

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 1א2024
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 3–6
 משקל המטלה: 2 נקודות
 מספר השאלות: 4
 מועד אחרון להגשה: 4.2.2024

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(x, y, z) = 0$ אם $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ ואחרת $f(x, y, z) = \sin(xyz)$.
 הראו ש- f גזירה בנקודה $(0, 0, 0)$ ואינה גזירה בנקודה $(1, 1, \pi)$.
 ($\mathbb{Q}$ היא קבוצת המספרים הרציונליים. π הוא מספר אי-רציונלי.)
 אתגר (לא להגשה): מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה f רציפה, וכל הנקודות בהן היא גזירה.

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי f הפונקציה החלקית מ- $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ ל- $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ שמתאימה לכל מטריצה הפיכה X את ההופכית שלה X^{-1} , כלומר $f(X) = X^{-1}$. תהי $A \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ הפיכה.
 הוכיחו ש- f גזירה ב- A ו- $Df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$ לכל $H \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$.
 בדרך כדאי להוכיח ולנצל את האישויון $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ שנוון עבור כל זוג מטריצות A ו- B שמכפלתן AB מוגדרת.

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ הומוגנית חיובית ממעלה α . תהי $a \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ ויהי $\lambda > 0$.
 א. עבור $u \in \mathbb{R}^k$ הראו שהנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה a קיימת אם ורק אם הנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה λa קיימת, ומצאו את הקשר בין $\partial_u f(a)$ לבין $\partial_u f(\lambda a)$.
 ב. הראו ש- f גזירה ב- a אם ורק אם f גזירה ב- λa , ומצאו את הקשר בין $\nabla f(a)$ ו- $\nabla f(\lambda a)$.
 ג. הראו ש- f גזירה פעמיים ב- a אם ורק אם f גזירה פעמיים ב- λa , ומצאו את הקשר בין Hf_a ו- $Hf_{\lambda a}$.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי α מספר ממשי ותהי:
 $A = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y + z = \alpha\}$
 הוכיחו כי לפונקציה $f: (x, y, z) \mapsto xy + yz + xz - 2xyz$ יש ערך מזערי ב- A אם ורק אם $\alpha \geq 4.5$.
 (עצה: כדאי לחשוב גם על ערכי f ב- ∂A .)

שאלת רשות (0 נקודות)

שימו לב: שאלה זאת היא על פרק 4, שהוגדר השנה חומר רשות במסגרת ההקלות עקב מלחמת חרבות ברזל.

תהי $f: \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbf{R}^3$. נניח שלכל $(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ מתקיים

השוויון $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)$. נגדיר פונקציה:

$$g: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x, y) \mapsto \int_0^y f(x, y-z, z) dz$$

הוכיחו שלכל $(x, y) \in \mathbf{R}^2$ מתקיים:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + f(x, 0, y)$$

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2021\2022\270. f גזירה ב- $(0,0,0)$ כי:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - (0,0,0) \cdot (x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \right| &\leq \frac{|\sin(xyz)|}{\|(x,y,z)\|} \\ &\leq \frac{|xyz|}{\|(x,y,z)\|} \leq |xy| \xrightarrow{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} 0 \end{aligned}$$

ב- $a = (1,1,\pi)$ אפשר למשל להסתכל בנגזרת הכיוונית בכיוון $u = (0,0,1)$.

הפרוסה בכיוון זה היא:

$$f|_{a,u}(t) = f(1,1,\pi+t) = \begin{cases} 0, & \pi+t \in \mathbb{Q} \\ -\sin t, & \pi+t \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

אם מניחים בשלילה גזירות ב- a אז קיים

$$\partial_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1,1,t) - f(1,1,\pi)}{t}$$

אבל רואים שהגבול הזה דרך קבוצה אחת הוא 0 ודרך קבוצה אחרת הוא -1 .

הנקודות בהן f רציפה הן אלה בהן $\sin(xyz) = 0$ כלומר $xyz = \pi n$ עם n שלם.

הנקודות בהן f גזירה הן אלה מתוכן בהן גם הגרדיאנט של $\sin(xyz)$, שהוא הוקטור

$$\cos(xyz)(yz, xz, xy) = \pm(yz, xz, xy)$$

ואלה בדיוק כל הנקודות שעל הצירים.

לשאלה 2: 2022\2023\284. הפונקציה

$$T: M_{k \times k}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbb{R})$$

$$H \mapsto -A^{-1}HA$$

היא לינארית. מה שנטען בשאלה נובע מ-

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(A+H) - f(A) - T(A)H}{\|H\|} \right| &= \frac{\|(A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1}\|}{\|H\|} \\ &= \frac{\|(A+H)^{-1} \cdot [I - (A+H)A^{-1} + (A+H)A^{-1}HA^{-1}]\|}{\|H\|} \\ &= \frac{\|(A+H)^{-1} \cdot [I - I - HA^{-1} + HA^{-1} + HA^{-1}HA^{-1}]\|}{\|H\|} \\ &= \frac{\|(A+H)^{-1} \cdot [HA^{-1}HA^{-1}]\|}{\|H\|} \\ &\leq \frac{\|(A+H)^{-1}\| \cdot \|H\| \cdot \|A^{-1}HA^{-1}\|}{\|H\|} \\ &= \|(A+H)^{-1}\| \cdot \|A^{-1}HA^{-1}\| \xrightarrow{H \rightarrow 0} \|A^{-1}\| \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

כאשר להצדקת האישוויון יש להראות ש- $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ למטריצות ריבועיות.

לשאלה 3: סעיף ב הוא 2021\2022\252. הסעיפים האחרים די אנלוגיים. פתרון סעיף ב:

ברור שדי להוכיח כיוון אחד, ונחנף הקשר בין הגרדיאנטים להוכחה הזאת:

$$\begin{aligned} \frac{f(\lambda a + h) - f(\lambda a) - \lambda^{\alpha-1} \nabla f(a) \cdot h}{|h|} &= \frac{\lambda^\alpha f(a + \lambda^{-1}h) - \lambda^\alpha f(a) - \lambda^{\alpha-1} \nabla f(a) \cdot h}{\lambda |\lambda^{-1}h|} \\ &= \lambda^{\alpha-1} \cdot \frac{f(a + \lambda^{-1}h) - f(a) - \nabla f(a) \cdot \lambda^{-1}h}{|\lambda^{-1}h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0 \end{aligned}$$

ובפרט $\nabla f(\lambda a) = \lambda^{\alpha-1} \nabla f(a)$.

בסעיף א מתקיים כמובן $\partial_u f(\lambda a) = \lambda^{\alpha-1} \partial_u f(a)$ ובסעיף ג $Hf_{\lambda a} = \lambda^{\alpha-2} Hf_a$.
הוכחת סעיף א מסתמכת על כך ש-

$$f|_{\lambda a, u}(t) = f(\lambda a + tu) = \lambda^\alpha f(a + \lambda^{-1}tu) = \lambda^\alpha f|_{a, u}(\lambda^{-1}t)$$

ומכאן בעזרת כלל השרשת מאינפי 1:

$$\partial_u f(\lambda a) = \frac{df|_{\lambda a, u}}{dt}(0) = \lambda^\alpha \frac{df|_{a, u}}{dt}(0) \cdot \lambda^{-1} = \lambda^{\alpha-1} \partial_u f(a)$$

בסעיף ג ההנחה ש- f גזירה פעמיים ב- a כוללת את ההנחה שיש סביבה U של a שבה כל הנגזרות החלקיות של f קיימות, והן גזירות ב- a . מסעיף א אנחנו מקבלים שבסביבה λU של λa קיימות הנגזרות החלקיות של f ומתקיים

$$\partial_{e_i} f(\lambda x) = \lambda^{\alpha-1} \partial_{e_i} f(x) \quad \text{לכל } x \text{ ב-} U \text{ (ואז } \nabla f(\lambda x) = \lambda^{\alpha-1} \nabla f(x) \text{ לכל } x \text{ ב-} U).$$

מסעיף ב (או ליתר דיוק מדרך הוכחתו) מקבלים שהפונקציה $\partial_{e_i} f$ גזירה בנקודה λa

$$\text{ומתקיים } \nabla(\partial_{e_i} f)(\lambda a) = \lambda^{\alpha-2} \nabla(\partial_{e_i} f)(a). \text{ הביטוי } \nabla(\partial_{e_i} f)(a) \text{ הוא השורה ה-} i$$

של מטריצת ההסיאן $Hf_a = J(\nabla f)_a$ ולכן השוויון האחרון מראה שהשורה ה- i של $Hf_{\lambda a}$ שווה לשורה ה- i של $\lambda^{\alpha-2} Hf_a$ ולכן $Hf_{\lambda a} = \lambda^{\alpha-2} Hf_a$ (וכן את הגזירות פעמיים של f ב- λa).

שאלה 4: $5 \setminus 12 \setminus 2021 = 3 \setminus 85 \setminus 2020 = 3 \setminus 82 \setminus 2015$. אפשר עם כופלי לגרנז', אבל אפשר גם בלי.

על שולי המשולש הפונקציה אישילית ומתאפסת, ולכן יש מינימום בקבוצה אם ורק אם הערך של הפונקציה איחיובי בנקודת קיצון מקומי.

מכופלי לגרנז' מקבלים את הנקודות $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \alpha - 1)$ ותמורות שלה ו- $(\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha)$.

שאלה 5: $1 \setminus 12 \setminus 2021 = 1 \setminus 12 \setminus 2020$ (עקרון דוהמל למשוואת החום).