

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר: 1א2024
חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–2
משקל המטלה: 2 נקודות
מספר השאלות: 5
מועד אחרון להגשה: 31.12.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה A ו- B קבוצות ב- $\mathbb{R}^k$. תהי C איחוד כל הקטעים הסגורים שקצה אחד שלהם ב- A והקצה השני ב- B , דהיינו $C = \{ta + (1-t)b \mid a \in A, b \in B, 0 \leq t \leq 1\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A ו- B קבוצות קמורות אז C קבוצה קמורה.

ב. אם A ו- B קבוצות פתוחות אז C קבוצה פתוחה.

ג. אם A ו- B קבוצות סגורות אז C קבוצה סגורה.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. נתון ש- B כדור שמכיל את A ושאינו כדור אחר שמכיל את A ומוכל ב- B .

א. הוכיחו שאם A היא קבוצה פתוחה אז B הוא כדור פתוח.

ב. הוכיחו שאם A היא קבוצה סגורה אז B הוא כדור סגור.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ פונקציה רציפה.

לכל מספר טבעי n תהי A_n קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^k$ ותהי $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

הראו ש- $f(A_n)$ אינה בהכרח קבוצה סגורה.

הוכיחו שיש קבוצות סגורות B_n ב- $\mathbb{R}^l$ כך ש- $f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

שאלה 4 (20 נקודות)

- תהי A קבוצה קמורה וחסומה ב- $\mathbf{R}^k$ ש- $0^{[k]}$ נקודה פנימית שלה.
בשאלה זאת תוכיחו ש- ∂A היא משטחעל.
א. הוכיחו שאם $x \in \partial A$ ו- $0 < \alpha < 1$ אז αx היא נקודה פנימית של A .
ב. הוכיחו שהפונקציה $f: \partial A \rightarrow S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$ המוגדרת על ידי $x \mapsto \frac{1}{|x|}x$ היא פונקציה חד-חד-ערכית ורציפה.
ג. הראו שהפונקציה ההופכית $f^{-1}: S^{k-1}(0^{[k]}; 1) \rightarrow \partial A$ היא פונקציה רציפה ב- $S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$.
ד. היעזרו בדוגמה 14.2 ובפונקציה f דלעיל כדי להסיק ש- ∂A היא משטחעל ב- $\mathbf{R}^k$.

שאלה 5 (20 נקודות)

- הדרגה של מטריצה היא מימד מרחב השורות שלה, והיא גם מימד מרחב העמודות שלה.
את מרחב המטריצות 2×3 נזהה עם המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^6$ (ראו הערה 1.א.1).
הוכיחו שקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 2 היא קבוצה פתוחה, ושקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 1 היא יריעה ממימד 4.
הערה: במעט יותר מאמץ אפשר להוכיח שאם $r = \min\{k, l\}$ אז קבוצת המטריצות $k \times l$ שדרגתן r היא קבוצה פתוחה ושם $0 < r < \min\{k, l\}$ אז היא יריעה ממימד $kl - (k-r)(l-r)$.

►►► סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: סעיפים ב רג היו 2021\ב192.

א נכון: אם $x, y \in C$ ו- $0 \leq \lambda \leq 1$ יש להראות $u = \lambda x + (1-\lambda)y \in C$.
 ברור שזה נכון אם $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$ ולכן נניח בהמשך $0 < \lambda < 1$.
 יש $a, c \in A$ ו- $b, d \in B$ ו- $s, t \in [0, 1]$ כך ש- $x = ta + (1-t)b$ ו- $y = sc + (1-s)d$.
 נסמן: $\lambda' = 1 - \lambda$ ו- $t' = 1 - t$ ו- $s' = 1 - s$. אז כמובן $\lambda + \lambda' = 1$, $t + t' = 1$ ו- $s + s' = 1$.
 ומתקיים $x = ta + t'b$, $y = sc + s'd$, ולכן $u = \lambda x + \lambda'y$, כלומר:

$$u = \lambda ta + \lambda t'b + \lambda'sc + \lambda's'd$$
 אם $\lambda t + \lambda's = 0$ אז מאחר שהמחברים אישיליים $\lambda t = \lambda's = 0$ ולכן $t = s = 0$, ולכן
 $u = 0a + (1-0)u \in C$: במקרה זה $u = \lambda b + \lambda'd \in B$ כי B קמורה, ולכן: $s' = t' = 1$
 אם $\lambda t' + \lambda's' = 0$ אז מאחר שהמחברים אישיליים $\lambda t' = \lambda's' = 0$ ולכן $t' = s' = 0$, ולכן
 $u = 1u + (1-1)b \in C$: במקרה זה $u = \lambda a + \lambda'c \in A$ כי A קמורה, ולכן: $s = t = 1$
 אחרת:

$$u = (\lambda t + \lambda's) \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} a + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} c \right) + (\lambda t' + \lambda's') \left(\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} b + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} d \right)$$
 מתקיים $\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} = 1$ ו- $a, c \in A$ קמורה ולכן:
 $\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} a + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} c \in A$
 מתקיים $\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} = 1$ ו- $b, d \in B$ קמורה ולכן:
 $\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} b + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} d \in B$
 לבסוף:

$$(\lambda t + \lambda's) + (\lambda t' + \lambda's') = \lambda(t + t') + \lambda'(s + s') = \lambda + \lambda' = 1$$
 ולכן לפי הגדרת C מתקיים:

$$u = (\lambda t + \lambda's) \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} a + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} c \right) + (\lambda t' + \lambda's') \left(\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} b + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} d \right)$$

$$= (\lambda t + \lambda's) \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} a + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} c \right) + (1 - (\lambda t + \lambda's)) \left(\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} b + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} d \right) \in C$$
 ובכך הסתיימה ההוכחה לכך ש- C קבוצה קמורה.

ב נכון: אם $B(a; \delta) \subseteq A$ ו- $B(b; \delta) \subseteq B$ אז $B(ta + (1-t)b; \delta) \subseteq C$, כי לכל
 $u \in B(0; \delta)$ מתקיים $u = t(a + u) + (1-t)(b + u)$.
 ג. לא נכון, ודוגמה נגדית למשל:
 $A = \{(x, x^{-1}) \mid x > 0\}$, $B = \{(x, -x^{-1}) \mid x > 0\}$
 אז $C \subseteq (0, \infty) \times \mathbf{R}$ ולכל $x > 0$ $(x, 0) \in C$ ומכאן $(0, 0) \in \partial C \setminus C$.

לשאלה 2: סעיף א זה 2023\ב193. סעיף ב זה 2023\ב191.

בסעיף א נניח בשלילה ש- B כדור סגור ונסמן $B = \bar{B}(a; r)$.
 אז $A \not\subseteq B(a; r)$ ולכן יש $c \in A \setminus B(a; r)$. מ- $A \subseteq B$ נובע $c \in B = \bar{B}(a; r)$ ולכן
 $c \in \bar{B}(a; r) \setminus B(a; r) = S(a; r)$, כלומר $|c - a| = r$. מכך ש- A פתוחה נובע שיש סביבה
 כדורית של c שמוכלת בה, ובה"כ זה כדור סגור, כלומר $\bar{B}(c; \varepsilon) \subseteq A$.

$$c + \frac{\varepsilon}{r}(c - a) \in \bar{B}(c, \varepsilon) \subseteq A \subseteq B = \bar{B}(a; r)$$
 ולכן $\left| \frac{\varepsilon}{r}(c - a) \right| = \frac{\varepsilon}{r}|c - a| = \frac{\varepsilon}{r} \cdot r = \varepsilon$

$$r > \left| c + \frac{\varepsilon}{r}(c-a) - a \right| = \left| \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)(c-a) \right| = \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)|c-a| = \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) \cdot r = r + \varepsilon > r \quad \text{אז}$$

וזאת סתירה. אפשר יותר בקצרה, וללא שלילה: לוקחים את הכדור הפתוח עם אותו מרכז ורדיוס כמו B . לכל נקודה של A יש סביבה שמוכלת ב- A ולכן גם ב- B . לכן הנקודה אינה נקודת שפה של B ולפי שאלה 7.א.2 היא בכדור הפתוח. לכן A מוכלת בכדור הפתוח וזה מוכל ב- B , ולפי נתוני השאלה הכדור הפתוח אינו "כדור אחר" ולכן הוא B .

בסעיף ב נניח בשלילה ש- B כדור פתוח ונסמן $B = B(a; r)$. נסמן $B_n = B\left(a; r - \frac{1}{n}\right)$. האוסף $\{B_n \mid n > \frac{1}{r}\}$ הוא כיסוי של B ולכן גם של A בקבוצות פתוחות, סגורה וחסומה ולכן ממשפט היינה-בורל קומפקטית אז יש לו תת-כיסוי סופי, ואם לוקחים את ה- n המקסימלי שמשתתף בו, אז B_n כדור שמכיל את A ומוכל־ממש ב- B , וזאת סתירה.

אפשר גם לקבל את הסתירה בעזרת משפט ווירשטראס והפונקציה $x \mapsto |x-a|$.

לשאלה 3: 2023\ב\181, בתוספת הפרכה שתמונת סגורה היא סגורה (דוגמה נגדית: $x \mapsto e^x$).

הקבוצה $K_n = \overline{B}(0^{[k]}; n) \cap \bigcup_{i=1}^n A_i$ סגורה וחסומה ולכן קומפקטית, ולכן $B_n = f(K_n)$

היא קבוצה קומפקטית ב- $\mathbf{R}^l$.

$$\text{אפשר לבדוק ש-} A = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n \text{ ו-} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_n) = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_n\right) = f(A).$$

לשאלה 4: לסעיף א: יש $r > 0$ כך ש- $B(0; r) \subseteq A$. נסמן $\delta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}r$. אז $\delta > 0$.

נראה ש- $B(\alpha x; \delta) \subseteq A$, ולכן αx נקודה פנימית של A .

יש $a \in A \cap B(x; \delta)$ כי $a \in \partial A$. ניקח $y \in B(\alpha x; \delta)$ כלשהו ונוכיח $y \in A$.

$$\text{נגדיר } u = \frac{1}{1-\alpha}(y - \alpha a) \text{ אז}$$

$$\begin{aligned} |u| &= \frac{1}{1-\alpha}|y - \alpha a| = \frac{1}{1-\alpha}|(y - \alpha x) + \alpha(x - a)| \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}(|y - \alpha x| + \alpha|x - a|) < \frac{1}{1-\alpha}(\delta + \alpha\delta) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\delta = r \end{aligned}$$

$$u \in B(0^{[k]}; r) \subseteq A \quad \text{ולכן:}$$

$$\text{אז } a, u \in A \text{ ומאחר ש-} A \text{ היא קבוצה קמורה מתקיים: } (1-\alpha)u + \alpha a \in A$$

$$\text{מצד שני } (1-\alpha)u + \alpha a = (y - \alpha a) + \alpha a = y \text{ ולכן } y \in A.$$

לסעיף ב: הפונקציה $x \mapsto \frac{1}{|x|}x$ היא פונקציה יסודית שמוגדרת ב- $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ ולכן רציפה

בקבוצה זאת. $0 \notin \partial A$ ולכן $\partial A \subseteq \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ ו- f רציפה כצמצום של פונקציה רציפה.

אם נניח בשלילה שהיא אינה חד־חד־ערכית אז יש $x, y \in \partial A$ כך ש- $x \neq y$ ו-

$f(x) = f(y)$ אם $|x| = |y|$ או מ' $y = \frac{1}{|x|}x$ מקבלים $x = y$ וזאת סתירה.

אם $|x| \neq |y|$ אפשר להניח ללא הגבלת הכלליות ש' $|x| > |y|$ ואז $0 < \frac{|y|}{|x|} < 1$ ולפי סעיף א

הנקודה $y = \frac{|y|}{|x|}x$ היא נקודה פנימית של A , בסתירה להנחה ש' $y \in \partial A$.

בסעיף ג מנצלים את סעיף ב של טענה 29.ד.2 עם $K = \partial A$. זאת קבוצה סגורה והיא

גם חסומה כי A חסומה, ולכן לפי הלמה של היינה-בורל היא קומפקטית.

לסעיף ד, נוכל להסיק מסעיף ג שאם $h: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^k$ היא הומיאומורפיזם שתמונתו

מוכלת ב' $S^{k-1}(0;1)$ אז $f^{-1} \circ h$ היא הומיאומורפיזם שתמונתו מוכלת ב' ∂A , ולכן

$f^{-1} \circ h(\Omega)$ טלאי $k-1$ ממדי שתמונתו מוכלת ב' ∂A אם Ω היא קבוצה פתוחה ב'

$\mathbb{R}^{k-1}$. מה שנותן זה לכסות את ∂A בקבוצות פתוחות U_i כך שלכל אחת מהן

$U_i \cap \partial A$ יהיה טלאי כזה, ואת זה אפשר לעשות עם הקבוצות מדוגמה 14.י.2, למשל.

לשאלה 5: דרגת מטריצה 2×3 אינה 2 אם ורק אם מימד מרחב עמודותיה לכל היותר 1. אם זה

נכון למטריצה $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ אז זה נכון גם עבור שלוש המטריצות $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}$, ו'

$\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ ו' $\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_4 & x_6 \end{pmatrix}$ ולכן שלושתן סינגולריות. אם לא שלושתן סינגולריות, אז

עמודות אחת מהן פורשות תת-מרחב מממד 2, ולכן המטריצה הראשונה מדרגה 2.

יוצא שמטריצה אינה מדרגה 2 אם ורק אם מתקיים $x_1x_5 - x_2x_4 = 0$ וגם

$x_1x_3 - x_2x_6 = 0$ וגם $x_2x_6 - x_3x_5 = 0$ ולכן לפי חלק ג של מסקנה 23.ד.2 וחלק ג של

טענה 24.א.2 קבוצת המטריצות שדרגתן אינה 2 היא סגורה, ומכאן שקבוצת

המטריצות שדרגתן 2 פתוחה.

מטריצה שדרגתה 1, אחת משורותיה אינה שורת אפסים, ושאר שורותיה כפולות של

אותה שורה. מטריצה כזאת היא מהצורה $\begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$ עם $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ או

מהצורה $\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ עם $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. הקבוצה $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ פתוחה

ולכן לפי טענה 29.א.2 הקבוצה $\Omega = (\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) \times \mathbb{R}$ היא קבוצה פתוחה ב' $\mathbb{R}^4$.

נגדיר פונקציה $h: \Omega \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbb{R})$ על ידי: $(x, y, z, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$

זאת בבירור פונקציה רציפה כי כל רכיביה פונקציות פולינומיות. נסמן ב' S את

קבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 1, וב' U את קבוצת המטריצות ששורתן הראשונה

אינה שורת אפסים. הקבוצה U מזוהה עם הקבוצה $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbb{R}^3$ ב' $\mathbb{R}^6$

והיא פתוחה לפי טענה 29.2. ברור ש- $h(\Omega) \subseteq S \cap U$. מצד שני אם

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \in S \cap U$$

אז $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ושתי השורות תלויות לינארית, ולכן השורה השניה היא כפולה

של השורה הראשונה, כלומר יש $\lambda \in \mathbb{R}$ כך ש- $(\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (x, y, z)$ ולכן $(u, v, w) \in \lambda(x, y, z)$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix} \in h(\Omega)$$

ואם כך גם $S \cap U \subseteq h(\Omega)$ ולכן $S \cap U = h(\Omega)$.

נראה ש- h היא הומאומורפיזם מ- Ω ל- $S \cap U$. אנו יודעים כבר שהיא רציפה,

ושמתקיים $S \cap U = h(\Omega)$. נראה שהיא חד-חדערכית וההופכית h^{-1} רציפה.

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \mu u & \mu v & \mu w \end{pmatrix} \quad \text{אם } h(x, y, z, \lambda) = h(u, v, w, \mu)$$

אז בבירור $x = u, y = v, z = w$ ולכן גם $\lambda(x, y, z) = \mu(u, v, w) = \mu(x, y, z)$

ומאחר ש- $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ נובע $\lambda = \mu$, ובזאת הוכח ש- h חד-חדערכית.

נותר להראות שההופכית $h^{-1}: S \cap U \rightarrow \Omega$ רציפה. לשם כך די להראות שבסביבה של

כל נקודה ב- $h(\Omega)$ היא שווה לצמצום של פונקציה שרציפה בנקודה.

נתבונן בנקודה $h(u, v, w, \mu)$ עם $(u, v, w, \mu) \in \Omega$. אז $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ ולכן $u \neq 0$

$$h(u, v, w, \mu) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \mu u & \mu v & \mu w \end{pmatrix} \quad \text{אז } u \neq 0. \quad \text{או } v \neq 0 \quad \text{או } w \neq 0. \quad \text{נטפל קודם באפשרות } u \neq 0.$$

נמצא בקבוצת המטריצות V שמזוהה עם הקבוצה $(\mathbb{R} \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^5$ שהיא קבוצה

פתוחה, ולכן היא סביבה של $h(u, v, w, \mu)$.

$$g: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & \frac{x_4}{x_1} \end{pmatrix} \quad \text{נגדיר את הפונקציה } g: V \rightarrow \mathbb{R}^4 \text{ על ידי:}$$

זאת פונקציה רציפה כי כל רכיביה הם פולינומים או פונקציות רציונליות שמוגדרות

$$h(u, v, w, \mu) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \mu u & \mu v & \mu w \end{pmatrix} \quad \text{בכל נקודה ב- } V. \quad \text{בפרט היא רציפה בנקודה:}$$

נראה שהצמצום של g ל- $S \cap U \cap V = S \cap V$ מתלכד עם בצמצום של h^{-1} לאותה

$$h(u, v, w, \mu) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \mu u & \mu v & \mu w \end{pmatrix} \quad \text{קבוצה, ומכאן ש- } h^{-1} \text{ גם היא רציפה בנקודה}$$

ובכן נקודה ב- $S \cap V$ היא מטריצה $\begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$ עם $x \neq 0$. אז:

$$g\begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ x & y & z, \frac{\lambda x}{x} \end{pmatrix} = (x, y, z, \lambda) = h^{-1}\begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$$

זה מסיים את הטיפול באפשרות $u \neq 0$. באפשרות $v \neq 0$ מטפלים באופן דומה עם

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3, \frac{x_5}{x_2} \end{pmatrix} \quad \text{הפונקציה שמוגדרת על ידי}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_1 & x_2 & x_3, \frac{x_6}{x_3} \end{pmatrix} \quad \text{ובאפשרות } w \neq 0 \text{ עם הפונקציה:}$$

$$\varphi: M_{2 \times 3}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbf{R}) \quad \text{עכשיו נתבונן בפונקציה}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{שמוגדרת על ידי:}$$

זאת פונקציה לינארית הפיכה (היא ההופכית של עצמה). לכן בפרט היא וההופכית

שלה רציפות. לכן הפונקציה $\varphi \circ h: \Omega \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$ היא הומאומורפיזם מ- Ω לקבוצה

$$\varphi \circ h(\Omega) = \varphi(h(\Omega)) = \varphi(S \cap U) = \varphi(S) \cap \varphi(U) = S \cap U'$$

כאשר $U' = \varphi(U)$ היא קבוצת המטריצות ששורתן השניה אינה שורת אפסים, והיא

קבוצה פתוחה, ו- $\varphi(S) = S'$ כי הפונקציה φ מעבירה מטריצה למטריצה בעלת אותה

דרגה, שכן היא רק מחליפה את סדר השורות, ואינה משנה את מרחב השורות של

המטריצה, ולכן מעבירה מטריצה שדרגתה 1 למטריצה שדרגתה 1. אז $S \cap U'$ היא

טלאי 4-ממדי, וגם $S \cap U$ טלאי 4-ממדי, וכן $S \subseteq U \cup U'$, ולכן לפי הגדרה 7.2.7

היא יריעה 4-ממדית.