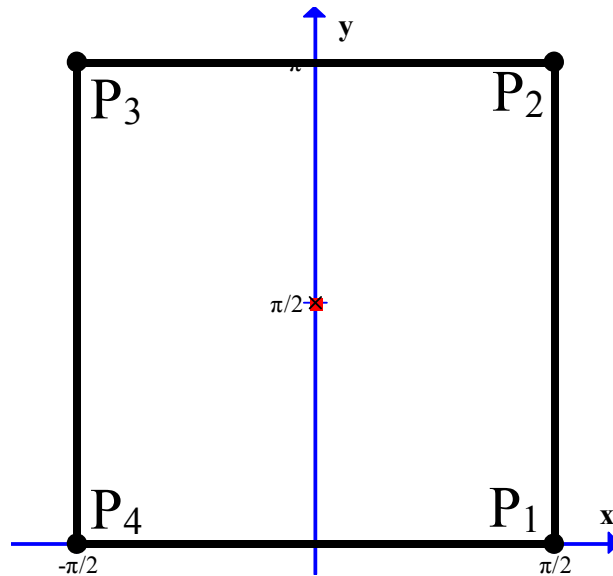
עכשיו נרצה להראות ש- f אינה שדה משמר ב- D . לשם כך די להראות זוג מסילות חלופיות שעליהן האינטגרלים של התבנית $F \cdot (dx, dx)$ שונים זה מזה, או לולאה שעליה האינטגרל של התבנית אינו אפס. נראה זאת בשתי דרכים.

דרך אחת היא למצוא שגם הפונקציה $g: (x, y) \mapsto -\arctan \frac{\cos y}{\sin x}$ היא פוטנציאל של F , בקבוצת

כל הנקודות (x, y) שבהן $\sin x \neq 0$, וזאת כי מתקיים שם:

$$\nabla g(x, y) = F(x, y) \quad \text{נסמן: } P_1 = \left(\frac{\pi}{2}, 0\right), P_2 = \left(\frac{\pi}{2}, \pi\right), P_3 = \left(-\frac{\pi}{2}, \pi\right), P_4 = \left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

נסמן גם $P_0 = P_4$ ונגדיר לולאה שתמונתה הריבוע באיור על ידי שרשור ארבע מסילות אפניות מתאימות שתמונותיהן צלעות הריבוע:



לשם כך אפשר להגדיר למשל $\varphi_i: [i-1, i] \rightarrow \mathbb{R}^2$ על ידי:

רואים ש- $\varphi_i(i-1) = P_{i-1}$ ו- $\varphi_i(i) = P_i$ עבור $i = 1, 2, 3, 4$ ולכן המסילות ניתנות לשרשור ומוגדרת

המסילה $\varphi: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2$: $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4$. היא מקיימת $\varphi(i) = P_i$ עבור $i = 0, 1, 2, 3, 4$ ובפרט

$\varphi(0) = P_0 = P_4 = \varphi(4)$ ולכן זאת לולאה. עכשיו אפשר לחשב את האינטגרל:

$$\int_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \int_{\varphi_1} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_2} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_3} F \cdot d(x, y) + \int_{\varphi_4} F \cdot d(x, y)$$

לכל (x, y) בתמונת φ_1 או בתמונת φ_3 מתקיים $y = 0$ או $y = \pi$ ולכן $\cos y \neq 0$ ולכן תמונות φ_1

ו- φ_3 מוכלות בתחום שבו f היא פוטנציאל של F . לכן:

$$\int_{\varphi_1} F \cdot d(x, y) = f(P_1) - f(P_0) = \arctan \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos 0} - \arctan \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos 0} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\varphi_3} F \cdot d(x, y) = f(P_3) - f(P_2) = \arctan \frac{\sin(-\frac{\pi}{2})}{\cos \pi} - \arctan \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{\cos \pi} = \arctan 1 - \arctan(-1) = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

לכל (x, y) בתמונת φ_2 או בתמונת φ_4 מתקיים $x = \pm \frac{\pi}{2}$ ולכן $\sin x \neq 0$ ולכן תמונות φ_2 ו- φ_4

מוכלות בתחום שבו g היא פוטנציאל של F . לכן:

$$\int_{\varphi_2} F \cdot d(x, y) = f(P_2) - f(P_1) = -\arctan \frac{\cos \pi}{\sin \frac{\pi}{2}} + \arctan \frac{\cos 0}{\sin \frac{\pi}{2}} = -\arctan(-1) + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\varphi_4} F \cdot d(x, y) = f(P_4) - f(P_3)$$

$$= -\arctan \frac{\cos 0}{\sin(-\frac{\pi}{2})} + \arctan \frac{\cos \pi}{\sin(-\frac{\pi}{2})} = -\arctan(-1) + \arctan 1 = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\varphi} F \cdot d(x, y) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = 2\pi \neq 0 \quad \text{לכן}$$

ומכך שעל לולאה אחת שתמונתה ב- D האינטגרל של התבנית $F \cdot (dx, dy)$ אינו אפס נובע ש- D

אינה שדה משמר ב- D .

נראה דרך נוספת שאינה כרוכה במציאת פוטנציאלים ל- F בתחומים שונים:

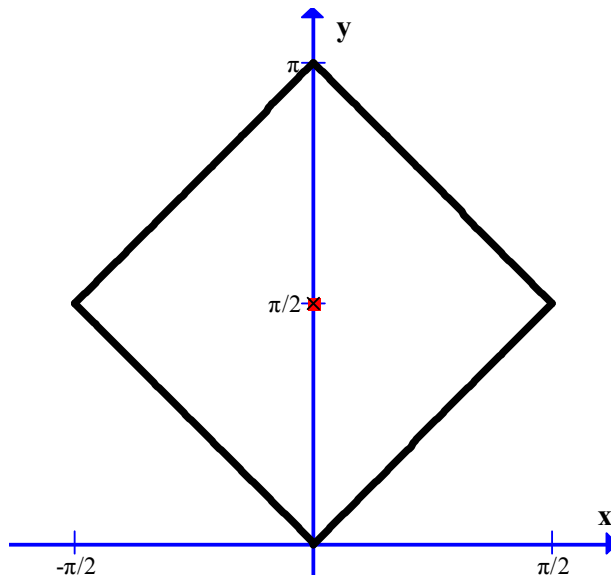
עבור מספר שלם n ו- $\varepsilon \in \{\pm 1\}$ נגדיר פונקציה אפינית $\psi_{n,\varepsilon} : t \mapsto (t, n\pi + \varepsilon t)$.

לכל קטע $[a, b]$ הצמצום $\psi_{n,\varepsilon}|_{[a,b]}$ הוא מסילה אפינית, ודי קל לחשב את האינטגרל של התבנית

$F \cdot d(x, y)$ עליה בעזרת משפט 24.1.8:

$$\begin{aligned} \int_{\psi_{n,\varepsilon}|_{[a,b]}} F \cdot d(x, y) &= \int_a^b F(\psi_{n,\varepsilon}(t)) \cdot \dot{\psi}_{n,\varepsilon}(t) dt = \int_a^b F(t, n\pi + \varepsilon t) \cdot (1, \varepsilon) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2(n\pi + \varepsilon t)} (\cos t \cos(n\pi + \varepsilon t), \sin t \sin(n\pi + \varepsilon t)) \cdot (1, \varepsilon) dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t} \left((-1)^n \cos t \cos t, (-1)^n \varepsilon \sin t \sin t \right) \cdot (1, \varepsilon) dt \\ &= \int_a^b (-1)^n (\cos^2 t, \varepsilon \sin^2 t) \cdot (1, \varepsilon) dt = (-1)^n \int_a^b (\cos^2 t + \varepsilon^2 \sin^2 t) dt \\ &= (-1)^n \int_a^b (\cos^2 t + \sin^2 t) dt = (-1)^n \int_a^b 1 dt = (-1)^n (b - a) \end{aligned}$$

המסילות $\psi_{0,-1} : [-\frac{\pi}{2}, 0]$ ו- $\psi_{0,+1} : [0, \frac{\pi}{2}]$ הן מסילות חלופיות שמוצא שתייהן הנקודה $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ ויעד שתייהן הנקודה $(\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$, ותמונת כל אחת מהן היא איחוד שתי צלעות של הריבוע באיור :



נראה שמתקבלים עליהן אינטגרלים שונים של התבנית $F \cdot (dx, dy)$:

$$\begin{aligned} \int_{\psi_{0,-1}[-\frac{\pi}{2}, 0] * \psi_{0,+1}[0, \frac{\pi}{2}]} F \cdot d(x, y) &= \int_{\psi_{0,-1}[-\frac{\pi}{2}, 0]} F \cdot d(x, y) + \int_{\psi_{0,+1}[0, \frac{\pi}{2}]} F \cdot d(x, y) \\ &= (-1)^0 \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + (-1)^0 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi \\ \int_{\psi_{1,+1}[-\frac{\pi}{2}, 0] * \psi_{1,-1}[0, \frac{\pi}{2}]} F \cdot d(x, y) &= \int_{\psi_{1,+1}[-\frac{\pi}{2}, 0]} F \cdot d(x, y) + \int_{\psi_{1,-1}[0, \frac{\pi}{2}]} F \cdot d(x, y) \\ &= (-1)^1 \left(0 - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right) + (-1)^1 \left(\frac{\pi}{2} \right) = -\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} = -\pi \end{aligned}$$

מצאנו שתי מסילות חלופיות שתמונותיהן ב- D וערכי האינטגרלים של התבנית $F \cdot d(x, y)$ שונים עליהן, ולכן F אינה שדה משמר בקבוצה D .

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $F: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ שגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ וכך שהמטריצה JF_a סימטרית לכל $a \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$. נתונה מסילה $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4$ ולכל i המסילה φ_i היא מסילה פשוטה שתמונתה קטע שקצותיו P_{i-1} ו- P_i כאשר:

$$P_0 = (-2,1), P_1 = (2,-1), P_2 = (2,1), P_3 = (-2,-1), P_4 = (-2,1)$$

$$\int_{\varphi} (F(x-1,y) + F(x+1,y)) \cdot d(x,y) \quad \text{חשבו את האינטגרל המסילתי:}$$

פתרון

ראשית נשים לה שכדי שהשרשור יהיה מוגדר, נקודת היעד של כל מסילה בו צריכה להיות נקודת המוצא של המסילה הבאה, וזה מחייב שלכל $i \in \{1,2,3,4\}$ נקודת המוצא של φ_i הוא P_{i-1} ונקודת היעד של φ_i הוא P_i . לכן נקודת המוצא של φ היא P_0 ונקודת היעד של φ היא P_4 ומאחר ש- $P_0 = P_4$ המסילה φ היא לולאה. כמוכן כל אחת מהמסילות φ_i היא פשוטה ותמונתה קטע, ולכן אורכה סופי (הוא אורך הקטע), ולכן גם אורך הלולאה φ סופי.

יש כמה וכמה דרכים לפתור את השאלה. נוח להשתמש בהזזות $\tau_n: (x,y) \mapsto (x+n,y)$ כי בבירור הפונקציה $(x,y) \mapsto F(x-1,y) + F(x+1,y)$ היא הסכום של $F \circ \tau_{-1}$ ו- $F \circ \tau_1$.

לשם כך נוכיח באופן כללי עבור הזה $\tau: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ המוגדרת על ידי $\tau: x \mapsto x+u$ שאם F מוגדרת בתמונת מסילה $\varphi: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}^k$ אז מתקיים:

$$\int_{\varphi} F \circ \tau \cdot dx = \int_{\tau \circ \varphi} F \cdot dx$$

נניח לפי הגדרה 9.1.8 לשם כך די להראות שלכל חלוקה T של $[a,b]$

$$R_T(F \circ \tau \cdot dx; \varphi) = R_T(F \cdot dx; \tau \circ \varphi) \quad \text{מתקיים:}$$

ניקח חלוקה $T = (t_i)_{i=0}^r$ של $[a,b]$ ודגימה $X = (x_i)_{i=1}^r$ מקטעי החלוקה. אז:

$$\begin{aligned} S_{T,X}(F \cdot dx; \tau \circ \varphi) &= \sum_{i=1}^r F(\tau \circ \varphi(x_i)) \cdot (\tau \circ \varphi(t_i) - \tau \circ \varphi(t_{i-1})) \\ &= \sum_{i=1}^r F \circ \tau \circ \varphi(x_i) \cdot (\varphi(t_i) + u - \varphi(t_{i-1}) - u) \\ &= \sum_{i=1}^r F \circ \tau(\varphi(x_i)) \cdot (\varphi(t_i) - \varphi(t_{i-1})) = S_{T,X}(F \circ \tau \cdot dx; \varphi) \end{aligned}$$

לכן לכל חלוקה ולכל דגימה ממנה מקבלים בדיוק אותו סכום רימן, וזה מוכיח את השוויון בין שני האינטגרלים לעיל. ובכן האינטגרל שעלינו לחשב הוא:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} (F(x-1,y) + F(x+1,y)) \cdot d(x,y) &= \int_{\varphi} (F \circ \tau_{-1} + F \circ \tau_1) \cdot d(x,y) \\ &= \int_{\tau_{-1} \circ \varphi} F \cdot d(x,y) + \int_{\tau_1 \circ \varphi} F \cdot d(x,y) \end{aligned}$$

חשוב לשים לב גם שהנקודות $(\pm 1,0)$ אינן באף אחד מהקטעים שהם תמונות המסילות φ_i ולכן

אינם בתמונת φ , ולכן $(0,0)$ אינה בתמונות של הלולאות $\tau_1 \circ \varphi$ ו- $\tau_{-1} \circ \varphi$, ולכן F רציפה

בתמונות לולאות אלה והאינטגרלים לעיל מוגדרים.

אחת הדרכים להמשיך היא להראות שמספר הליפוף של $\tau_{-1} \circ \varphi$ סביב הראשית הוא 1 ומספר

הליפוף של $\tau_1 \circ \varphi$ הוא -1, ובסימוני שאלה 10.ח.8 מקבלים שהאינטגרל המבוקש הוא:

$$\int_{\tau_{-1} \circ \varphi} F \cdot d(x, y) + \int_{\tau_1 \circ \varphi} F \cdot d(x, y) = \gamma_F \cdot 1 + \gamma_F \cdot (-1) = 0$$

אלא שחישוב מנומק של מספר הליפוף אינו כל כך קצר. אז ננסה קודם משהו אחר.

המטריצה $M(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}$ היא "מטריצת סיבוב סביב הראשית בזווית θ " במובן

שהוקטור $(x, y)M(\theta)$ מתקבל מהוקטור (x, y) על ידי סיבוב בזווית θ רדיאנים סביב הראשית

במגמה החיובית. נניח שהתחום של φ הוא הקטע $[\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^2$ כלומר $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbf{R}^2$

נגדיר הומוטופיה על ידי:

$$H: [\alpha, \beta] \times [0, 1] \rightarrow \mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$$

$$(\lambda, t) \mapsto \tau_1 \circ \varphi(t)M(\lambda\pi)$$

מאחר ש- $(0,0)$ אינו בתמונת $\tau_1 \circ \varphi$ ו- $M(\lambda\pi)$ היא מטריצה הפיכה, $(0,0)$ אינו בתמונת H .

הפונקציה H רציפה בתור מכפלת מטריצות של פונקציות רציפות. לכל $\lambda \in [0, 1]$ מתקיים

$$H_\lambda(\alpha) = H(\alpha, \lambda) = \tau_1(\varphi(\alpha))M(\lambda\pi) = \tau_1(\varphi(\beta))M(\lambda\pi) = H(\beta, \lambda) = H_\lambda(\beta)$$

ולכן H_λ היא לולאה. כמוכן $M(0)$ היא מטריצת היחידה ולכן $H_0 = \tau_1 \circ \varphi$.

אז H היא הומוטופיה של לולאות מהלולאה $H_0 = \tau_1 \circ \varphi$ ללולאה:

$$t \mapsto \tau_1 \circ \varphi(t)M(\pi) = -\tau_1 \circ \varphi(t)$$

$$\int_{\tau_1 \circ \varphi} F \cdot d(x, y) = \int_{H_0} F \cdot d(x, y) = \int_{H_1} F \cdot d(x, y) \quad \text{לפי טענה 13.ח.8 מתקיים:}$$

$$\int_{H_1} F \cdot d(x, y) = - \int_{\tau_{-1} \circ \varphi} F \cdot d(x, y) \quad \text{עכשיו נרצה להראות שמתקיים}$$

ומכך נסיק שהאינטגרל המבוקש

$$\int_{\tau_{-1} \circ \varphi} F \cdot d(x, y) + \int_{\tau_1 \circ \varphi} F \cdot d(x, y) = - \int_{H_1} F \cdot d(x, y) + \int_{H_0} F \cdot d(x, y) = 0 \quad \text{הוא:}$$

הלולאה φ היא שרשור $\varphi = \varphi_1 * \varphi_2 * \varphi_3 * \varphi_4$ ולכל i המסילה φ_i היא מסילה פשוטה שתמונתה

קטע שקצותיו P_{i-1} ו- P_i . מאחר ש הלולאה $\tau_1 \circ \varphi$ מתקבלת על ידי הרכבה של הזזה עליה, והזזה

היא העתקת חפיפה, גם היא שרשור $\tau_1 \circ \varphi = (\tau_1 \circ \varphi_1) * (\tau_1 \circ \varphi_2) * (\tau_1 \circ \varphi_3) * (\tau_1 \circ \varphi_4)$ ולכל i

המסילה $\tau_1 \circ \varphi_i$ היא מסילה פשוטה שתמונתה קטע שקצותיו $\tau_1(P_{i-1})$ ו- $\tau_1(P_i)$. דבר דומה נכון

עבור הלולאה $\tau_{-1} \circ \varphi$. הלולאה H_1 מתקבלת מהלולאה $\tau_1 \circ \varphi$ על ידי הרכבה של העתקת החפיפה

$$(x, y) \mapsto (x, y)M(\pi) = (-x, -y)$$

אחת מהן קטע: $H_1 = \psi_1 * \psi_2 * \psi_3 * \psi_4$ כאשר ψ_i היא מסילה פשוטה שתמונתה קטע, נקודת

המוצא שלה היא $-\tau_1(P_{i-1})$ ונקודת היעד שלה היא $-\tau_1(P_i)$. עכשיו אפשר לבדוק

$$\begin{aligned} -\tau_1(P_0) &= -\tau_1(P_4) = -\tau_1(-2,1) = -(-1,1) = (1,-1) = \tau_{-1}(2,-1) = \tau_{-1}(P_1) \\ -\tau_1(P_1) &= -\tau_1(2,-1) = -(3,-1) = (-3,1) = \tau_{-1}(-2,1) = \tau_{-1}(P_0) = \tau_{-1}(P_4) \\ -\tau_1(P_2) &= -\tau_1(2,1) = -(3,1) = (-3,-1) = \tau_{-1}(-2,-1) = \tau_{-1}(P_3) \\ -\tau_1(P_3) &= -\tau_1(-2,-1) = -(-1,-1) = (1,1) = \tau_{-1}(2,1) = \tau_{-1}(P_2) \end{aligned}$$

שמתקיים :

המוצא של ψ_1 הוא $-\tau_1(P_0) = \tau_{-1}(P_1)$ שהוא היעד של $\tau_{-1} \circ \varphi_1$. היעד של ψ_1 הוא

$-\tau_1(P_1) = \tau_{-1}(P_0)$ שהוא המוצא של $\tau_{-1} \circ \varphi_1$. שתייהן מסילות פשוטות שתמונותיהן הקטע הישר

בין המוצא והיעד. לכן מטענה 13.א.8 נקבל ש- $\bar{\psi}_1$ שקולה ל- $\tau_{-1} \circ \varphi_1$.

המוצא של ψ_2 הוא $-\tau_1(P_1) = \tau_{-1}(P_4)$ שהוא היעד של $\tau_{-1} \circ \varphi_4$. היעד של ψ_2 הוא

$-\tau_1(P_2) = \tau_{-1}(P_3)$ שהוא המוצא של $\tau_{-1} \circ \varphi_4$. שתייהן מסילות פשוטות שתמונותיהן הקטע הישר

בין המוצא והיעד. לכן מטענה 13.א.8 נקבל ש- $\bar{\psi}_2$ שקולה ל- $\tau_{-1} \circ \varphi_4$.

המוצא של ψ_3 הוא $-\tau_1(P_2) = \tau_{-1}(P_3)$ שהוא היעד של $\tau_{-1} \circ \varphi_3$. היעד של ψ_3 הוא

$-\tau_1(P_3) = \tau_{-1}(P_2)$ שהוא המוצא של $\tau_{-1} \circ \varphi_3$. שתייהן מסילות פשוטות שתמונותיהן הקטע הישר

בין המוצא והיעד. לכן מטענה 13.א.8 נקבל ש- $\bar{\psi}_3$ שקולה ל- $\tau_{-1} \circ \varphi_3$.

המוצא של ψ_4 הוא $-\tau_1(P_3) = \tau_{-1}(P_2)$ שהוא היעד של $\tau_{-1} \circ \varphi_2$. היעד של ψ_4 הוא

$-\tau_1(P_4) = \tau_{-1}(P_1)$ שהוא המוצא של $\tau_{-1} \circ \varphi_2$. שתייהן מסילות פשוטות שתמונותיהן הקטע הישר

בין המוצא והיעד. לכן מטענה 13.א.8 נקבל ש- $\bar{\psi}_4$ שקולה ל- $\tau_{-1} \circ \varphi_2$.

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{-1} \circ \varphi} F \cdot d(x,y) &= \int_{\tau_{-1} \circ \varphi_1} F \cdot d(x,y) + \int_{\tau_{-1} \circ \varphi_2} F \cdot d(x,y) + \int_{\tau_{-1} \circ \varphi_3} F \cdot d(x,y) + \int_{\tau_{-1} \circ \varphi_4} F \cdot d(x,y) \\ &= \int_{\bar{\psi}_1} F \cdot d(x,y) + \int_{\bar{\psi}_4} F \cdot d(x,y) + \int_{\bar{\psi}_3} F \cdot d(x,y) + \int_{\bar{\psi}_2} F \cdot d(x,y) \\ &= - \int_{\psi_1} F \cdot d(x,y) - \int_{\psi_4} F \cdot d(x,y) - \int_{\psi_3} F \cdot d(x,y) - \int_{\psi_2} F \cdot d(x,y) = - \int_{H_1} F \cdot d(x,y) \end{aligned}$$

ובזה הסתיים חישוב האינטגרל (ראינו קודם שממה שקיבלנו כאן נובע שהאינטגרל הנתון הוא 0).

יש דרכים נוספות לחשב את האינטגרל. אדגים **דרך נוספת**: על ידי חישוב מספר הליפוף של

הלולאות $\tau_1 \circ \varphi$ ו- $\tau_{-1} \circ \varphi$.

בסימוני הערה 9.ח.8, לפונקציה G יש פוטנציאל g_+ במישור השסוע U_+ ויש גם פוטנציאל g_-

במישור השסוע U_- .

נשים לב שבין שמונה המסילות $\tau_1 \circ \varphi_i$ ו- $\tau_{-1} \circ \varphi_i$ תמונות כולן פרט לתמונות $\tau_1 \circ \varphi_3$ ו- $\tau_{-1} \circ \varphi_1$

מוכלות ב- U_+ , ותמונות כולן פרט ל- $\tau_1 \circ \varphi_1$ ו- $\tau_{-1} \circ \varphi_3$ מוכלות ב- U_- . נוכל לחשב את האינטגרל של

התבנית $G \cdot d(x,y)$ על כל אחת מבין המסילות האלה או מבין השרשרורים שלהן שתמונתה

מוכלת ב' U_+ או ב' U_- כהפרש פוטנציאלים מתאים. לכן

$$\begin{aligned} \int_{\tau_1 \circ \varphi} G \cdot d(x, y) &= \int_{\tau_1 \circ \varphi_1} G \cdot d(x, y) + \int_{(\tau_1 \circ \varphi_2) * (\tau_1 \circ \varphi_3) * (\tau_1 \circ \varphi_4)} G \cdot d(x, y) \\ &= g_+(\tau_1(P_1)) - g_+(\tau_1(P_0)) + g_-(\tau_1(P_4)) - g_-(\tau_1(P_1)) \\ &= g_+(3, -1) - g_+(-1, 1) + g_-(-1, 1) - g_-(3, -1) \\ &= \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{3}{-1}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-1}{1}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-1}{1}\right) - \left(\frac{3\pi}{2} - \arctan \frac{3}{-1}\right) = -2\pi \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\tau_1 \circ \varphi} G \cdot d(x, y) = -1 \quad \text{ומספר הליפוף של } \tau_1 \circ \varphi \text{ הוא:}$$

בדומה:

$$\begin{aligned} \int_{\tau_{-1} \circ \varphi} G \cdot d(x, y) &= \int_{\tau_{-1} \circ \varphi_1} G \cdot d(x, y) + \int_{(\tau_{-1} \circ \varphi_2) * (\tau_{-1} \circ \varphi_3) * (\tau_{-1} \circ \varphi_4)} G \cdot d(x, y) \\ &= g_-(\tau_{-1}(P_1)) - g_-(\tau_{-1}(P_0)) + g_+(\tau_{-1}(P_4)) - g_+(\tau_{-1}(P_1)) \\ &= g_-(1, -1) - g_-(-3, 1) + g_+(-3, 1) - g_+(1, -1) \\ &= \left(\frac{3\pi}{2} - \arctan \frac{1}{-1}\right) - \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-3}{1}\right) + \left(\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{-3}{1}\right) - \left(-\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{1}{-1}\right) = 2\pi \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2\pi} \int_{\tau_{-1} \circ \varphi} G \cdot d(x, y) = 1 \quad \text{ומספר הליפוף של } \tau_{-1} \circ \varphi \text{ הוא:}$$

כאמור קודם, בסימוני שאלה 10.ח.8 מקבלים שהאינטגרל המבוקש הוא:

$$\int_{\tau_{-1} \circ \varphi} F \cdot d(x, y) + \int_{\tau_1 \circ \varphi} F \cdot d(x, y) = \gamma_F \cdot 1 + \gamma_F \cdot (-1) = 0$$

דרך נוספת נעזרת במשפט גרין שנלמד בסוף פרק 9 ובפרט בשאלה 22.ט.9.

לצורך זה אסמן את ראשית הצירים ב' Q ואת כל אחת מהמסילות φ_1 ו' φ_3 שתמונותיהן קטעים שראשית הצירים באמצעם אפצל לשרשור של שתי מסילות עם נקודות מוצא או יעד ב' Q . כדי לא להוסיף עוד המון סימונים נסכים לסמן מסילה פשוטה כלשהי שנקודת מוצאה A ונקודת יעדה B בסימון AB . אז כמובן $\overline{AB} = BA$. מאחר שכל המסילות הפשוטות עם אותה תמונה ואותו מוצא ויעד שקולות, ערך האינטגרל של תבנית אינו משתנה כשמחליפים מסילה במסילה ששקולה לה, נוכל להשתמש בסימון זה בחישוב האינטגרל, גם אם לפעמים אותו סימון יסמן מסילות שונות אבל שקולות. בסימון זה נקבל:

$$\varphi = P_0Q * QP_1 * P_1P_2 * P_2Q * QP_3 * P_3P_4$$

כדי לקצר אסמן את התבנית באינטגרל בנתון כך:

$$\begin{aligned} \int \omega &= \int_{P_0Q * QP_1 * P_1P_2 * P_2Q * QP_3 * P_3P_4} \omega = \int_{P_0Q} \omega + \int_{QP_1 * P_1P_2 * P_2Q} \omega + \int_{QP_3 * P_3P_4} \omega \\ &= \int_{QP_1 * P_1P_2 * P_2Q} \omega + \int_{PQP_3 * P_3P_4} \omega + \int_{P_4Q} \omega = \int_{QP_1 * P_1P_2 * P_2Q} \omega + \int_{QP_3 * P_3P_4 * P_4Q} \omega \end{aligned}$$

(נשים לב שהמסילה שמסומנת ב' P_4Q בשרשור בשורה השניה אינה המסילה שמסומנת ב' P_0Q)

שבשרשור בשורה הראשונה, אלא מסילה שקולה לה כך שהשרשור בשורה השניה מוגדר).

$$\int_{\varphi} \omega = \int_{\psi_1} \omega + \int_{\psi_2} \omega : \text{ומתקיים: } \psi_2 = QP_3 * P_3P_4 * P_4Q \text{ ו- } \psi_1 = QP_1 * P_1P_2 * P_2Q$$

הלולאה ψ_1 מקיפה את המשולש QP_1P_2 ששוכן לשמאל לולאה זאת, והלולאה ψ_2 מקיפה את

המשולש QP_3P_4 ששוכן לימין לולאה זאת, כלומר הוא שוכן לשמאל הלולאה ההפוכה $\bar{\psi}_2$.

הנקודה $(1,0)$ נמצאת בפנים המשולש QP_1P_2 ומחוץ למשולש QP_3P_4 .

הנקודה $(-1,0)$ נמצאת מחוץ למשולש QP_1P_2 ובפנים המשולש QP_3P_4 .

לכן ראשית הצירים $(0,0) = \tau_{-1}(1,0)$ נמצאת בפנים המשולש $\tau_{-1}(QP_1P_2)$ השוכן לשמאל

הלולאה $\tau_{-1} \circ \psi_1$ ומחוץ למשולש $\tau_{-1}(QP_3P_4)$ השוכן לשמאל הלולאה $\tau_{-1} \circ \bar{\psi}_2$.

ממשפט גרין ומשאלה 22.ט.9 נקבל שמספר הליפוף סביב הראשית של $\tau_{-1} \circ \psi_1$ הוא 1 ומספר

הליפוף סביב הראשית של הלולאה $\tau_{-1} \circ \bar{\psi}_2$ הוא 0, וזה גם מספר הליפוף של הלולאה $\tau_{-1} \circ \psi_2$.

כמוכן ראשית הצירים $(0,0) = \tau_1(-1,0)$ נמצאת מחוץ למשולש $\tau_1(QP_1P_2)$ השוכן לשמאל

הלולאה $\tau_1 \circ \psi_1$ ובפנים המשולש $\tau_1(QP_3P_4)$ השוכן לשמאל הלולאה $\tau_1 \circ \bar{\psi}_2$.

שוב ממשפט גרין ומשאלה 22.ט.9 נקבל שמספר הליפוף סביב הראשית של $\tau_1 \circ \psi_1$ הוא 0 ומספר

הליפוף סביב הראשית של הלולאה $\tau_1 \circ \bar{\psi}_2$ הוא 1, ולכן מספר הליפוף סביב הראשית של הלולאה

$\tau_1 \circ \psi_2$ הוא -1. עכשיו נוכל להיעזר בדברים שהוכחו קודם ובשאלה 10.ח.8 ולקבל:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} \omega &= \int_{\psi_1} \omega + \int_{\psi_2} \omega \\ &= \int_{\psi_1} (F \circ \tau_1(x, y) + F \circ \tau_{-1}(x, y)) \cdot d(x, y) + \int_{\psi_2} (F \circ \tau_1(x, y) + F \circ \tau_{-1}(x, y)) \cdot d(x, y) \\ &= \int_{\psi_1} F \circ \tau_1 \cdot d(x, y) + \int_{\psi_1} F \circ \tau_{-1} \cdot d(x, y) + \int_{\psi_2} F \circ \tau_1 \cdot d(x, y) + \int_{\psi_2} F \circ \tau_{-1} \cdot d(x, y) \\ &= \int_{\tau_1 \circ \psi_1} F \cdot d(x, y) + \int_{\tau_{-1} \circ \psi_1} F \cdot d(x, y) + \int_{\tau_1 \circ \psi_2} F \cdot d(x, y) + \int_{\tau_{-1} \circ \psi_2} F \cdot d(x, y) \\ &= 0 \cdot \gamma_F + 1 \cdot \gamma_F + (-1) \cdot \gamma_F + 0 \cdot \gamma_F = 0 \end{aligned}$$