

מתווה לפתרון ממ"ן 12

סמסטר : 12024

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 3–6

שאלה 1 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ כך ש- $f(x, y, z) = 0$ אם $(x, y, z) \in \mathbb{Q}^3$ ואחרת $f(x, y, z) = \sin(xyz)$.

הראו ש- f גזירה בנקודה $(0, 0, 0)$ ואינה גזירה בנקודה $(1, 1, \pi)$.

($\mathbb{Q}$ היא קבוצת המספרים הרציונליים. π הוא מספר אירציונלי.)

אתגר (לא להגשה): מצאו את כל הנקודות בהן הפונקציה f רציפה, וכל הנקודות בהן היא גזירה.

פתרון

ראשית נשים לב ש- $f(x, y, z) = \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3}(x, y, z) \sin(xyz)$ לכל $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$.

נסמן גם $g: (x, y, z) \mapsto \sin(xyz)$, וכדי לקצר בסימונים נסמן $\chi = \chi_{\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3}$.

אז $f(x) = \chi(x)g(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. (שימו לב שהאות x לעתים משמשת כנקודה במרחב,

דהיינו $x \in \mathbb{R}^3$, ולעתים כמספר ממשי: אחד משיעורי הנקודה (x, y, z) .)

מאחר ש- g היא פונקציה יסודית המוגדרת ב- $\mathbb{R}^3$ היא רציפה ב- $\mathbb{R}^3$.

הפונקציה χ היא פונקציה חסומה כי תמונתה היא הקבוצה הסופית $\{0, 1\}$.

אם בנקודה $a \in \mathbb{R}^3$ מתקיים $g(a) = 0$ אז גם $f(a) = \chi(a)g(a) = 0$.

כמוכן $g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} g(a) = 0$ ובעזרת מסקנה 11.1.2 $f(x) = \chi(x)g(x) \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 = f(a)$

ולכן גם f רציפה בנקודה a .

לעומת זאת, אם בנקודה $a \in \mathbb{R}^3$ מתקיים $g(a) \neq 0$ אז f אינה רציפה בנקודה a : אם נניח

בשלילה שהיא רציפה בנקודה a אז גם $\chi = f/g$ רציפה ב- a , אבל לפי שאלה 4.1.2 a אינה

נקודת שפה של $\mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Q}^3$, ולפי אבחנה 3.א.2 אינה נקודת שפה של $\mathbb{Q}^3$. זה לא יתכן, כי כל נקודה

ב- $\mathbb{R}^3$ היא נקודת שפה של $\mathbb{Q}^3$: אם U היא סביבה של $a = (a_1, a_2, a_3)$ משימוש פעמיים בשאלה

3.א.2 נובע שיש סביבות U_i של a_i כך ש- $U_1 \times U_2 \times U_3 \subseteq U$. ב- U_i יש מספר רציונלי q_i ומספר

אירציונלי p_i . אז $(q_1, q_2, q_3) \in U \cap \mathbb{Q}^3$ ו- $(p_1, p_2, p_3) \in U \setminus \mathbb{Q}^3$, כלומר בכל סביבה U של a יש

נקודות מ- $\mathbb{Q}^3$ ונקודות שאינן ב- $\mathbb{Q}^3$ ולכן a היא נקודת שפה של $\mathbb{Q}^3$.

קיבלנו שהנקודות (x, y, z) שבהן הפונקציה f רציפה הן בדיוק הנקודות בהן $g(x, y, z) = 0$,

דהיינו $\sin(xyz) = 0$, כלומר אלה שעבורן יש מספר שלם m עבורו $xyz = \pi m$.

בפרט $0 \cdot 0 \cdot 0 = \pi \cdot 0$ ו- $1 \cdot 1 \cdot \pi = \pi \cdot 1$ ולכן f רציפה בנקודות $(0, 0, 0)$ ו- $(1, 1, \pi)$.

כדי להוכיח ש- f גזירה ב- $(0,0,0)$ נשים לב שלכל (x,y,z) שאינו $(0,0,0)$ מתקיים:

$$\begin{aligned} \left| \frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - (0,0,0) \cdot (x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \right| &= \left| \frac{\chi_{\mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{Q}^3}(x,y,z) \sin(xyz)}{\|(x,y,z)\|} \right| \\ &\leq \frac{|\sin(xyz)|}{\|(x,y,z)\|} \leq \frac{|xyz|}{\|(x,y,z)\|} \leq |xy| \end{aligned}$$

וכן $|xy| \xrightarrow{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} 0$ ולכן בעזרת כלל הכריך נקבל

$$\frac{f(x,y,z) - f(0,0,0) - (0,0,0) \cdot (x,y,z)}{\|(x,y,z)\|} \xrightarrow{(x,y,z) \rightarrow (0,0,0)} 0$$

דהיינו, לפי הגדרה 2.א.3, f גזירה ב- $(0,0,0)$ ו- $\nabla f(0,0,0) = (0,0,0)$.

כדי להראות ש- f אינה גזירה בנקודה $a = (1,1,\pi)$ נניח בשלילה שהיא גזירה שם ונראה שהנחה זאת מובילה לסתירה. לפי משפט 9.ב.3 קיימת הנגזרת הכיוונית $\partial_u f(a)$ למשל עם $u = (0,0,1)$.

$$\partial_u f(a) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(a+tu) - f(a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(1,1,\pi+t)}{t} \quad \text{לפי אבחנה 2.ב.3:}$$

נשים לה שמאחר ש- $1 \in \mathbf{Q}$ מתקיים:

$$f(1,1,\pi+t) = \chi_{\mathbf{R}^3 \setminus \mathbf{Q}^3}(1,1,\pi+t) g(1,1,\pi+t) = \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(\pi+t) \sin(\pi+t) = -\chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(\pi+t) \sin t$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(\pi+t) \frac{\sin t}{t} \quad \text{הגבול דלעיל קיים, ולכן קיים הגבול:}$$

$$L = \lim_{t \rightarrow 0} \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(\pi+t) = \frac{\lim_{t \rightarrow 0} \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(\pi+t) \frac{\sin t}{t}}{\lim_{t \rightarrow 0} \frac{\sin t}{t}} \quad \text{לכן קיים גם הגבול:}$$

אבל גבול זה אינו קיים, למשל כי אם $(q_n)_{n=1}^\infty$ סדרת מספרים רציונליים ששואפת ל- π אז

$$\chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(\pi + (q_n - \pi)) = \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(q_n) = 0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{ולכן } q_n - \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ומכאן $L = 0$, ומצד שני אם $(p_n)_{n=1}^\infty$ סדרת מספרים אירציונליים ששואפת ל- π אז

$$\chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(\pi + (p_n - \pi)) = \chi_{\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}}(p_n) = 1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{ולכן } p_n - \pi \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ומכאן $L = 1$.

לבסוף אוסיף ללא הוכחה: הנקודות בהן f גזירה הן אלה שבהן היא רציפה, שראינו שהן אלה

שבהן $g(x,y,z) = 0$, דהיינו $\sin(xyz) = 0$, ושבנוסף מתקיים בהן גם שמתאפס הגרדיאנט

$$\nabla g(x,y,z) = \cos(xyz)(yz, xz, xy) = \pm(yz, xz, xy) \quad \text{ואלה כל הנקודות שעל שלושת הצירים.}$$

שאלה 2 (25 נקודות)

תהי f הפונקציה החלקית מ- $M_{k \times k}(\mathbf{R})$ ל- $M_{k \times k}(\mathbf{R})$ שמתאימה לכל מטריצה הפיכה X את ההופכית שלה X^{-1} , כלומר $f(X) = X^{-1}$. תהי $A \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$ הפיכה. הוכיחו ש- f גזירה ב- A וש- $Df_A(H) = -A^{-1}HA^{-1}$ לכל $H \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$. בדרך כדאי להוכיח ולנצל את האישוויון $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ שנכון עבור כל זוג מטריצות A ו- B שמכפלתן AB מוגדרת.

פתרון

הפונקציה
 $Df_A : M_{k \times k}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbf{R})$
 $H \mapsto -A^{-1}HA$

היא לינארית, ולפי הגדרה 1.1.3 מה שעלינו להוכיח הוא

$$\frac{f(A+H) - f(A) - Df_A(H)}{|H|} \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0$$

$$\frac{1}{|H|} \left((A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} \right) \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0 \quad \text{דהיינו יש להוכיח כי}$$

$$\left| \frac{1}{|H|} \left((A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} \right) \right| \xrightarrow{H \rightarrow 0} 0 \quad \text{ולפי אבחנה 9.2.2 די להראות:}$$

נשתמש גם במסקנה 4.1.2 של כלל הכריך, ורציפות פונקציית הכפל של מטריצות (שהיא פונקציה

יסודית ואף פולינומית) ובאישוויון $|AB| \leq |A| \cdot |B|$ (אותו נוכיח בהמשך):

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{|H|} \left((A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} \right) \right| &= \frac{1}{|H|} \cdot \left| (A+H)^{-1} - A^{-1} + A^{-1}HA^{-1} \right| \\ &= \frac{1}{|H|} \cdot \left| (A+H)^{-1} (I - (A+H)A^{-1} + (A+H)A^{-1}HA^{-1}) \right| \\ &= \frac{1}{|H|} \cdot \left| (A+H)^{-1} (I - I - HA^{-1} + HA^{-1} + HA^{-1}HA^{-1}) \right| \\ &= \frac{1}{|H|} \cdot \left| (A+H)^{-1} HA^{-1}HA^{-1} \right| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} \frac{1}{|H|} \cdot \left| (A+H)^{-1} \right| \cdot |H| \cdot |A^{-1}| \cdot |H| \cdot |A^{-1}| \\ &= |H| \cdot \left| (A+H)^{-1} \right| \cdot |A^{-1}| \cdot |A^{-1}| \xrightarrow{H \rightarrow 0} |0| \cdot \left| (A+0)^{-1} \right| \cdot |A^{-1}| \cdot |A^{-1}| = 0 \end{aligned}$$

בדרך (במקום המסומן ב- $(*)$) השתמשנו באישוויון $|AB| \leq |A| \cdot |B|$, כאשר A ו- B הן שתי מטריצות

ו- AB היא מכפלתן. אישוויון זה אינו מוכח בספר ולכן נוכיח אותו כאן:

נניח ש- $A \in M_{k \times m}(\mathbf{R})$ ו- $B \in M_{m \times n}(\mathbf{R})$. אז מוגדרת המכפלה $AB \in M_{k \times n}(\mathbf{R})$. נסמן ב- a_i את השורה ה- i של המטריצה A וב- b_j^T את העמודה ה- j של המטריצה B . אז a_i ו- b_j הם וקטורי שורה ב- $\mathbf{R}^m$. לפי הגדרת כפל מטריצות הרכיב ה- (i, j) של המכפלה AB הוא:

$$[AB]_{i,j} = \sum_{l=1}^m [A]_{i,l} [B]_{l,j} = a_i \cdot b_j$$

לפי אישוויון קושי-שוורץ $|a_i \cdot b_j| \leq |a_i| \cdot |b_j|$.

$$|AB|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n [AB]_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n (a_i \cdot b_j)^2 \leq \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^n |a_i|^2 \cdot |b_j|^2 = \sum_{i=1}^k |a_i|^2 \cdot \sum_{j=1}^n |b_j|^2 \quad \text{אז:}$$

$$\sum_{i=1}^k |a_i|^2 = \sum_{i=1}^k \sum_{l=1}^m [A]_{i,l}^2 = |A|^2 \quad \text{כעת}$$

$$\sum_{j=1}^n |b_j|^2 = \sum_{j=1}^n \sum_{l=1}^m [B]_{l,j}^2 = |B|^2 \quad \text{ובדומה}$$

$$\text{ולכן } |AB|^2 \leq |A|^2 \cdot |B|^2 \text{ ומכאן } |AB| \leq |A| \cdot |B|.$$

$$|A_1 A_2 \cdots A_n| \leq |A_1| |A_2| \cdots |A_n| \quad \text{שימו לב גם שמהאישוויון } |AB| \leq |A| \cdot |B| \text{ נובע מידית האישוויון}$$

כל עוד המכפלה $A_1 A_2 \cdots A_n$ מוגדרת (ההוכחה באינדוקציה).

שאלה 3 (25 נקודות)

תהי $f: \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbf{R}$ הומוגנית-חיובית ממעלה α . תהי $a \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ ויהי $\lambda > 0$.

- א. עבור $u \in \mathbf{R}^k$ הראו שהנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה a קיימת אם ורק אם הנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה λa קיימת, ומצאו את הקשר בין $\partial_u f(a)$ לבין $\partial_u f(\lambda a)$.
- ב. הראו ש- f גזירה ב- a אם ורק אם f גזירה ב- λa , ומצאו את הקשר בין $\nabla f(a)$ ו- $\nabla f(\lambda a)$.
- ג. הראו ש- f גזירה פעמיים ב- a אם ורק אם f גזירה פעמיים ב- λa , ומצאו את הקשר בין Hf_a ו- $Hf_{\lambda a}$.

פתרון סעיף א

נשתמש בגבול מאבחנה 2.ב.3:

$$\begin{aligned}\partial_u f(\lambda a) &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\lambda a + tu) - f(\lambda a)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f\left(\lambda\left(a + \frac{t}{\lambda}u\right)\right) - f(\lambda a)}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\lambda^\alpha f\left(a + \frac{t}{\lambda}u\right) - \lambda^\alpha f(a)}{t} = \lim_{\substack{t=\lambda s \\ s \rightarrow 0}} \frac{\lambda^\alpha f(a + su) - \lambda^\alpha f(a)}{\lambda s} \\ &= \lambda^{\alpha-1} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{f(a + su) - f(a)}{s} = \lambda^{\alpha-1} \partial_u f(a)\end{aligned}$$

זה מראה שלכל $a \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ ו- $\lambda > 0$ אם הנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה a קיימת

אז גם הנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה λa קיימת, ו- $\partial_u f(\lambda a) = \lambda^{\alpha-1} \partial_u f(a)$.

אם קיימת הנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה λa אז אותו שיקול עם הנקודה λa במקום

a והמספר החיובי λ^{-1} במקום λ מראה שקיימת הנגזרת הכיוונית בכיוון u של f בנקודה

$a = \lambda^{-1} \lambda a$. הקשר $\partial_u f(\lambda a) = \lambda^{\alpha-1} \partial_u f(a)$ פירושו שהפונקציה $\partial_u f$ היא פונקציה הומוגנית-

חיובית ממעלה $\alpha-1$ (זאת אם היא מוגדרת בכל נקודה ב- $\mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$).

פתרון סעיף ב

אם f גזירה ב- a אז מהגדרה 2.א.3:

$$\frac{f(a+h) - f(a) - \nabla f(a) \cdot h}{|h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0$$

לכן:

$$\begin{aligned}\frac{f(\lambda a + h) - f(\lambda a) - \lambda^{\alpha-1} \nabla f(a) \cdot h}{|h|} &= \frac{\lambda^\alpha f\left(a + \lambda^{-1}h\right) - \lambda^\alpha f(a) - \lambda^{\alpha-1} \nabla f(a) \cdot h}{\lambda |\lambda^{-1}h|} \\ &= \lambda^{\alpha-1} \cdot \frac{f\left(a + \lambda^{-1}h\right) - f(a) - \nabla f(a) \cdot \lambda^{-1}h}{|\lambda^{-1}h|} \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

ולכן, שוב מהגדרה 2.א.3, f גזירה ב- λa ו- $\nabla f(\lambda a) = \lambda^{\alpha-1} \nabla f(a)$.

טענה זאת נכונה לכל נקודה $a \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ שבה f גזירה, ולכל מספר חיובי λ , ואם ניקח במקום a את הנקודה λa ובמקום λ את המספר החיובי λ^{-1} נקבל שאם f גזירה בנקודה λa אז היא גזירה גם בנקודה $a = \lambda^{-1} \lambda a$. אם f גזירה בכל נקודה ב- $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ הקשר $\nabla f(\lambda a) = \lambda^{\alpha-1} \nabla f(a)$ פירושו שכל רכיבי הגרדיאנט ∇f הם פונקציות הומוגניות חיוביות ממעלה $\alpha - 1$.

פתרון סעיף ג

לפי הגדרה 2.ב.5 ההנחה ש- f גזירה פעמיים ב- a פירושה שיש סביבה U של a שבה כל הנגזרות החלקיות של f קיימות, והן גזירות ב- a . לפי הגדרה 3 ג.1 הנגזרת החלקית $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ היא הנגזרת הכיוונית $\partial_{e_i} f$, ולכן לפי סעיף א' אנו מקבלים שבסביבה λU של λa קיימות הנגזרות החלקיות של f ומתקיים $\partial_{e_i} f(\lambda x) = \lambda^{\alpha-1} \partial_{e_i} f(x)$ לכל x ב- U , כלומר $\frac{\partial f}{\partial x_i}(\lambda x) = \lambda^{\alpha-1} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$. כעת מסעיף ב' (או ליתר דיוק מדרך הוכחתו, שלא ניצלה במלואה את ההגדרה של "פונקציה הומוגנית חיובית"), אלא רק את הזהות $f(\lambda x) = \lambda^\alpha f(x)$ עבור x בסביבה של a מקבלים שהפונקציה $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ גזירה בנקודה λa ומתקיים $\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(\lambda a) = \lambda^{\alpha-2} \nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a)$. בפרט f גזירה פעמיים בנקודה λa . הביטוי $\nabla \left(\frac{\partial f}{\partial x_i} \right)(a) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_i}(a), \dots, \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_i}(a) \right)$ הוא השורה ה- i של מטריצת ההסיאן $Hf_a = J(\nabla f)_a$ ולכן השוויון האחרון מראה שהשורה ה- i של $Hf_{\lambda a}$ שווה לשורה ה- i של Hf_a ולכן $Hf_{\lambda a} = \lambda^{\alpha-2} Hf_a$. כמו בסעיפים הקודמים, נקבל גם שאם f גזירה פעמיים ב- λa , אז אותו שיקול עם λa במקום a והמספר החיובי λ^{-1} במקום λ מראה ש- f גזירה פעמיים בנקודה $a = \lambda^{-1} \lambda a$. בפרט קיבלנו שאם f גזירה פעמיים בכל נקודה ב- $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ אז כל רכיבי ההסיאן Hf , דהיינו כל הנגזרות החלקיות מסדר שני של f , הם פונקציות הומוגניות ממעלה $\alpha - 2$.

שאלה 4 (25 נקודות)

יהי α מספר ממשי ותהי:

$$A = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y + z = \alpha \right\}$$

הוכיחו כי לפונקציה $f: (x, y, z) \mapsto xy + yz + xz - 2xyz$ יש ערך מזערי ב־ A אם ורק אם $\alpha \geq 4.5$.
(עצה: כדאי לחשוב גם על ערכי f ב־ ∂A .)

פתרון

ראשית נשים לב שם $\alpha \leq 0$ אז $A = \emptyset$ ולכן בודאי שאין ל־ f ערך מזערי ב־ A כאשר $\alpha \leq 0$.
בהמשך נניח $\alpha > 0$ ונסמן:

$$K = \left\{ (x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x + y + z = \alpha \right\}$$

זאת קבוצה סגורה בתור חיתוך של המישור $\{(x, y, z) \mid x + y + z = \alpha\}$, שהוא קבוצה סגורה, עם

הקבוצה הסגורה $[0, \infty)^3$. היא גם קבוצה חסומה כי אם $(x, y, z) \in K$ אז $0 \leq x = \alpha - y - z \leq \alpha$

ובדומה $0 \leq y \leq \alpha$ וגם $0 \leq z \leq \alpha$ ולכן $K \subseteq [0, \alpha]^3$, והתיבה הסגורה $[0, \alpha]^3$ היא חסומה.

הפונקציה f פולינומית ולכן רציפה בכל המרחב. בפרט היא רציפה ב־ K ולכן לפי משפט

ויירשטראס (4.א.6) יש לה ערך מזערי ב־ K . תהי $p \in K$ נקודת מינימום של f ב־ K .

אז $f(p) \leq f(\alpha, 0, 0) = 0$.

אם $(x, y, z) \in K \setminus A$ אז $x = 0$ או $y = 0$ או $z = 0$ ולכן $xyz = 0$ ו־ $f(x, y, z) = xy + yz + xz \geq 0$.

אם יש $a \in A$ כך ש־ $f(a) \leq 0$ אז הערך המזערי של f ב־ K הוא גם ערך מזערי של f ב־ A :

לכל $x \in A$ מתקיים גם $x \in K$ ולכן $f(x) \leq f(p)$. לכן אם $p \in A$ אז p נקודת מינימום של f

ב־ A , ו־ $f(p)$ הערך המזערי של f ב־ A . אחרת $p \in K \setminus A$ ולכן $0 \leq f(p) \leq f(a) \leq 0$ כלומר

$f(p) = f(a) = 0$ ולכן 0 הערך המזערי של f ב־ A ו־ a היא נקודת מינימום של f ב־ A .

בפרט מתקיים $f(p) \leq f(a) \leq 0$ ולכן אם $f(p) < 0$ אז $p \in K \setminus A$ כלומר $p \in A$ ולכן p נקודת

מינימום של f ב־ A .

גם ההפך נכון: אם יש ערך מזערי של f ב־ A אז יש $a \in A$ כך ש־ $f(a) \leq 0$: תהי a נקודת

מינימום של f ב־ A . אם $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}\alpha$ אז $(\varepsilon, \varepsilon, \alpha - 2\varepsilon) \in A$ ומתקיים:

$$\begin{aligned} f(a) &\leq f(\varepsilon, \varepsilon, \alpha - 2\varepsilon) = \varepsilon^2 + \varepsilon(\alpha - 2\varepsilon) + \varepsilon(\alpha - 2\varepsilon) - 2\varepsilon^2(\alpha - 2\varepsilon) \\ &= \varepsilon^2 + 2(\varepsilon - \varepsilon^2)(\alpha - 2\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} 0 + 2 \cdot 0 \cdot (\alpha - 0) = 0 \end{aligned}$$

לכן $f(a) \leq 0$.

סיכום ביניים: אנו יודעים שיש ערך מזערי של f ב־ A אם ורק אם יש $a \in A$ עבורו $f(a) \leq 0$.

אנו גם יודעים שאם זה כך אז האישוויון $f(a) \leq 0$ נכון גם עבור a שהיא נקודת מינימום של f

ב־ A . ננסה אם כן לאתר את הנקודה הזאת:

$$A = \left\{ (x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x + y + z = \alpha \right\} = \left\{ (x, y, \alpha - x - y) \mid (x, y) \in (0, \infty)^2, x + y < \alpha \right\}$$

$$U = \{(x, y) \in (0, \infty)^2 \mid x + y < \alpha\} \quad \text{נסמן:}$$

אז U היא קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^2$ (לפי חלק א של מסקנה 23.ד.2, חלק ג של טענה 29.א.2 וחלק ב של טענה 24.א.2). מתקיים

$$A = \{(x, y, \alpha - x - y) \mid (x, y) \in U\}$$

$$f(A) = \{f(x, y, \alpha - x - y) \mid (x, y) \in U\} \quad \text{ולכן}$$

נגדיר $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי:

$$(x, y) \mapsto f(x, y, \alpha - x - y) = xy + (x + y)(\alpha - x - y) - 2xy(\alpha - x - y)$$

$$f(A) = \{g(x, y) \mid (x, y) \in U\} = g(U) \quad \text{אז:}$$

לכן ל- f יש ערך מזערי ב- A אם ורק אם ל- g יש ערך מזערי ב- U , וזה אותו ערך.

מאחר ש- U היא קבוצה פתוחה, היא סביבה של כל נקודה בה, ולפי אבחנה 3.ב.6 כל נקודת מינימום של g ב- U היא נקודת מינימום מקומי, ומאחר ש- g פולינומית ולכן גזירה בכל המישור, לפי משפט 10.ב.6 זאת גם נקודה קריטית.

אם ל- f יש ערך מזערי ב- A אז ערך זה אינו חיובי, והוא גם ערך מזערי של g בקבוצה U , שמתקבל בנקודה קריטית של g , ולכן אם ל- f יש ערך מזערי ב- A אז ל- g נקודה קריטית $(x, y) \in U$ שבה $g(x, y) \leq 0$. להפך, אם ל- g נקודה קריטית $(x, y) \in U$ שבה $g(x, y) \leq 0$ אז בפרט מתקיים $a = (x, y, \alpha - x - y) \in A$ ו- $f(a) \leq 0$, וראינו כבר שבמצב זה יש ל- f ערך מזערי בקבוצה A .

קיבלנו ש ל- f יש ערך מזערי ב- A אם ורק אם ל- g נקודה קריטית $(x, y) \in U$ שבה $g(x, y) \leq 0$. לכן נרצה למצוא את הנקודות הקריטיות של g , לבדוק אלו מהן נמצאות ב- U , לחשב את ערכי בנקודות האלה ולבדוק באילו תנאים לפחות אחד מהערכים אלה אינו חיובי. נחשב:

$$g(x, y) = \alpha x + \alpha y + 2x^2y + 2xy^2 - x^2 - y^2 - 2\alpha xy - xy \quad \text{נפשט קצת:}$$

$$\nabla g(x, y) = (\alpha + 4xy + 2y^2 - 2x - 2\alpha y - y, \alpha + 2x^2 + 4xy - 2y - 2\alpha x - x) \quad \text{נגזור:}$$

$$\alpha + 4xy + 2y^2 - 2x - 2\alpha y - y = 0 \quad \text{אם } (x, y) \text{ נקודה קריטית של } g \text{ אז:}$$

$$\alpha + 2x^2 + 4xy - 2y - 2\alpha x - x = 0$$

$$2y^2 - 2x^2 - x + y - 2\alpha y + 2\alpha x = 0 \quad \text{נחסר את המשוואה השניה מהראשונה:}$$

$$(y - x)(2(y + x) + 1 - 2\alpha) = 0$$

ונקבל ש- $x = y$ או $x + y = \alpha - \frac{1}{2}$. אם $x = y$ אז הצבה במשוואה הראשונה נותנת:

$$\alpha + 4x^2 + 2x^2 - 2x - 2\alpha x - x = 0$$

$$6x^2 - (3 + 2\alpha)x + \alpha = 0$$

$$x = \frac{3 + 2\alpha \pm \sqrt{(3 + 2\alpha)^2 - 24\alpha}}{12} = \frac{3 + 2\alpha \pm \sqrt{9 + 12\alpha + 4\alpha^2 - 24\alpha}}{12}$$

$$= \frac{3 + 2\alpha \pm \sqrt{9 - 12\alpha + 4\alpha^2}}{12} = \frac{3 + 2\alpha \pm \sqrt{(3 - 2\alpha)^2}}{12} = \frac{3 + 2\alpha \pm (3 - 2\alpha)}{12}$$

$$x = y = \frac{3 + 2\alpha + (3 - 2\alpha)}{12} = \frac{6}{12} = \frac{1}{2} \quad \text{לכן}$$

$$x = y = \frac{3 + 2\alpha - (3 - 2\alpha)}{12} = \frac{4\alpha}{12} = \frac{\alpha}{3} \quad \text{או:}$$

אחרת $x + y = \alpha - \frac{1}{2}$ כלומר $y = \alpha - \frac{1}{2} - x$ נציב את זה למשל במשוואה השנייה ונקבל:

$$\alpha + 2x^2 + 4x\left(\alpha - \frac{1}{2} - x\right) - 2\left(\alpha - \frac{1}{2} - x\right) - 2\alpha x - x = 0$$

$$2x^2 - (2\alpha - 1)x + \alpha - 1 = 0$$

$$x = \frac{2\alpha - 1 \pm \sqrt{(2\alpha - 1)^2 - 8(\alpha - 1)}}{4} = \frac{2\alpha - 1 \pm \sqrt{4\alpha^2 - 4\alpha + 1 - 8\alpha + 8}}{4}$$

$$= \frac{2\alpha - 1 \pm \sqrt{4\alpha^2 - 12\alpha + 9}}{4} = \frac{2\alpha - 1 \pm \sqrt{(2\alpha - 3)^2}}{4} = \frac{2\alpha - 1 \pm (2\alpha - 3)}{4}$$

$$x = \frac{2\alpha - 1 + (2\alpha - 3)}{4} = \frac{4\alpha - 4}{4} = \alpha - 1, \quad y = \alpha - x - \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \quad \text{לכן}$$

$$x = \frac{2\alpha - 1 - (2\alpha - 3)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad y = \alpha - x - \frac{1}{2} = \alpha - 1 \quad \text{או:}$$

מצאנו שהנקודות הקריטיות של g הן: $(\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha), (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}), (\frac{1}{2}, \alpha - 1), (\alpha - 1, \frac{1}{2})$

הנקודה $(\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha)$ נמצאת ב- U , ושלוש האחרות נמצאות ב- U אם ורק אם $\alpha > 1$.

הערכים של g בנקודות אלה הם:

$$g\left(\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha\right) = 2\alpha \cdot \frac{1}{3}\alpha + 4\left(\frac{1}{3}\alpha\right)^3 - 2\left(\frac{1}{3}\alpha\right)^2 - 2\alpha\left(\frac{1}{3}\alpha\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\alpha\right)^2 = -\frac{2}{3^3}\alpha^3 - \frac{1}{3}\alpha^2 = \frac{9 - 2\alpha}{27}\alpha^2$$

$$g\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2\alpha \cdot \frac{1}{2} + 4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\alpha \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}$$

$$g\left(\frac{1}{2}, \alpha - 1\right) = \dots = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}$$

$$g\left(\alpha - 1, \frac{1}{2}\right) = \dots = \frac{1}{2}\alpha - \frac{1}{4}$$

שלושת הערכים האחרונים הם חיוביים אם הנקודות הקריטיות המתאימות ב- U שכן ראינו שהן

ב- U רק כאשר $\alpha > 1$. לכן יש נקודה קריטית $(x, y) \in U$ כך ש- $g(x, y) \leq 0$ אם ורק אם נקודה

זאת היא $(\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha)$ ומתקיים $g(\frac{1}{3}\alpha, \frac{1}{3}\alpha) \leq 0$ אם ורק אם $9 - 2\alpha \leq 0$ דהיינו אם ורק אם $\alpha \geq \frac{9}{2}$

כלומר $\alpha \geq 4.5$. יחד עם מה שמצאנו קודם קיבלנו שהתנאי $\alpha \geq 4.5$ שקול לקיום של ערך מזערי

של הפונקציה f בקבוצה A .

שאלת רשות (0 נקודות)

שימו לב: שאלה זאת היא על פרק 4, שהוגדר השנה חומר רשות במסגרת ההקלות עקב מלחמת חרבות ברזל.

תהי $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbb{R}^3$. נניח שלכל $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ מתקיים

$$g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{השוויון} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y, z) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) \quad \text{נגדיר פונקציה:}$$

$$(x, y) \mapsto \int_0^y f(x, y-z, z) dz$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) + f(x, 0, y) \quad \text{הוכיחו שלכל } (x, y) \in \mathbb{R}^2 \text{ מתקיים:}$$

פתרון

$$h(z, t) = f(t, y-z, z) \quad \text{עבור } y \in \mathbb{R} \text{ קבוע נגדיר } h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \text{ על ידי}$$

$$H(t) = \int_0^y h(z, t) dz = \int_0^y f(t, y-z, z) dz = g(t, y) \quad \text{ונגדיר גם } H: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \text{ על ידי:}$$

h גזירה ברציפות ב- $\mathbb{R}^2$ כהרכבה של הפונקציה הגזירה ברציפות f על פונקציה האפיינית

$(z, t) \mapsto (t, y-z, z)$, שגם היא כמובן גזירות ברציפות (ראו טענה 17.3.17). בפרט הנגזרת החלקית

$$\frac{\partial h}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z) \quad \text{רציפה בכל המישור. בבירור לכל } (t, z) \in \mathbb{R}^2 \text{ מתקיים:}$$

$$H'(t) = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(t, y-z, z) dz \quad \text{ממשפט 4.ב.4 נקבל:}$$

ליתר דיוק: עבור $t \in \mathbb{R}$ נבחר קטע $[c, d]$ כך ש- $t \in [c, d]$ אם $0 < y$ נסמן $[a, b] = [0, y]$ ואם

$$y < 0 \text{ נסמן } [a, b] = [y, 0].$$

כעת אם $0 < y$ אז $H(t) = \int_a^b h(z, t) dz$ ונקבל ממשפט 4.ב.4 שמתקיים:

$$H'(t) = \int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz$$

אם $y < 0$ אז $H(t) = \int_b^a h(z, t) dz = -\int_a^b h(z, t) dz$ וממשפט 4.ב.4 נקבל:

$$H'(t) = -\int_a^b \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz = -\int_y^0 \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz$$

$$H'(t) = 0 = \int_0^0 \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz = \int_0^0 \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz \quad \text{אם } y = 0 \text{ אז } H(t) = \int_0^0 h(z, t) dz = 0 \text{ ולכן:}$$

(אפשר גם לקבל את אותה נוסחה ללא הפרדה לשלושה מקרים עלידי שימוש בממשפט 3.ה.4).

בכל אופן: כיוון ש- $H(t) = g(t, y)$ ברור שמתקיים $H'(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, y)$ ולכן:

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, y) = H'(t) = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(t, y - z, z) dz$$

$$\frac{\partial g}{\partial x}(t, y) = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(t, y - z, z) dz \quad \text{הוכחנו עד כה שעבור כל } t \text{ ו- } y \text{ ממשיים מתקיים:}$$

בדרך השתמשנו רק בגזירות ברציפות (פעם אחת) של f ב- $\mathbf{R}^3$ שנובעת מהגזירות פעמיים

שנתונה. מהנתון ש- f גזירה פעמיים ב- $\mathbf{R}^3$ נובע גם שהפונקציה $\frac{\partial f}{\partial x}$ גזירה ברציפות.

נשכח את ההגדרות של h ושל H ונגדיר פונקציות אחרות שניתן להן אותם שמות:

$$h(z, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y - z, z) \quad \text{עבור } y \in \mathbf{R} \text{ קבוע נגדיר } h: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ על ידי}$$

$$H(t) = \int_0^y h(z, t) dz = \int_0^y \frac{\partial f}{\partial x}(t, y - z, z) dz = \frac{\partial g}{\partial x}(t, y) \quad \text{ונגדיר גם } H: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ על ידי:}$$

$$H'(t) = \int_0^y \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz \quad \text{כעת אותו טיעון כמו קודם מראה שלכל } t \text{ מתקיים:}$$

$$H(t) = \frac{\partial g}{\partial x}(t, y) \text{ ומ- } \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, y - z, z) \text{ ברור שמתקיים } h(z, t) = \frac{\partial f}{\partial x}(t, y - z, z)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, y) = \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(t, y - z, z) dz \quad \text{שמתקיים } H'(t) = \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, y) \text{ ולכן לכל } t \text{ ו- } y \text{ מתקיים:}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) = \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y - z, z) dz \quad \text{נציב } x \text{ במקום } t \text{ ונקבל:}$$

עכשיו שוב נשכח את הפונקציות h ו- H שהוגדרו קודם ונשחרר את שמותיהן לשימוש חדש.

$$h(z, t) = f(x, t - z, z) \quad \text{עבור מספר קבוע } x \text{ נגדיר פונקציה } h: \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R} \text{ על ידי}$$

$$H(t) = \int_0^t h(z, t) dz = \int_0^t f(x, t - z, z) dz = g(x, t) \quad \text{ונגדיר גם } H: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R} \text{ על ידי:}$$

מכך ש- f גזירה פעמיים ברציפות ב- $\mathbf{R}^3$ נובע שהיא גזירה ברציפות ב- $\mathbf{R}^3$ וכיוון ש- h היא הרכבה

של f על הפונקציה האפינית $(z, t) \mapsto (x, t - z, z)$ נובע ש- h גזירה ברציפות ב- $\mathbf{R}^2$, ולפי כלל

$$\frac{\partial h}{\partial t}(z, t) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, t - z, z) \quad \text{השרשרת:}$$

$$\text{נסמן גם } \alpha(t) = 0 \text{ ו- } \beta(t) = t \text{ לכל } t \text{ ממשי. אז } \alpha'(t) = 0 \text{ ו- } \beta'(t) = 1.$$

עבור קטע (a, b) שמכיל את 0 ו- $[c, d] = [a, b]$ נקבל ממשפט 3.4 ה.3 שלכל $t \in (a, b)$ מתקיים:

$$H'(t) = h(\beta(t), t) \beta'(t) - h(\alpha(t), t) \alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz$$

כיוון שלכל t ממשי אפשר לבחור קטע (a, b) שמכיל אותו ואת 0 הנוסחה נכונה לכל t ממשי.

השוויון $H(t) = g(x, t)$ נובע $H'(t) = \frac{\partial g}{\partial y}(x, t)$. הצבת כל הערכים בנוסחה לעיל נותנת:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, t) = H'(t) = h(\beta(t), t)\beta'(t) - h(\alpha(t), t)\alpha'(t) + \int_{\alpha(t)}^{\beta(t)} \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz$$

$$= h(t, t) - 0 + \int_0^t \frac{\partial h}{\partial t}(z, t) dz = f(x, t - t, t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, t - z, z) dz$$

$$= f(x, 0, t) + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial y}(x, t - z, z) dz$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x, 0, y) + \int_0^y \frac{\partial f}{\partial y}(x, y - z, z) dz \quad \text{נציב } y \text{ במקום } t \text{ ונקבל:}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x, 0, y) + \int_0^y \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y - z, z) dz \quad \text{לבסוף נשתמש בנתון } \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \text{ ונקבל}$$

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x, y) = f(x, 0, y) + \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x, y) \quad \text{וממה שהוכח קודם נקבל:}$$