

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

סמסטר : 1א2024

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרק 7

מועד אחרון להגשה : 17.3.2024

מספר השאלות : 5

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי a נקודה ב- $\mathbb{R}^k$. תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}^l$ המוגדרת וגזירה בסביבה U של הנקודה a , וגזירה ברציפות בנקודה a . נתון שהמטריצה Jf_a היא בעלת דרגה מלאה. הוכיחו שאם $k \geq l$ אז $f(U)$ היא סביבה של $f(a)$.
עצה: בעזרת הפונקציה הנתונה בנו פונקצית עזר עבורה יתקיימו תנאי משפט הפונקציה ההופכית.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי α מספר ממשי כלשהו. תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ שהיא הומוגנית-חיובית ממעלה α וגזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ וכן $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. הקבוצה $S = \{x \mid f(x) = 1\}$ היא משטח-על חלק. תהי $a \in S$. מצאו מה המרחק בין ראשית הצירים והמישור-על המשיק ל- S בנקודה a .

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו שקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 1 היא יריעה חלקה.
מצאו מטריצה שדרגתה מלאה שנמצאת במרחב המשיק ליריעה זאת בנקודה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ שעליה.

שאלה 4 (20 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו את אי-שוויון הממוצעים כמסקנה ממשפט 11.ה.7 ("כופלי לגרנז'").
א. הראו שלפונקצית המכפלה $f: (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 \cdots x_k$ יש ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה

$$\left\{ (x_1, \dots, x_k) \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k = k \right\}$$

ומצאו את כל נקודות הקיצון של f בקבוצה זאת.

ב. הסיקו מסעיף א את אי-שוויון הממוצעים:

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$$

אם $a_1, \dots, a_k$ מספרים אישיליים אז מתקיים:

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} < \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$$

ואם לא כל המספרים $a_1, \dots, a_k$ שווים זה לזה אז מתקיים גם:

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי:

$$(x, y, z) \mapsto xy^2z^3$$

מצאו את כל נקודות הקיצון של f בקבוצה $D = \{ (x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq z, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1 \}$

ואת הערך המזערי והערך המרבי שלה בקבוצה (אם אלה קיימים).

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2022\ב\84.

מכך ש- Jf_a היא מטריצה $l \times k$ ו- $k \geq l$ נובע שיש מטריצה $A_{k \times l}$ כך ש- $Jf_a A$ היא מטריצה $l \times l$ הפיכה. נגדיר $g: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^k$ אפינית על ידי $g: x \mapsto xA^T + a$. מכך ש- U סביבה של $a = g(0)$ נובע ש- $V = g^{-1}(U)$ היא סביבה של 0. מכלל השרשרת לכל $v \in V$ מתקיים $J(f \circ g)_v = Jf_{g(v)} Jg_v = Jf_{g(v)} A$. בפרט מכך ש- $g(0) = a$ ומרציפות Jf בנקודה a נובע ש- $J(f \circ g)_v \rightarrow J(f \circ g)_0$ כלומר $f \circ g$ גזירה ברציפות בנקודה 0 וכן $J(f \circ g)_0 = Jf_{g(0)} A = Jf_a A$ מטריצה הפיכה. ממשפט הפונקציה ההופכית (4.א.7) נובע שיש כדור פתוח $B \subseteq V$ סביב 0 כך ש- $f \circ g(B)$ קבוצה פתוחה. אז $f(a) = f(g(0)) = f \circ g(0) \in f(B)$ ולכן $f(a) \in f(B)$ סביבה של $f(a)$. כמוכן

$$f \circ g(B) = f(g(B)) \subseteq f(g(V)) = f(g(g^{-1}(U))) = f(U)$$

ולכן גם $f(U)$ היא סביבה של $f(a)$.

* לחילופין, במקום הכפל מימין במטריצה $k \times l$, אפשר לטעון שיש ב- Jf_a עמודות בלתי-תלויות שנניח שמספריהן הם $i_1 < \dots < i_l$. אז אפשר להגדיר פונקציה h מ- $\mathbf{R}^l$ ל- $\mathbf{R}^k$ על ידי

$$x \mapsto f(a_1, \dots, a_{i_1-1}, x_{i_1}, a_{i_1+1}, \dots, a_{i_2-1}, x_{i_2}, a_{i_2+1}, \dots, a_{i_l-1}, x_{i_l})$$

ולישם על h עת משפט הפונקציה ההופכית.

לשאלה 2: בהשראת שאלה 6 2023\ב\91.

המישור-על המשיק הוא $a + T_a(S)$ ו- $T_a(S) = \{z \mid \nabla f(x) \cdot z = 0\}$ לפי דוגמה 6.ה.7. המרחק p הוא אורך הניצב מהראשית למישור המשיק, וניצב זה פרופורציוני ל- $\nabla f(a)$. לכן $\nabla f(a) \in a + T_a(S)$ ולכן $\pm p \frac{1}{|\nabla f(a)|} \nabla f(a) \in a + T_a(S)$

$$\begin{aligned} \pm p \frac{1}{|\nabla f(a)|} \nabla f(a) - a &\in T_a(S) \\ \left(\pm p \frac{1}{|\nabla f(a)|} \nabla f(a) - a \right) \cdot \nabla f(a) &= 0 \\ \pm p \frac{1}{|\nabla f(a)|} \nabla f(a) \cdot \nabla f(a) &= a \cdot \nabla f(a) \\ \pm p |\nabla f(a)| &= a \cdot \nabla f(a) = \alpha f(a) = \alpha \end{aligned}$$

בשורה האחרונה נעשה שימוש בזהות אוילר לפונקציה הומוגנית-חיובית מסדר α .

$$p = \frac{|\alpha|}{|\nabla f(a)|}$$

המרחק p הוא מספר אישילי ולכן:

ליתר דיוק במקרה $\alpha = 0$ המישור על המשיק מכיל את הראשית ולכן $p = 0$, ואחרת נובע שהגרדיאנט אינו אפס ואפשר לחלק.

לשאלה 3: שאלת המשך לשאלה 5 מממ"ן 11. שם הדרישה היתה להוכיח שזאת יריעה שממדה 4.

אפשר להראות שהטלאים שהיו שם בשימוש הם פונקציות גזירות עם יעקוביאן שדרגתו מלאה. אפשר גם להציג כפתרון מערכת משוואות (מינורים 2×2 מתאפסים).

המרחב המשיק ליריעה S בנקודה a שעליה הוא $a + T_a(S)$.

אפשר לבדוק למשל שעבור $a = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ המרחב $T_a(S)$ נפרש עלידי המטריצות

שהן תלויות לינארית וכל ארבע מהן בסיס $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

שלו. אז למשל $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ היא מטריצה שדרגתה מלאה

במרחב המשיק הזה.

לשאלה 4: כמובן הקבוצה קומפקטית והפונקציה הפולינומית רציפה, ולכן יש ערכים מזערי

ומרבי. ברור שהפונקציה אישלילית והמינימום של המכפלה הוא 0 ומתקבל בדיוק בנקודות שלפחות אחד משיעוריהן 0. בשאר הנקודות הפונקציה חיובית, והמקסימום מתקבל מביניהן, והוא מתקבל כקיצון תחת האילוץ $\varphi = k$ עם

$\varphi: (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 + \dots + x_k$. מקבלים שכל שיעורי נקודות הקיצון בהכרח שווים

ולכן היא $(1, \dots, 1)$ ולא שום נקודה אחרת.

בסעיף ב אם לפחות אחד ה- a_i הוא 0 ברר שהאישויונות נכונים. אם כולם אינם 0 אז

נסמן $x_i = \frac{ka_i}{a_1 + \dots + a_k}$ ונקבל $x_1 + \dots + x_k = k$ ולכן: $f(x_1, \dots, x_k) \leq f(1, \dots, 1) = 1$

אז $\frac{k^k a_1 \dots a_k}{(a_1 + \dots + a_k)^k} \leq 1$ ולכן:

$$k^k a_1 \dots a_k \leq (a_1 + \dots + a_k)^k$$

$$a_1 \dots a_k \leq \frac{(a_1 + \dots + a_k)^k}{k^k}$$

$$\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} \leq \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$$

אם לא כל ה- a_i שווים זה לזה אז $(x_1, \dots, x_k) \neq (1, \dots, 1)$ ולכן $(x_1, \dots, x_k)$ אינה נקודת

המקסימום של f בקבוצה, ולכן $f(x_1, \dots, x_k) < f(1, \dots, 1) = 1$ ואותו חישוב נותן את

האישויון החד: $\sqrt[k]{a_1 \dots a_k} < \frac{a_1 + \dots + a_k}{k}$

לשאלה 5: 4\13\2017. דומה ל-6\12\2022.

הקבוצה סגורה וחסומה והפונקציה פולינומית ולכן רציפה, ולכן יש ערך מזערי וערך מרבי. ברור שהערך המזערי הוא 0 (הפונקציה אישלילית בקבוצה) והוא מתקבל בכל נקודה בקבוצה בה מתאפס אחד משיעורי הנקודה. אין נקודות קריטיות בפנים

הקבוצה, ולכן נקודות המקסימום הן נקודות שפה שבהן אף אחד משיעורי הנקודה אינו 0. את אלה מוצאים בשיטת כופלי לגרנז' עם אילוץ אחד או שני אילוצים.

האילוצים הם $\varphi = x^4 + y^4 + z^4 = 1$ ו- $\psi = x - y = 0$ ולכן: $\nabla f = f(x) \left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}, \frac{3}{z} \right)$

$$\nabla \varphi = 4(x^3, y^3, z^3)$$

$$\nabla \psi = (1, -1, 0)$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{2}{y} & \frac{3}{z} \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{נקודות קיצון תחת שני האילוצים מחייבות:}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \quad \text{ויחד עם האילוצים מקבלים:}$$

תחת האילוץ $\psi = 0$ לא מקבלים נקודת קיצון.

תחת האילוץ $\varphi = 1$ מקבלים $y^4 = 2x^4$ ו- $z^4 = 3x^4$ ומכאן $1 = \varphi = 6x^4$ ומכאן:

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$$

בודקים שזה בתחום הנתון; מציבים ובודקים מי המקסימום.