

מתווה לפתרון ממ"ן 11

סמסטר: 1א2024

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה: 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–2

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה A ו- B קבוצות ב- $\mathbb{R}^k$. תהי C איחוד כל הקטעים הסגורים שקצה אחד שלהם ב- A

והקצה השני ב- B , דהיינו $C = \{ta + (1-t)b \mid a \in A, b \in B, 0 \leq t \leq 1\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A ו- B קבוצות קמורות אז C קבוצה קמורה.

ב. אם A ו- B קבוצות פתוחות אז C קבוצה פתוחה.

ג. אם A ו- B קבוצות סגורות אז C קבוצה סגורה.

פתרון סעיף א

הטענה נכונה. אם $x, y \in C$ ו- $0 \leq \lambda \leq 1$ יש להראות $u = \lambda x + (1-\lambda)y \in C$.

ברור שזה נכון אם $\lambda = 0$ או $\lambda = 1$ ולכן נניח בהמשך $0 < \lambda < 1$.

יש $a, c \in A$ ו- $b, d \in B$ ו- $s, t \in [0, 1]$ כך ש- $x = ta + (1-t)b$ ו- $y = sc + (1-s)d$.

נסמן: $\lambda' = 1 - \lambda$ ו- $t' = 1 - t$ ו- $s' = 1 - s$ ו- $t + t' = 1$, $s + s' = 1$, ומתקיים

$$u = \lambda ta + \lambda t'b + \lambda'sc + \lambda's'd \quad \text{וכן } u = \lambda x + \lambda'y, \quad x = ta + t'b, \quad y = sc + s'd$$

אם $\lambda t + \lambda's = 0$ אז מאחר שהמחברים אישיליים $\lambda t = \lambda's = 0$ ולכן $t = s = 0$ ולכן $s' = t' = 1$.

במקרה זה $u = \lambda b + \lambda'd \in B$ כי B קמורה, ולכן:

אם $\lambda t' + \lambda's' = 0$ אז מאחר שהמחברים אישיליים $\lambda t' = \lambda's' = 0$ ולכן $t' = s' = 0$ ולכן

$s = t = 1$. במקרה זה $u = \lambda a + \lambda'c \in A$ כי A קמורה, ולכן:

$$u = (\lambda t + \lambda's) \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} a + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} c \right) + (\lambda t' + \lambda's') \left(\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} b + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} d \right) \quad \text{אחרת:}$$

מתקיים $\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} = 1$ ו- $a, c \in A$ כי A קמורה ולכן:

מתקיים $\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} = 1$ ו- $b, d \in B$ כי B קמורה ולכן:

$$(\lambda t + \lambda's) + (\lambda t' + \lambda's') = \lambda(t + t') + \lambda'(s + s') = \lambda + \lambda' = 1 \quad \text{לבסוף:}$$

ולכן לפי הגדרת C מתקיים:

$$\begin{aligned} u &= (\lambda t + \lambda's) \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} a + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} c \right) + (\lambda t' + \lambda's') \left(\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} b + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} d \right) \\ &= (\lambda t + \lambda's) \left(\frac{\lambda t}{\lambda t + \lambda's} a + \frac{\lambda's}{\lambda t + \lambda's} c \right) + (1 - (\lambda t + \lambda's)) \left(\frac{\lambda t'}{\lambda t' + \lambda's'} b + \frac{\lambda's'}{\lambda t' + \lambda's'} d \right) \in C \end{aligned}$$

ובכך הסתיימה ההוכחה לכך ש- C קבוצה קמורה.

פתרון סעיף ב

הטענה נכונה. יהי $c \in C$. נוכיח שיש סביבה של c שמוכלת בקבוצה C .

יש $a \in A$, $b \in B$ ו- $t \in [0,1]$ כך ש- $c = ta + (1-t)b$.

יש כדור שמרכזו ב- a ומוכל ב- A , ולכן יש $\delta_1 > 0$ כך ש- $B(a; \delta_1) \subseteq A$.

יש כדור שמרכזו ב- b ומוכל ב- B , ולכן יש $\delta_2 > 0$ כך ש- $B(b; \delta_2) \subseteq B$.

נסמן $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. אז $\delta > 0$ ומתקיים $B(a; \delta) \subseteq A$ וכן $B(b; \delta) \subseteq B$.

נוכח ש- $B(c; \delta) \subseteq C$, ולכן יש סביבה כדורית של c שמוכלת ב- C .

יהי $x \in B(c; \delta)$. לנוחיותנו נסמן $u = x - c$ או $x = c + u$ וכן $|u| = |x - c| < \delta$.

נסמן גם $a' = a + u$ ו- $b' = b + u$.

אז $|a' - a| = |u| < \delta$ ולכן $a' \in B(a; \delta)$ ולכן גם $a' \in A$.

גם $|b' - b| = |u| < \delta$ ולכן $b' \in B(b; \delta)$ ולכן גם $b' \in B$.

לכן $ta' + (1-t)b' \in C$.

לבסוף: $ta' + (1-t)b' = t(a+u) + (1-t)(b+u) = ta + (1-t)b + tu + (1-t)u = c + u = x$

ולכן $x \in C$, ובכך הוכח ש- $B(c; \delta) \subseteq C$, והסתיימה ההוכחה ש- C היא קבוצה פתוחה.

פתרון סעיף ג

הטענה אינה נכונה. יש דוגמאות נגדיות רבות. למשל:

$$A = \{(x, x^{-1}) \mid x > 0\}$$

$$B = \{(x, -x^{-1}) \mid x > 0\}$$

בבירור שתי הקבוצות A ו- B הן תת-קבוצות של הקבוצה $K = (0, \infty) \times \mathbb{R}$.

הקבוצות $\mathbb{R}$ ו- $(0, \infty)$ הן קבוצות קמורות (ראו הערה 15.ג.1 בספר) ולפי שאלה 16.ג.1 קמורה K .

אם $c \in C$ אז יש $a \in A$, $b \in B$ ו- $t \in [0,1]$ כך ש- $c = ta + (1-t)b$ ולכן $a, b \in K$ ומכך ש- K היא

קבוצה קמורה נובע ש- $c = ta + (1-t)b \in K$, ולכן $C \subseteq K$.

לכל $x > 0$ מתקיים $(x, 0) = \frac{1}{2}(x, x^{-1}) + \frac{1}{2}(x, -x^{-1})$ ולכן $(x, 0) \in C$.

אם U סביבה של $(0,0)$ אז יש $\delta > 0$ כך ש- $\bar{B}((0,0); \delta) \subseteq U$. אז $(0, \delta) \in U$ וזה איבר של C ,

וכן $(0,0) \in U$ וזה אינו איבר של C . לכן $(0,0) \in \partial C$, כלומר הנקודה $(0,0)$ היא נקודת שפה

של C , ואינה איבר של C , ולכן C אינה קבוצה סגורה.

נראה עכשיו שהקבוצות A ו- B הן קבוצות סגורות, וזה יסיים את ההוכחה שהדוגמה היא דוגמה

נגדית לטענה שאם A ו- B סגורות אז C סגורה.

לפי חלקים ב ו-ג של מסקנה 23.ד.2 הקבוצות $D = \{(x, y) \mid xy = 1\}$, $E = \{(x, y) \mid xy = -1\}$ ו-

$F = \{(x, y) \mid x \geq 0\}$ סגורות, ולפי חלק ג של טענה 24.א.2 גם $A = D \cap F$ ו- $B = E \cap F$ סגורות.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה ב- $\mathbb{R}^k$. נתון ש- B כדור שמכיל את A ושאינו כדור אחר שמכיל את A ומוכל ב- B .
 א. הוכיחו שאם A היא קבוצה פתוחה אז B הוא כדור פתוח.
 ב. הוכיחו שאם A היא קבוצה סגורה אז B הוא כדור סגור.

פתרון סעיף א

יהי C הכדור הפתוח עם אותו מרכז ורדיוס כמו B . לכל נקודה של A יש סביבה שמוכלת ב- A ולכן גם ב- B . לכן הנקודה אינה נקודת שפה של B ולפי שאלה 7.א.2 היא בכדור הפתוח C . זה נכון לכל נקודה של A ולכן A מוכלת בכדור הפתוח C וזה מוכל ב- B . לפי נתוני השאלה הכדור הפתוח C אינו "כדור אחר" ולכן הוא B , ומכאן ש- B הוא כדור פתוח.
הוכחה נוספת למי שמעדיף הוכחות עם הרבה סימנים:

נניח בשלילה ש- B כדור סגור ונסמן $B = \bar{B}(a; r)$. אז $A \not\subseteq B(a; r)$ ולכן יש $c \in A \setminus B(a; r)$.
 מ- $A \subseteq B$ נובע $c \in B = \bar{B}(a; r)$ ולכן $c \in B(a; r) \setminus B(a; r) = S(a; r)$ כלומר $|c - a| = r$.
 מכך ש- A פתוחה נובע שיש סביבה כדורית של c שמוכלת בה, ובה"כ זה כדור סגור, כלומר

$$\bar{B}(c; \varepsilon) \subseteq A \subseteq B = \bar{B}(a; r) \quad \text{ולכן} \quad \left| \frac{\varepsilon}{r}(c - a) \right| = \frac{\varepsilon}{r}|c - a| = \frac{\varepsilon}{r} \cdot r = \varepsilon$$

 אז $r > \left| c + \frac{\varepsilon}{r}(c - a) - a \right| = \left| \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)(c - a) \right| = \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right)|c - a| = \left(1 + \frac{\varepsilon}{r}\right) \cdot r = r + \varepsilon > r$ וזאת סתירה.

פתרון סעיף ב

נניח בשלילה ש- B כדור פתוח ונסמן $B = B(c; r)$.
 אם $a \in A$ אז מאחר ש- $A \subseteq B$ גם $a \in B$ ולכן $|a - c| < r$. אז יש $r_a \in (|a - c|, r)$. נבחר r_a כזה ונסמן $U_a = B(c; r_a)$. זאת היא סביבה פתוחה של a (מתקיים $|a - c| < r_a$ ולכן $a \in U_a$).
 הקבוצה A סגורה לפי הנתון, והיא חסומה כי היא מוכלת בכדור B , ולפי הלמה של היינה-בורל (משפט 9.ב.2) היא קומפקטית, ולפי הגדרה 2.ב.2 יש קבוצה סופית $F \subseteq A$ כך ש- $A \subseteq \bigcup_{a \in F} U_a$.
 לכל $a \in F$ יש $r_a \in (0, r)$ כך ש- $U_a = B(c; r_a)$. נסמן $r' = \max\{r_a \mid a \in F\}$. אז $0 < r' < r$ ולכל $a \in F$ מתקיים $r_a \leq r'$ לכן $U_a = B(c; r_a) \subseteq B(c; r')$. לכן

$$A \subseteq \bigcup_{a \in F} U_a \subseteq B(c; r')$$

 ו- $B(c; r')$ הוא כדור שמוכל־ממש ב- B ומכיל את A , בסתירה לנתון.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^l$ פונקציה רציפה.

לכל מספר טבעי n תהי A_n קבוצה סגורה ב- $\mathbb{R}^k$ ותהי $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

הראו ש- $f(A_n)$ אינה בהכרח קבוצה סגורה.

הוכיחו שיש קבוצות סגורות B_n ב- $\mathbb{R}^l$ כך ש- $f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

פתרון

ראשית, כדי להראות ש- $f(A_n)$ אינה בהכרח סגורה די בדוגמה: ניקח למשל $k=l=1$, $A_n = \mathbb{R}$

שהיא בבירור קבוצה סגורה, ו- $f: x \mapsto e^x$ שהיא פונקציה יסודית ולכן רציפה.

הקבוצה $f(A_n) = (0, \infty)$ אינה סגורה (0 אינה איבר בה, אבל היא נקודת שפה לפי שאלה 2.א.6).

נוכיח את הטענה הכללית שבשאלה:

נסמן $K_n = \bar{B}(0^{[k]}; n) \cap \bigcup_{i=1}^n A_i$. הקבוצה $\bigcup_{i=1}^n A_i$ היא קבוצה סגורה לפי חלק ד של טענה 2.א.24.

הכדור הסגור $\bar{B}(0^{[k]}; n)$ הוא קבוצה סגורה לפי אבחנה 2.א.12.

לכן, לפי חלק ב של טענה 2.א.24 החיתוך שלהם K_n הוא קבוצה סגורה.

הקבוצה K_n גם חסומה כי היא מוכלת בכדור $\bar{B}(0^{[k]}; n)$, ולכן לפי הלמה של היינה-בורל (משפט

9.ב.2) היא קבוצה קומפקטית. לפי חלק א של טענה 2.ד.29 גם הקבוצה $f(K_n)$ קומפקטית, ולפי

חלק ב של טענה 2.ב.7 הקבוצה $f(K_n)$ סגורה. נסמן $B_n = f(K_n)$ ונראה ש- $f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

אם $x \in f(A)$ אז יש $a \in A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ כך ש- $x = f(a)$ ויש i טבעי כך ש- $a \in A_i$. יש גם m טבעי כך

ש- $|a| \leq m$ ניקח $n = \max\{i, m\}$ ואז $|a| \leq n$ וגם $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i$ ולכן $a \in K_n$ ו- $x = f(a) \in f(K_n) = B_n$

ולכן $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$. זה מראה ש- $f(A) \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

נוכיח את ההכלה ההפוכה: נניח ש- $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$ אז יש n כך ש- $x \in B_n = f(K_n)$ ולכן יש $a \in K_n$

כך ש- $x = f(a)$. בפרט $a \in \bigcup_{i=1}^n A_i \subseteq A$ ולכן $x = f(a) \in f(A)$.

בכך הוכחה ההכלה $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \subseteq f(A)$, ומשתי ההכלות יחד נובע השוויון $f(A) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי A קבוצה קמורה וחסומה ב- $\mathbf{R}^k$ ש- $0^{[k]}$ נקודה פנימית שלה.

בשאלה זאת תוכיחו ש- ∂A היא משטח-על.

א. הוכיחו שאם $x \in \partial A$ ו- $0 < \alpha < 1$ אז αx היא נקודה פנימית של A .

ב. הוכיחו שהפונקציה $f: \partial A \rightarrow S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$ המוגדרת על ידי $x \mapsto \frac{1}{|x|}x$ היא פונקציה חד-חד-

ערכית ורציפה.

ג. הראו שהפונקציה ההופכית $f^{-1}: S^{k-1}(0^{[k]}; 1) \rightarrow \partial A$ היא פונקציה רציפה ב- $S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$.

ד. היעזרו בדוגמה 14.2 ו-14.1 ובפונקציה f דלעיל כדי להסיק ש- ∂A היא משטח-על ב- $\mathbf{R}^k$.

פתרון סעיף א

יש $r > 0$ כך ש- $B(0; r) \subseteq A$, כי 0 היא נקודה פנימית של A . נסמן $\delta = \frac{1-\alpha}{1+\alpha}r$ או $\delta > 0$.

יש $a \in A \cap B(x; \delta)$ כי $a \in \partial A$. נראה ש- $B(\alpha x; \delta) \subseteq A$, ולכן αx נקודה פנימית של A .

ניקח $y \in B(\alpha x; \delta)$ כלשהו ונוכיח $y \in A$.

$$\begin{aligned} |u| &= \frac{1}{1-\alpha}|y - \alpha a| = \frac{1}{1-\alpha}|(y - \alpha x) + \alpha(x - a)| \\ &\leq \frac{1}{1-\alpha}(|y - \alpha x| + \alpha|x - a|) < \frac{1}{1-\alpha}(\delta + \alpha\delta) = \frac{1+\alpha}{1-\alpha}\delta = r \end{aligned}$$

ולכן: $u \in B(0^{[k]}; r) \subseteq A$

אז $a, u \in A$ ומאחר ש- A היא קבוצה קמורה מתקיים:

מצד שני $(1-\alpha)u + \alpha a = (y - \alpha a) + \alpha a = y$ ולכן $y \in A$.

פתרון סעיף ב

הפונקציה $x \mapsto \frac{1}{|x|}x$ היא פונקציה יסודית שמוגדרת ב- $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ ולכן רציפה בקבוצה זאת.

נתון ש- 0 היא נקודה פנימית של A ולכן $\partial A \subseteq \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ ו- $f: \partial A \rightarrow S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$ רציפה כצמצום של פונקציה רציפה.

אם נניח בשלילה ש- f אינה חד-חד-ערכית אז יש $x, y \in \partial A$ כך ש- $x \neq y$ ו- $f(x) = f(y)$.

אם $|x| = |y|$ אז מ- $\frac{1}{|x|}x = \frac{1}{|y|}y$ מקבלים $x = y$ וזאת סתירה.

אם $|x| \neq |y|$ אפשר להניח ללא הגבלת הכלליות ש- $|x| > |y|$ ואז $0 < \frac{|y|}{|x|} < 1$ ולפי סעיף א הנקודה

$y = \frac{|y|}{|x|}x$ היא נקודה פנימית של A , בסתירה להנחה ש- $y \in \partial A$.

פתרון סעיף ג

נתון ש- A קבוצה חסומה, ולפי שאלה 6.ב.2 גם ∂A קבוצה חסומה. לפי שאלה 20.א.2 גם ∂A היא קבוצה סגורה, ולכן לפי הלמה של היינה-בורל ∂A היא קבוצה קומפקטית. בסעיף ב ראינו ש- $f^{-1} : f(\partial A) \rightarrow \partial A$ חד-חד-ערכית ורציפה, ולכן לפי חלק ב של טענה 29.ד.2 הפונקציה ההופכית $f^{-1} : f(\partial A) \rightarrow \partial A$ היא פונקציה רציפה. כדי להשלים את פתרון סעיף זה נותר להראות ש- $f(\partial A) = S^{k-1}(0;1)$.

$$\text{ברור ש-} f(\partial A) \subseteq S^{k-1}(0;1), \text{ כי } |f(x)| = \left| \frac{1}{|x|}x \right| = \frac{1}{|x|}|x| = 1.$$

להוכחת ההכלה ההפוכה נניח כי $y \in S^{k-1}(0;1)$ ונראה ש- $y \in f(\partial A)$. לשם כך נראה שיש $x \in \partial A$

כך ש- $y = f(x)$. מאחר שהקבוצה A חסומה יש $r > 0$ כך ש- $A \subseteq B(0;r)$.

נתבונן בפונקציה $\varphi : [0,r] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $t \mapsto \chi_A(ty)$ (ראו הגדרה 21.י.1).

מתקיים $\varphi(0) = \chi_A(0) = 1$ כי $0 \in A$. כמוכן $|ty| = r|y| = r$ ולכן $ty \notin B^k(0;r)$, ולכן גם $ty \notin A$,

ומכאן $\varphi(r) = \chi_A(ty) = 0$. לפי הגדרת χ_A תמונתה מוכלת ב- $\{0,1\}$, ולכן תמונת φ היא $\{0,1\}$.

התחום של φ הוא הקטע $[0,r]$, שהוא קבוצה קשורה-מסילתית, ותמונת φ היא הקבוצה $\{0,1\}$

שאינה קשורה מסילתית (לפי טענה 10.ט.2), ולפי טענה 2.ט.2 הפונקציה φ אינה רציפה.

תהי $t \in [0,r]$ כך ש- φ אינה רציפה ב- t , ונסמן $x = ty$. אז χ_A אינה רציפה ב- x : אחרת, לפי

משפט 7.ה.2, הפונקציה φ שהיא הרכבת χ_A על הפונקציה הליניארית $t \mapsto ty$ רציפה ב- t . מאחר

ש- χ_A אינה רציפה ב- x , היא אינה קבועה בסביבה של x ולכן בכל סביבה של x יש נקודה a כך

ש $\chi_A(a) \neq 0$ ולכן $\chi_A(a) = 1$, כלומר $a \in A$, ויש גם נקודה b כך ש- $\chi_A(b) \neq 1$, ולכן $\chi_A(b) = 0$,

כלומר $b \notin A$. לכן $x \in \partial A$, ומתקיים:

$$f(x) = f(ty) = \frac{1}{|ty|}ty = \frac{1}{t|y|}ty = y$$

פתרון סעיף ד

נעזר בדוגמה 14.י.2 ובסימונים שבדוגמה זאת. בפרט $S = S^{k-1}(0^{[k]};1)$, וכן בקבוצות U_j עם

$$\partial A \subseteq \bigcup_{j=1}^{2k} U_j \quad j=1,2,\dots,2k \text{ מתקיים } \bigcup_{j=1}^{2k} U_j = \mathbb{R}^k \setminus \{0\}, \text{ וכיון ש-} 0 \notin \partial A \text{ מתקיים:}$$

לפי הגדרה 7.י.2, כדי להראות ש- ∂A היא משטח-על, דהיינו יריעה $k-1$ מממדית, די שנראה

שלכל j הקבוצה $\partial A \cap U_j$ היא טלאי $k-1$ ממדי.

לפי דוגמה 14.י.2 הקבוצה $S \cap U_j$ היא טלאי $k-1$ ממדי. לכן יש קבוצה פתוחה $\Omega \subseteq \mathbb{R}^{k-1}$

והומאומורפיזם h מ- Ω לקבוצה $S \cap U_j$. נראה ש- $f^{-1} \circ h$ היא הומאומורפיזם מ- Ω ל- $\partial A \cap U_j$

וזה יסיים את הוכחת הנדרש בסעיף זה.

נשים לב לתכונה מועילה של הקבוצות U_j : מתקיים $x \in U_j$ אם ורק אם $f(x) \in U_j$ (כי

$$\text{הסימנים של שיעורי } f(x) = \frac{1}{|x|}x \text{ זהים לסימנים של שיעורי } x).$$

אם $\omega \in \Omega$ אז $h(\omega) \in S \cap U_j$.

מכך ש- $h(\omega) \in S$ נובע: $f^{-1} \circ h(\omega) = f^{-1}(h(\omega)) \in f^{-1}(S) = \partial A$

כמוכן $f^{-1} \circ h(\omega) \in U_j$ ולכן: $f(f^{-1} \circ h(\omega)) = f(f^{-1}(h(\omega))) = h(\omega) \in U_j$

אז $f^{-1} \circ h(\omega) \in \partial A \cap U_j$ ובזאת הראינו ש- $f^{-1} \circ h(\Omega) \subseteq \partial A \cap U_j$.

מצד שני אם $x \in \partial A \cap U_j$ אז $f(x) \in S$ וגם $f(x) \in U_j$ ולכן $f(x) \in S \cap U_j$ ולכן יש $\omega \in \Omega$ כך

ש- $f(x) = h(\omega)$, ולכן $x = f^{-1}(h(\omega)) = f^{-1} \circ h(\omega) \in f^{-1} \circ h(\Omega)$ ולכן $\partial A \cap U_j \subseteq f^{-1} \circ h(\Omega)$

ומשתי ההכללות נובע השוויון $f^{-1} \circ h(\Omega) = \partial A \cap U_j$. הפונקציה $f^{-1} \circ h$ היא פונקציה הפיכה מ-

Ω לתמונתה $\partial A \cap U_j$, כהרכבה של פונקציות הפיכות. היא גם רציפה כהרכבה של פונקציות

הפיכות. ההופכית שלה $f^{-1} \circ h = (f^{-1})^{-1} \circ h = f \circ h^{-1}$ גם היא רציפה כהרכבת פונקציות

רציפות ובכך הראינו ש- $f^{-1} \circ h$ היא הומאומורפיזם מ- Ω ל- $\partial A \cap U_j$ והסתיימה ההוכחה.

דרך נוספת בקצרה, ללא שימוש בקבוצות הפתוחות המסויימות מדוגמה 14.2:

נגדיר פונקציה $\varphi: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ על ידי $x \mapsto \left| f^{-1}\left(\frac{1}{|x|}x\right) \right| \cdot x$ כאשר $x \neq 0$ וכן $0^{[k]} \mapsto 0^{[k]}$.

בפרט אם $|x| = 1$ אז $x = f^{-1}\left(\frac{1}{|x|}x\right) = \frac{1}{|f^{-1}(x)|} \cdot f^{-1}(x)$ ולכן $x = f(f^{-1}(x))$ ולכן $\varphi(x) = |f^{-1}(x)| \cdot x = f^{-1}(x)$ ולכן

$\varphi|_{S^{k-1}(0^{[k]};1)} = f^{-1}$ ו- $\varphi(S^{k-1}(0^{[k]};1)) = f^{-1}(S^{k-1}(0^{[k]};1)) = \partial A$. נראה ש- φ הומאומורפיזם מ-

$\mathbb{R}^k$ לעצמו, ונראה שאם S יריעה d -ממדית אז $\varphi(S)$ יריעה d -ממדית, ובפרט מאחר ש-

$\varphi(S^{k-1}(0^{[k]};1))$ משטח-על נקבל ש- ∂A הוא משטח-על.

מדוע φ הומאומורפיזם? נגדיר פונקציה $\alpha: S^{k-1}(0^{[k]};1) \rightarrow (0, \infty)$ על ידי: $x \mapsto \left| f^{-1}\left(\frac{1}{|x|}x\right) \right|$

אז לכל $x \neq 0$ מתקיים $\varphi(x) = \alpha\left(\frac{1}{|x|}x\right) \cdot x$. ברור מדוע α רציפה ומכך נובעת רציפות φ בכל

נקודה פרט ל- $0^{[k]}$. התחום של α הוא קבוצה קומפקטית ולכן גם תמונתה, ובפרט היא חסומה.

ברור גם ש- $x \xrightarrow{x \rightarrow 0^{[k]}} 0^{[k]}$ ולפי מסקנה 11.1.2 $\varphi(x) = \alpha\left(\frac{1}{|x|}x\right) \cdot x \xrightarrow{x \rightarrow 0^{[k]}} 0^{[k]} = \varphi(0^{[k]})$

ולכן φ רציפה גם ב- $0^{[k]}$. לא קשה לבדוק ש- $\varphi^{-1}(x) = \frac{1}{\alpha\left(\frac{1}{|x|}x\right)} \cdot x$ ו- $\varphi^{-1}(0^{[k]}) = 0^{[k]}$ ולכן באותו

אופן גם φ^{-1} רציפה ב- $\mathbb{R}^k$.

לבסוף אם S יריעה d -ממדית את $S \subseteq \bigcup_{i \in I} U_i$ עם קבוצות פתוחות U_i כך ש- $S \cap U_i$ הם טלאים

d -ממדיים, ולפי טענה 11.1.2 $\varphi(S) \cap \varphi(U_i) = \varphi(S \cap U_i)$ טלאים d -ממדיים, $\varphi(u_i)$ קבוצות

פתוחות ו- $\varphi(S) \subseteq \bigcup_{i \in I} \varphi(U_i)$ ולכן $\varphi(S)$ יריעה d -ממדית (השלימו את פרטי ההוכחה הנוספת).

שאלה 5 (20 נקודות)

הדרגה של מטריצה היא מימד מרחב השורות שלה, והיא גם מימד מרחב העמודות שלה.

את מרחב המטריצות 2×3 נוהה עם המרחב האוקלידי $\mathbf{R}^6$ (ראו הערה 1.א.1).

הוכיחו שקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 2 היא קבוצה פתוחה, ושקבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 1 היא יריעה ממימד 4.

הערה: במעט יותר מאמץ אפשר להוכיח שאם $r = \min\{k, l\}$ אז קבוצת המטריצות $k \times l$ שדרגתן r היא קבוצה

פתוחה ושם $0 < r < \min\{k, l\}$ אז היא יריעה ממימד $kl - (k-r)(l-r)$.

פתרון

מרחב העמודות של מטריצה 2×3 הוא תת-מרחב לינארי של $\mathbf{R}^2$, ולכן דרגת מטריצה 2×3 אינה 2 אם ורק אם מימד מרחב עמודותיה לכל היותר 1.

מרחב העמודות של המטריצה $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ מכיל את מרחבי העמודות של כל אחת

מהמטריצות $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_4 & x_5 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} x_2 & x_3 \\ x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ ו- $\begin{pmatrix} x_1 & x_3 \\ x_4 & x_6 \end{pmatrix}$. לכן אם דרגת המטריצה $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$

אינה 2 אז שלוש המטריצות דלעיל סינגולריות. אם דרגת המטריצה $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ היא 2 אז

שתיים מעמודותיה בלתי-תלויות לינאריות, ולכן אחת משלוש המטריצות דלעיל רגולרית.

מסקנה מכך היא שדרגת המטריצה $\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix}$ אינה 2 אם ורק אם מתקיים $x_1x_5 - x_2x_4 = 0$

וגם $x_1x_6 - x_3x_4 = 0$ וגם $x_2x_6 - x_3x_5 = 0$. לכן לפי חלק ג של מסקנה 2.ד.2 וחלק ג של טענה

2.א.2 קבוצת המטריצות שדרגתן אינה 2 היא סגורה, ולפי אבחנה 2.ד.2 קבוצת המטריצות שדרגתן 2 פתוחה.

מטריצה שדרגתה 1, אחת משורותיה אינה שורת אפסים, ושאר שורותיה כפולות של אותה שורה.

מטריצה כזאת היא מהצורה $\begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$ עם $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ או מהצורה

$\begin{pmatrix} \lambda x & \lambda y & \lambda z \\ x & y & z \end{pmatrix}$ עם $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$. הקבוצה $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$ פתוחה ולכן לפי טענה 2.א.2

הקבוצה $\Omega = (\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}) \times \mathbf{R}$ היא קבוצה פתוחה ב- $\mathbf{R}^4$.

נגדיר פונקציה $h: \Omega \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$ על ידי: $(x, y, z, \lambda) \mapsto \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$

זאת בבירור פונקציה רציפה כי כל רכיביה פונקציות פולינומאליות.

נסמן ב- S את קבוצת המטריצות 2×3 שדרגתן 1, וב- U את קבוצת המטריצות ששורתן

הראשונה אינה שורת אפסים. הקבוצה U מזוהה עם הקבוצה $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\} \times \mathbf{R}^3$ ב- $\mathbf{R}^6$ והיא

פתוחה לפי טענה 2.א.29. ברור ש- $S \cap U \subseteq h(\Omega)$. מצד שני אם

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} \in S \cap U$$

אז $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ושתי השורות תלויות לינארית, ולכן השורה השניה היא כפולה של השורה הראשונה, כלומר יש $\lambda \in \mathbf{R}$ כך ש- $\lambda(x, y, z) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z) = (u, v, w)$ ולכן

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ u & v & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix} = h(x, y, z, \lambda) \in h(\Omega)$$

ואם כך גם $S \cap U = h(\Omega)$ ולכן $S \cap U \subseteq h(\Omega)$.

נראה ש- h היא הומאומורפיזם מ- Ω ל- $S \cap U$. אנו יודעים כבר שהיא רציפה, ושמתקיים

$$S \cap U = h(\Omega) \quad \text{נראה שהיא חד־חד־ערכית וההופכית } h^{-1} \text{ רציפה.}$$

$$\begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \mu u & \mu v & \mu w \end{pmatrix} \quad \text{אם } h(x, y, z, \lambda) = h(u, v, w, \mu)$$

$$\lambda(x, y, z) = \mu(u, v, w) = \mu(x, y, z) \quad \text{אז בבירור } x = u, y = v, z = w \text{ ולכן גם}$$

ומאחר ש- $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ נובע $\lambda = \mu$, ובזאת הוכח ש- h חד־חד־ערכית.

נותר להראות שההופכית $h^{-1}: S \cap U \rightarrow \Omega$ רציפה. לשם כך די להראות שבסביבה של כל נקודה ב- $h(\Omega)$ היא שווה לצמצום של פונקציה שרציפה בנקודה.

נתבונן בנקודה $h(u, v, w, \mu) \in \Omega$. אז $(u, v, w) \neq (0, 0, 0)$ ולכן $u \neq 0$ או $v \neq 0$ או $w \neq 0$

$$h(u, v, w, \mu) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \mu u & \mu v & \mu w \end{pmatrix} \quad \text{נטפל קודם באפשרות } u \neq 0 \text{ אז}$$

נמצא בקבוצת המטריצות V שמזוהה עם הקבוצה $(\mathbf{R} \setminus \{0\}) \times \mathbf{R}^5$ שהיא קבוצה פתוחה, ולכן

היא סביבה של $h(u, v, w, \mu)$.

$$g: \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1, x_2, x_3, \frac{x_4}{x_1} \end{pmatrix} \quad \text{נגדיר את הפונקציה } g: V \rightarrow \mathbf{R}^4 \text{ על ידי:}$$

זאת פונקציה רציפה כי כל רכיביה הם פולינומים או פונקציות רציונליות שמוגדרות בכל נקודה ב-

$$h(u, v, w, \mu) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \mu u & \mu v & \mu w \end{pmatrix} \quad V \text{ בפרט היא רציפה בנקודה:}$$

נראה שהצמצום של g ל- $S \cap U \cap V = S \cap V$ מתלכד עם הצמצום של h^{-1} לאותה קבוצה, ומכאן

$$h(u, v, w, \mu) = \begin{pmatrix} u & v & w \\ \mu u & \mu v & \mu w \end{pmatrix} \quad \text{ש-} h^{-1} \text{ גם היא רציפה בנקודה}$$

$$h(x, y, z, \lambda) = \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix} \quad \text{ובכן נקודה ב-} S \cap V \text{ היא מטריצה עם } x \neq 0 \text{ אז:}$$

$$g \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, y, z, \frac{\lambda x}{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x, y, z, \lambda \end{pmatrix} = h^{-1} \begin{pmatrix} x & y & z \\ \lambda x & \lambda y & \lambda z \end{pmatrix}$$

זה מסיים את הטיפול באפשרות $u \neq 0$. באפשרות $v \neq 0$ מטפלים באופן דומה עם הפונקציה

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto \left(x_1, x_2, x_3, \frac{x_5}{x_2} \right) \quad \text{שמוגדרת על ידי}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto \left(x_1, x_2, x_3, \frac{x_6}{x_3} \right) \quad \text{ובאפשרות } w \neq 0 \text{ עם הפונקציה:}$$

$$\varphi: M_{2 \times 3}(\mathbf{R}) \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbf{R}) \quad \text{עכשיו נתבונן בפונקציה}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_4 & x_5 & x_6 \\ x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \quad \text{שמוגדרת על ידי:}$$

זאת פונקציה לינארית הפיכה (היא ההופכית של עצמה). לכן בפרט היא וההופכית שלה רציפות.

לכן הפונקציה $\varphi \circ h: \Omega \rightarrow M_{2 \times 3}(\mathbf{R})$ היא הומאומורפיזם מ- Ω לקבוצה

$$\varphi \circ h(\Omega) = \varphi(h(\Omega)) = \varphi(S \cap U) = \varphi(S) \cap \varphi(U) = S \cap U'$$

כאשר $U' = \varphi(U)$ היא קבוצת המטריצות ששורתן השנייה אינה שורת אפסים הקבוצה U' היא

קבוצה פתוחה. מתקיים $\varphi(S) = S$ כי הפונקציה φ מעבירה מטריצה למטריצה בעלת אותה דרגה,

שכן היא רק מחליפה את סדר השורות, ואינה משנה את מרחב השורות של המטריצה, ולכן מעבירה

מטריצה שדרגתה 1 למטריצה שדרגתה 1. אז $S \cap U'$ היא טלאי 4-ממדי, וגם $S \cap U$ טלאי 4-ממדי,

וכן $S \subseteq U \cup U'$, ולפי הגדרה 7.2. היא יריעה 4-ממדית.