

מתווה לפתרון ממ"ן 13

סמסטר: 1א2024

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה: 4 נקודות

חומר הלימוד למטלה: פרק 7

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי a נקודה ב- $\mathbf{R}^k$. תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbf{R}^l$ ל- $\mathbf{R}^k$ המוגדרת וגזירה בסביבה U של הנקודה a , וגזירה ברציפות בנקודה a . נתון שהמטריצה Jf_a היא בעלת דרגה מלאה. הוכיחו שאם $k \geq l$ אז $f(U)$ היא סביבה של $f(a)$.
עצה: בעזרת הפונקציה הנתונה בנו פונקצית עזר עבורה יתקיימו תנאי משפט הפונקציה ההופכית.

פתרון

מנתוני השאלה נובע ש- Jf_a היא מטריצה $l \times k$ ו- $k \geq l$ ולכן דרגת היא l . לכן יש מטריצה $A_{k \times l}$ כך ש- $Jf_a A$ היא מטריצה $l \times l$ הפיכה.¹ נגדיר $g: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^k$ אפינית על ידי: $g: x \mapsto xA^T + a$.
לפי חלק ג של אבחנה 2.ד.2 יש סביבה V של $0^{[l]}$ כך ש- $g(V) \subseteq U$. לפי כלל השרשרת ודוגמה 10.ו.3 לכל $v \in V$ מתקיים $J(f \circ g)_v = Jf_{g(v)} Jg_v = Jf_{g(v)} A = Jf_a$.
ומרציפות Jf_x בנקודה a נובע (לפי משפט 7.ה.2) שהפונקציה $v \mapsto J(f \circ g)_v$ רציפה ב- 0 , כלומר $f \circ g$ גזירה ברציפות בנקודה 0 . כמוכן המטריצה $J(f \circ g)_0 = Jf_{g(0)} A = Jf_a$ היא מטריצה הפיכה. ממשפט הפונקציה ההופכית (4.א.7) נובע שיש כדור פתוח $B \subseteq V$ סביב 0 כך ש- $f \circ g(B)$ קבוצה פתוחה. מתקיים $f(a) = f(g(0)) = f \circ g(0) \in f(B)$ ולכן $f \circ g(B)$ היא סביבה של $f(a)$. כמוכן $f \circ g(B) = f(g(B)) \subseteq f(g(V)) \subseteq f(U)$ ולכן גם $f(U)$ היא סביבה של $f(a)$.

¹ נזכיר זאת: תהי J מטריצה $l \times k$ שדרגתה l . הפונקציה $\varphi: x \mapsto xJ^T$ היא פונקציה לינארית $\mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^l$ שמימד תמונתה הוא l , כלומר היא על. אז יש $v_1, \dots, v_l \in \mathbf{R}^k$ כך ש- $\varphi(v_1), \dots, \varphi(v_l)$ בסיס של $\mathbf{R}^l$. אז יש פונקציה לינארית $\psi: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}^k$ כך ש- $\psi(\varphi(v_i)) = v_i$ עבור $i = 1, \dots, l$. אז $\varphi(\psi(\varphi(v_i))) = \varphi(v_i)$ ו- $\varphi \circ \psi(\varphi(v_i)) = \varphi(v_i)$. הפונקציה הלינארית $\varphi \circ \psi$ מעבירה בסיס של $\mathbf{R}^l$ לעצמו, ולכן היא פונקציית הזהות. הפונקציה הלינארית ψ מיוצגת בבסיסים הסטנדרטיים של התחום והטווח שלה על ידי איזושהי מטריצה $A_{k \times l}$, כלומר $\psi: x \mapsto xA^T$. אז $JA = I$ ולכן $x = \varphi \circ \psi(x) = \varphi(\psi(x)) = \psi(x)J^T = xA^T J^T = x(JA)^T$ והפונקציה $JA = I$ היא מטריצת היחידה מסדר $l \times l$, ובפרט היא מטריצה $l \times l$ הפיכה.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהי α מספר ממשי כלשהו. תהי $f: \mathbf{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}$ שהיא הומוגנית-חיובית ממעלה α וגזירה ברציפות ב- $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ וכן $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$. הקבוצה $S = \{x \mid f(x) = 1\}$ היא משטח על חלק. תהי $a \in S$. מצאו מה המרחק בין ראשית הצירים והמישור העל המשיק ל- S בנקודה a .

פתרון

המישור העל המשיק הנדון בשאלה הוא $a + T_a(S)$.

ראשית, אם $\alpha = 0$ אז לכל $t > 0$ מתקיים $f(ta) = t^0 f(a) = 1 \cdot 1 = 1$. לכן תמונת המסילה

$\varphi: [-1, 1] \rightarrow \mathbf{R}^k$ המוגדרת על ידי $t \mapsto (1 + \frac{1}{2}t)a$ מוכלת ב- S , ולפי הגדרה 1.7.7 מתקיים

$\frac{1}{2}a = \dot{\varphi}(0) \in T_a(S)$, וכיוון שלפי טענה 2.7.2 $T_a(S)$ הוא מרחב לינארי גם $-a = -2 \cdot \frac{1}{2}a \in T_a(S)$, ולכן

כלומר ראשית הצירים נמצאת במישור העל המשיק ל- S ולכן המרחק בינה לבינו הוא 0.

נמשיך בהנחה ש- $\alpha \neq 0$. לפי זהות אוילר לכל $a \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ מתקיים $a \cdot \nabla f(a) = \alpha f(a) \neq 0$ (ראו דוגמה 11.3.3) ולכן $\nabla f(a) \neq 0$. אז לפי אבחנה 9.7.2:

$$T_a(S) = \{x \mid \nabla f(a) \cdot x = 0\}$$

נסמן ב- p את המרחק בין ראשית הצירים והמישור העל $a + T_a(S)$. לפי דוגמה 6.7.7 המרחק

הוא אורך הניצב מהראשית למישור העל המשיק, וניצב זה הוא כפולה של $\nabla f(a)$ (שימו לב

שמדובר בניצב למישור העל המשיק $a + T_a(S)$ ולא למשטח על S).

$$\pm p \frac{1}{|\nabla f(a)|} \nabla f(a) \in a + T_a(S) \quad \text{אז:}$$

$$\pm p \frac{1}{|\nabla f(a)|} \nabla f(a) - a \in T_a(S) \quad \text{ולכן:}$$

$$\left(\pm p \frac{1}{|\nabla f(a)|} \nabla f(a) - a \right) \cdot \nabla f(a) = 0$$

$$\pm p \frac{1}{|\nabla f(a)|} \nabla f(a) \cdot \nabla f(a) = a \cdot \nabla f(a)$$

$$\pm p |\nabla f(a)| = a \cdot \nabla f(a) = \alpha f(a) = \alpha$$

(בשורה האחרונה נעשה שימוש בזהות אוילר לפונקציה הומוגנית-חיובית מסדר α).

$$p = \frac{|\alpha|}{|\nabla f(a)|} \quad \text{המרחק } p \text{ הוא מספר אישילי ולכן:}$$

(נוסחה זאת תקפה גם במקרה $\alpha = 0$ אם המכנה אינו 0).

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו שקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 1 היא יריעה חלקה.

מצאו מטריצה שדרגתה מלאה שנמצאת במרחב המשיק ליריעה זאת בנקודה $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ שעליה.

פתרון

בפתרון שאלה 5 מממ"ן 11 הוכח שהקבוצה היא יריעה שממדה 4. אחת הדרכים להוכיח שזאת יריעה חלקה היא להראות ששני הטלאים ששימשו בהוכחה שם הם טלאים חלקים, ואז לפי אבחנה 9.7.7 היריעה היא יריעה חלקה 4-ממדית. אחד הטלאים שם היה הפונקציה:

$$h: (\mathbf{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}) \times \mathbf{R} \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$$

$$(x, y, z, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$$

זאת פונקציה גזירה ברציפות כי כל רכיביה פונקציות פולינומיות ומתקיים (תחת הזיהוי של מרחב המטריצות 2×3 עם $\mathbf{R}^6$):

$$Jh_{(x,y,z,\lambda)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \lambda & 0 & 0 & x \\ 0 & \lambda & 0 & y \\ 0 & 0 & \lambda & z \end{pmatrix}$$

זאת מטריצה שדרגתה 4 כי עמודותיה בלתי-תלויות לינארית (למשל כי המטריצה המשוחלפת $Jh_{(x,y,z,\lambda)}^T$ היא מטריצת מדרגות ללא שורת אפסים). לכן תמונת h היא טלאי חלק 4-ממדי.

הטלאי השני שבפתרון שאלה 5 מממ"ן 11 היה תמונת $\varphi \circ h$ כאשר φ הייתה פונקציה לינארית הפיכה, ולכן המטריצה $J\varphi$ הפיכה, ודרגת המטריצה $J(\varphi \circ h)_{(x,y,z,\lambda)} = J\varphi Jh_{(x,y,z,\lambda)}$ שווה לדרגת $Jh_{(x,y,z,\lambda)}$ שהיא 4, ולכן תמונת $\varphi \circ h$ היא טלאי חלק 4-ממדי.

בפרט עבור $\omega = (1,1,1,1)$ מקבלים $h(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ ותחת הזיהוי עם $\mathbf{R}^6$: $h(\omega) = (1,1,1,1,1,1)$

לפי אבחנה 8.7.7, תחת הזיהוי עם $\mathbf{R}^6$ מתקיים $T_{h(\omega)} = \{vJh_\omega^T \mid v \in \mathbf{R}^4\}$ כלומר

$$T_{h(\omega)} = \left\{ v \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \mid v \in \mathbf{R}^4 \right\} = \left\{ (v_1 \ v_2 \ v_3 \ v_1 + v_4 \ v_2 + v_4 \ v_3 + v_4) \mid v \in \mathbf{R}^4 \right\}$$

$$T_{h(\omega)} = \left\{ \begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 \\ v_1 + v_4 & v_2 + v_4 & v_3 + v_4 \end{pmatrix} \mid v \in \mathbf{R}^4 \right\} : M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$$

ובחזרה תחת הזיהוי עם $M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$

$$= \text{Sp} \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

לפי הגדרה 4.7.4 המרחב המשיק ליריעה זאת בנקודה $h(\omega) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ שעליה הוא המרחב

האפייני $T_{h(\omega)} + h(\omega)$, ונמצאת בו למשל המטריצה

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

שדרגתה 2, ולכן מלאה.

דרך אחרת: ראינו בפתרון שאלה 5 בממ"ן 11 שהקבוצה הנדונה כאן היא :

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}(\mathbf{R}) \setminus \{0_{2 \times 3}\} \mid \begin{cases} x_1 x_5 - x_2 x_4 = 0 \\ x_1 x_6 - x_3 x_4 = 0 \\ x_2 x_6 - x_3 x_5 = 0 \end{cases} \right\}$$

תחת הזיהוי עם $\mathbf{R}^6$ מדובר בקבוצה $S = \{x \in \mathbf{R}^6 \setminus \{0\} \mid F(x) = 0\}$

כאשר: $F: \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^3$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_1 x_5 - x_2 x_4, x_1 x_6 - x_3 x_4, x_2 x_6 - x_3 x_5)$$

אלא שלא קשה לבדוק למשל שדרגת המטריצה $JF_{(1,1,1,1,1,1)}$ היא 2, כלומר דרגתה אינה מלאה.

נגדיר $G: \mathbf{R}^6 \rightarrow \mathbf{R}^2$ דהיינו: $G = ([F]_1, [F]_2)$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) \mapsto (x_1 x_5 - x_2 x_4, x_1 x_6 - x_3 x_4)$$

נסמן גם: $U = (\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}^5$

לפי טענה 2.9.2 זאת קבוצה פתוחה ב- $\mathbf{R}^6$. נראה ש: $U \cap S = \{x \in U \mid G(x) = 0\}$

ברור ש: $U \cap S = \{x \in U \mid F(x) = 0\} \subseteq \{x \in U \mid G(x) = 0\}$

מצד שני אם $x = (x_1, \dots, x_6) \in \{x \in U \mid G(x) = 0\}$ אז $x_1 \neq 0$ וכן:

$$x_1 x_5 = x_2 x_4$$

$$x_1 x_6 = x_3 x_4$$

$$x_1 x_2 x_6 = x_2 (x_1 x_6) = x_2 (x_3 x_4) = x_3 (x_2 x_4) = x_3 (x_1 x_5) = x_1 x_3 x_5$$

לכן

$$x_2 x_6 = x_3 x_5$$

ומכאן

$$F(x) = (x_1x_5 - x_2x_4, x_1x_6 - x_3x_4, x_2x_6 - x_3x_5) = (0, 0, 0) \quad \text{ולכן}$$

$$U \cap S = \{x \in U \mid G(x) = 0\} \quad \text{וקיבלנו } x \in U \cap S \text{ . לכן:}$$

$$JG_{(1,1,1,1,1,1)} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{דרגת המטריצה}$$

הא בבירור 2, כלומר דרגה מלאה ולפי אבחנה 9.1.7 המרחב המשיק ל־ S בנקודה $a = (1, \dots, 1)$

$$T_a(S) + a = \{x \in \mathbf{R}^6 \mid (x - a)JG_a^T = (0, 0)\} = \{x \in \mathbf{R}^6 \mid xJG_a^T = aJG_a^T\} \quad \text{הוא:}$$

$$\begin{aligned} &= \left\{ (x_1, \dots, x_6) \mid \begin{cases} x_1 - x_2 - x_4 + x_5 = 0 \\ x_1 - x_3 - x_4 + x_6 = 0 \end{cases} \right\} \\ &= \{(x_1, \dots, x_6) \mid x_1 - x_4 = x_2 - x_5 = x_3 - x_6\} \end{aligned}$$

ובחזרה, תחת הזיהוי בין $M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$ ו־ $\mathbf{R}^6$:

$$T_a(S) + a = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mid x_1 - x_4 = x_2 - x_5 = x_3 - x_6 \right\}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{ולא קשה למצוא בקבוצה זאת המון מטריצות שדרגתן 2. למשל:}$$

הערה: אפשר גם להראות ש־ S היא יריעה חלקה 4־ממדית באמצעות חלק ב של משפט 11.ג.7,

$$U_i = \{x \in \mathbf{R}^6 \mid x_i \neq 0\} \quad \text{כאשר לנקודה } a \in S \text{ עם } a_i \neq 0 \text{ משתמשים בסביבה מתאימה}$$

ובאחת הפונקציות $([F]_1, [F]_2)$, $([F]_1, [F]_3)$ או $([F]_2, [F]_3)$ (דרגת מטריצת היעקוביאן של לפחות אחת מהן מלאה ב־ a).

שאלה 4 (20 נקודות)

בשאלה זאת תוכיחו את אישוויון הממוצעים כמסקנה ממשפט 11.ה.7 ("כופלי לגרנז").

א. הראו שלפונקציה המכפלה $f: (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 \cdots x_k$ יש ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה

$$\left\{ (x_1, \dots, x_k) \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k = k \right\}$$

ומצאו את כל נקודות הקיצון של f בקבוצה זאת.

ב. הסיקו מסעיף א את אישוויון הממוצעים:

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} \leq \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \quad \text{אם } a_1, \dots, a_k \text{ מספרים אישיליים או מתקיים:}$$

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} < \frac{a_1 + \dots + a_k}{k} \quad \text{ואם לא כל המספרים } a_1, \dots, a_k \text{ שווים זה לזה אז מתקיים גם:}$$

פתרון סעיף א

במקרה $k=1$ הקבוצה היא $\{1\}$ והיא גם נקודות המינימום וגם נקודות המקסימום של f .

אם $k > 1$ הקבוצה $[0, \infty)$ היא קבוצה סגורה (לפי שאלה 6.א.2 והגדרה 10.א.2). לפי טענה 29.א.2

הקבוצה $[0, \infty)^k$ סגורה. לפי מסקנה 29.ד.2 הקבוצה

סגורה ולכן לפי חלק ג של טענה 24.א.2 הקבוצה $K = \left\{ (x_1, \dots, x_k) \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k = k \right\}$

סגורה. היא גם חסומה, כי היא מוכלת בתיבה הסגורה $[0, k]^k$:

אם $(x_1, \dots, x_k) \in K$ אז עבור $i \in \{1, \dots, k\}$ מתקיים: $0 \leq x_i \leq x_1 + \dots + x_k = k$

הפונקציה f פולינומית ולכן רציפה, ולפי משפט וויירשטראס יש לה ערך מזערי וערך מרבי

בקבוצה K . ברור שהפונקציה אישילית והערך המזערי של המכפלה הוא 0 ומתקבל בדיוק

בנקודות שלפחות אחד משיעוריהן 0, כלומר אלה כל נקודות המינימום של f ב- K .

הערך המרבי חיובי (הוא לפחות $f(1, \dots, 1) = 1$) ולכן כל נקודת מקסימום של f ב- K היא גם

נקודת מקסימום של f בקבוצה $\left\{ (x_1, \dots, x_k) \in (0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k = k \right\}$

ולכן היא נקודת מקסימום מקומי של f תחת האילוץ $\varphi = k$ עם: $\varphi: (x_1, \dots, x_k) \mapsto x_1 + \dots + x_k$

לפי משפט 11.ה.7 ("כופלי לגרנז") בנקודת x כזאת הוקטורים $\nabla f(x), \nabla \varphi(x)$ תלויים לינארית.

מתקיים: $\nabla \varphi(x) = (1, \dots, 1)$

$$\nabla f(x) = x_1 \cdots x_k \left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_k} \right)$$

אז יש סקלר λ כך ש- $\left(\frac{1}{x_1}, \dots, \frac{1}{x_k} \right) = \lambda (1, \dots, 1)$ ולכן $\frac{1}{x_1} = \dots = \frac{1}{x_k} = \lambda$ ומכאן: $x_1 = \dots = x_k$

אז $kx_1 = x_1 + \dots + x_k = k$ ולכן $x_1 = \dots = x_k = 1$ ונקודת המקסימום היחידה של f ב- K היא

הנקודה $(1, \dots, 1)$.

פתרון סעיף ב

אם כל ה- a_i שווים זה לזה אז :

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} = \sqrt[k]{a_1^k} = a_1$$

$$\frac{a_1 + \cdots + a_k}{k} = \frac{ka_1}{k} = a_1$$

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} = \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}$$

ולכן מתקיים שוויון :

$$a_1 + \cdots + a_k > 0$$

אחרת יש i ו- j כך ש- $a_i > a_j$ ולכן $a_i > 0$ ומכאן :

$$x_1 + \cdots + x_k = \frac{k(a_1 + \cdots + a_k)}{a_1 + \cdots + a_k} = k$$

$$\text{נסמן } x_i = \frac{ka_i}{a_1 + \cdots + a_k} \text{ אז :}$$

ולכן $(x_1, \dots, x_k)$ בקבוצה מסעיף א. גם $x_i \neq x_j$ ולכן $(x_1, \dots, x_k) \neq (1, \dots, 1)$ ולפי סעיף א :

$$f(x_1, \dots, x_k) < f(1, \dots, 1) = 1$$

$$\frac{k^k a_1 \cdots a_k}{(a_1 + \cdots + a_k)^k} < 1$$

$$\text{מתקיים } f(x_1, \dots, x_k) = \frac{k^k a_1 \cdots a_k}{(a_1 + \cdots + a_k)^k} \text{ ולכן :}$$

$$k^k a_1 \cdots a_k < (a_1 + \cdots + a_k)^k$$

$$a_1 \cdots a_k < \frac{(a_1 + \cdots + a_k)^k}{k^k}$$

$$\sqrt[k]{a_1 \cdots a_k} < \frac{a_1 + \cdots + a_k}{k}$$

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי: $(x, y, z) \mapsto xy^2z^3$
מצאו את כל נקודות הקיצון של f בקבוצה $D = \{(x, y, z) \mid 0 \leq x \leq y, 0 \leq z, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1\}$
ואת הערך המזערי והערך המרבי שלה בקבוצה (אם אלה קיימים).

פתרון

לפי מסקנה 25.ד.2 הקבוצה D היא קבוצה סגורה.

אם $x = (x_1, x_2, x_3) \in D$ אז $x_i \geq 0$ עבור $i = 1, 2, 3$ וגם $x_i^4 \leq x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 \leq 1$ ולכן $x_i \in [0, 1]$.

לכן $D \subseteq [0, 1]^3$ ובפרט D היא קבוצה חסומה. הפונקציה f פולינומית ולכן רציפה ב- D ולפי משפט ויירשטראס (משפט 4.א.6) יש ל- f ערך מזערי וערך מרבי ב- D . נמצא אותם.

ראשית ברור שלכל $(x, y, z) \in D$ מתקיים $f(x, y, z) = xy^2z^3 \geq 0 = f(0, 0, 0)$ ו- $(0, 0, 0) \in D$.

ולכן הערך המזערי של f ב- D הוא 0, והוא מתקבל בכל נקודה שבה $f(x, y, z) = 0$ דהיינו בכל

נקודה ב- D שבה $xy^2z^3 = 0$, ואלה הנקודות ב- D שלפחות אחד משיעוריהן הוא 0, ובדיקה

פשוטה מראה אם כך שקבוצת נקודות המינימום של f ב- D היא:

$$\left(\{0\} \times \{(y, z) \in [0, \infty)^2 \mid y^4 + z^4 \leq 1\}\right) \cup \left(\{(x, y) \mid 0 \leq x \leq y, x^4 + y^4 \leq 1\} \times \{0\}\right)$$

אף אחת מהנקודות האלה אינה נקודת מקסימום של f ב- D , כי הערך המרבי של f ב- D הוא

$$f\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2^6}$$

בכל נקודה פנימית של D מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y, z) = y^2z^3 > 0$ ולכן $\nabla f(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$, ולכן זאת

אינה נקודה קריטית, ולכן גם אינה נקודת קיצון מקומית, ומאחר ש- D היא סביבה של כל נקודה

פנימית שלה, נקודה פנימית שלה אינה נקודת קיצון של f ב- D . לכן כל נקודות המקסימום של

f ב- D הן נקודות שפה של D , וכאמור הן גם נקודות שאף אחד משיעוריהן אינו 0, ולכן הן

נמצאות בקבוצה $(0, \infty)^3 \cap \partial D$. לפי מסקנה 25.ד.2

$$\partial D \subseteq \{(x, y, z) \in D \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\} \cup \{(x, y, z) \in D \mid x = y\}$$

$$\cup \{(x, y, z) \in D \mid x = 0\} \cup \{(x, y, z) \in D \mid z = 0\}$$

ולכן נקודות המקסימום של f ב- D כולן בקבוצה:

$$D \cap (0, \infty)^3 \cap \left(\{(x, y, z) \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1\} \cup \{(x, y, z) \mid x = y\}\right)$$

תוכלו לבדוק שהקבוצה הזאת שווה לאיחוד $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ כאשר :

$$A_1 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x < y, x^4 + y^4 + z^4 = 1 \right\}$$

$$A_2 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x = y, x^4 + y^4 + z^4 < 1 \right\}$$

$$A_3 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x = y, x^4 + y^4 + z^4 = 1 \right\}$$

אם נקודת מקסימום של f בקבוצה D נמצאת בתת-קבוצה A_i , אז היא נקודת מקסימום של f ב- A_i . נבדוק מה יכולות להיות נקודות הקיצון בכל אחת משלוש הקבוצות האלה.

$$A_1 = \left\{ (x, y, z) \in U_1 \mid x^4 + y^4 + z^4 = 1 \right\} \quad \text{את הקבוצה } A_1 \text{ נוכל להציג בצורה}$$

$$U_1 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x < y \right\} \quad \text{עם:}$$

הקבוצה U_1 פתוחה. זה נובע למשל מחלק א של מסקנה 23.ד.2 יחד עם חלק ב של טענה 24.א.2.

לכן נקודת מקסימום של f ב- A_1 היא נקודת קיצון מקומי של f תחת האילוץ $\varphi = 1$ כאשר

$$\varphi(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4. \quad \text{ממשפט 11.ה.7 (כופלי לגרנז') נקבל שאם } a = (x, y, z) \text{ היא נקודת}$$

$$\text{המקסימום הזאת אז הקבוצה } \{ \nabla f(a), \nabla \varphi(a) \} = \left\{ (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2), (4x^3, 4y^3, 4z^3) \right\}$$

$$\begin{pmatrix} y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \\ 4x^3 & 4y^3 & 4z^3 \end{pmatrix} \quad \text{תלויה לינארית. זאת קבוצת השורות של המטריצה}$$

ולכן זאת מטריצה שדרגתה לכל היותר 1, ולכן כל תת-מטריצה 2×2 שלה היא סינגולרית. לכן

$$\det \begin{pmatrix} y^2 z^3 & 2xyz^3 \\ 4x^3 & 4y^3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{למשל מתקיים:}$$

$$4(y^5 z^3 - 2x^4 y z^3) = 0 \Rightarrow y^4 = 2x^4$$

$$\det \begin{pmatrix} y^2 z^3 & 3xy^2 z^2 \\ 4x^3 & 4z^3 \end{pmatrix} = 0 \quad \text{בנוסף מתקיים:}$$

$$4(y^2 z^6 - 3x^4 y^2 z^2) = 0 \Rightarrow z^4 = 3x^4$$

$$1 = \varphi(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + 2x^4 + 3x^4 = 6x^4 \quad \text{אז}$$

$$x^4 = \frac{1}{6}, \quad y^4 = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}, \quad z^4 = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \quad \text{ומכאן}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \quad \text{ולכן:}$$

ונקודה זאת אכן ב- A_1 , כי $x^4 = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} = y^4$ ולכן $x < y$.

$$A_2 = \left\{ (x, y, z) \in U_2 \mid x - y = 0 \right\} \quad \text{נעבור ל-} A_2. \text{ נוכל למשל להציג אותה בצורה}$$

$$U_2 = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x^4 + y^4 + z^4 < 1 \right\} \quad \text{עם:}$$

הקבוצה U_2 פתוחה, למשל לפי חלק א של מסקנה 23.ד.2 יחד עם חלק ב של טענה 24.א.2.

לכן נקודת מקסימום של f ב- A_2 היא נקודת קיצון מקומי של f תחת האילוץ $\psi = 0$ כאשר

$$\psi(x, y, z) = x - y \quad \text{ממשפט 11.ה.7 (כופלי לגרנז') נקבל שאם } a = (x, y, z) \text{ היא נקודת}$$

$$\{\nabla f(a), \nabla \psi(a)\} = \{(y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2), (1, -1, 0)\} \quad \text{המקסימום הזאת אז הקבוצה}$$

$$\begin{pmatrix} y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{תלויה לינארית. זאת קבוצת השורות של המטריצה}$$

ולכן זאת מטריצה שדרגתה לכל היותר 1, ולכן כל תת-מטריצה 2×2 שלה היא סינגולרית. בפרט

$$0 = \det \begin{pmatrix} y^2 z^3 & 3xy^2 z^2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = -3xy^2 z^2 \quad \text{למשל}$$

ולכן $x=0$ או $y=0$ או $z=0$ בסתירה לכך ש- $(x, y, z) \in A_2$ ואין ל- f נקודת מקסימום ב- A_2 .

נבדוק את האפשרות שיש נקודת מקסימום של f ב- A_3 . כזכור:

$$\begin{aligned} A_3 &= \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x = y, x^4 + y^4 + z^4 = 1\} \\ &= \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid \varphi(x, y, z) = 1, \psi(x, y, z) = 0\} \end{aligned}$$

הקבוצה $(0, \infty)^3$ פתוחה ולכן היא סביבה של כל נקודה ב- A_3 ולכן נקודת המקסימום המבוקשת

היא נקודת קיצון מקומי של f תחת זוג האילוצים $\{\varphi = 1, \psi = 0\}$. לפי משפט 11.ה.7, אם

$a = (x, y, z)$ היא נקודת הקיצון הזאת, הקבוצה $\{\nabla f(a), \nabla \varphi(a), \nabla \psi(a)\}$ תלויה לינארית.

$$\nabla f = (y^2 z^3, 2xyz^3, 3xy^2 z^2) = f(x) \left(\frac{1}{x}, \frac{2}{y}, \frac{3}{z} \right) \quad \text{הגרדיאנטים האלה הם:}$$

$$\nabla \varphi = (4x^3, 4y^3, 4z^3) = 4(x^3, y^3, z^3)$$

$$\nabla \psi = (1, -1, 0)$$

$$0 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{2}{y} & \frac{3}{z} \\ x^3 & y^3 & z^3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{התלות הלינארית ביניהם מחייבת:}$$

בנוסף $\psi(x, y, z) = x - y = 0$ ולכן $x = y$ ולכן:

$$\begin{aligned} 0 = \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{2}{x} & \frac{3}{z} \\ x^3 & x^3 & z^3 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} &= \det \begin{pmatrix} \frac{2}{x} & \frac{3}{z} \\ x^3 & z^3 \end{pmatrix} + \det \begin{pmatrix} \frac{1}{x} & \frac{3}{z} \\ x^3 & z^3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{2z^4 - 3x^4}{xz} + \frac{z^4 - 3x^4}{xz} = 3 \frac{z^4 - 2x^4}{xz} \end{aligned}$$

ולכן $z^4 = 2x^4$. כמוכן $1 = \varphi(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 = x^4 + x^4 + 2x^4 = 4x^4$

$$x^4 = y^4 = \frac{1}{4}, \quad z^4 = \frac{1}{2} \quad \text{ולכן}$$

$$x = y = \frac{1}{\sqrt[4]{4}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad z = \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \quad \text{ומכאן}$$

$$(x, y, z) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \quad \text{וקיבלנו:}$$

בסך הכל קיבלנו שנקודות מקסימום של f ב- D חייבת להיות אחת מבין שתי הנקודות:

$$\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \quad \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right)$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = 6^{-\frac{1}{4}} \left(3^{-\frac{1}{4}}\right)^2 \left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^3 = 2^{-\frac{1}{4}} 3^{-\frac{1}{4}} 3^{-\frac{2}{4}} 2^{-\frac{3}{4}} = 2^{-1} 3^{-\frac{3}{4}} \quad \text{מתקיים:}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = 2^{-\frac{1}{2}} \left(2^{-\frac{1}{2}}\right)^2 \left(2^{-\frac{1}{4}}\right)^3 = 2^{-\frac{2}{4}} 2^{-\frac{4}{4}} 2^{-\frac{3}{4}} = 2^{-\frac{9}{4}}$$

$$\frac{f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)}{f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right)} = \frac{2^{-1} 3^{-\frac{3}{4}}}{2^{-\frac{9}{4}}} = 2^{\frac{5}{4}} 3^{-\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{\frac{2^5}{3^3}} = \sqrt[4]{\frac{32}{27}} > \sqrt[4]{1} = 1 \quad \text{אז}$$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) > f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) \quad \text{ולכן}$$

ולכן הערך המרבי של f ב- D הוא $2^{-1} 3^{-\frac{3}{4}} = \frac{1}{6} \sqrt[4]{3} \approx 0.21935$ ויש נקודת מקסימום יחידה של f

$$\text{ב-} D \text{ והיא הנקודה } \left(\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{3}}, \frac{1}{\sqrt[4]{2}} \right) \approx (0.63894, 0.75984, 0.8409)$$