

האוניברסיטה הפתוחה

2024

חשבון אינפיניטסימלי 3

חוברת הקורס - אביב 2023

כתב: ד"ר עופר הדס

מרץ 2023 - סמסטר אביב - תשפ"ג

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	שלום וברכה - הנחיות כלליות
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	התנאים לקבלת נקודות זכות
1	ממ"ח 01
2	ממ"ן 11
4	ממ"ח 02
5	ממ"ן 12
7	ממ"ן 13
9	ממ"ן 14
11	ממ"ן 15

שלום וברכה,

חוברת זאת כוללת פרטים שיש להכיר, כדי לבצע את הנדרש ולסיים בהצלחה את לימוד הקורס חשבון אינפיניטסימלי 3. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.¹

עם קבלת חומר הלימוד בקורס יש להתחיל בלימוד עצמי, בקצב המותאם ללוח הזמנים שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד כל פרק כלול גם הזמן הנדרש לפתרון המטלה הקשורה אליו ולהגשתה. חשוב לתכנן לוח זמנים אישי שיאפשר את לימוד החומר ופתרון והגשת המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים וחשוב לעיין בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

לקורס **אתר אינטרנט**. חלק מהמטלות להגשה יש לפתור באתר הקורס באינטרנט ("מטלות אופל"). מטלות המנחה (הממ"נים) נמצאות בחוברת זאת (שעותק שלה נמצא גם באתר הקורס). באתר גם חומרי תרגול נוספים, כגון מטלות ובחינות משנים קודמות.

אתר הקורס מהווה ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטיות וסטודנטים אחרים בקורס. זה המקום המתאים להעלות בו לדיון כל רעיון או שאלה בנושאי הלימוד. **הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.**

צוות הקורס מעוניין לעזור לך בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, חשוב לא להסס ולפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותך דרכי ההתקשרות הבאות:

- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת oferh@openu.ac.il.
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ב' בין השעות 11:00–13:00.
- טלפון למנחה בשעת ההנחיה הטלפונית המפורטת יחד עם לוח המפגשים.
- פניה למנחה בדואר אלקטרוני.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.
- **שאלתא** – לפניויות בנושאים אקדמיים שונים כגון מועדי בחינה מעבר לטווח זכאות ועוד, אנא עשו שימוש מסודר במערכת הפניות דרך שאלתא (לחצו על הכפתור פניה חדשה ואחר כך לימודים אקדמיים > משימות אקדמיות, ובשדה פניות סטודנטים: השלמת בחינות בקורס. המערכת תומכת גם בבקשות מנהלה שונות ומגוונות).

נאחל לכולנו סמסטר מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

¹ פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס יש באתר שה"ם שכתובתו: <http://www.openu.ac.il/shoham> מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותך יש באתר הספרייה שכתובתו:

<http://www.openu.ac.il/Library>

לוח זמנים ופעילויות (2023 \ 2024)

מפגשי הנחיה *	מועדי משלוח המטלות	יחידת הלימוד המומלצת (כולל פתרון המטלות בנושא)	תאריכי שבוע הלימוד	שבוע לימוד
	01 מטלה 🖨 באתר הקורס עד 31.3.2023 11 ממ"ן ✉️ למנחה עד 31.3.2023	פרק 1	10.3.2023–5.3.2023	1
		פרק 2	17.3.2023–12.3.2023	2
			24.3.2023–19.3.2023	3
		פרק 3	31.3.2023–26.3.2023	4
	02 מטלה 🖨 באתר הקורס עד 28.4.2023 12 ממ"ן ✉️ למנחה עד 2.5.2023	פרק 4	7.4.2023–2.4.2023 (ד–ו פסח)	5
		פרק 5	14.4.2023–9.4.2023 (א–ד פסח)	6
		פרק 6		21.4.2023–16.4.2023 (ג יום הזכרון לשואה)
			פרק 7	28.4.2023–23.4.2023 (ג יום הזכרון, ד יום העצמאות)
	13 ממ"ן ✉️ למנחה עד 14.5.2023	פרק 8	5.5.2023–30.4.2023	9
			12.5.2023–7.5.2023 (ג ל"ג בעומר)	10
	14 ממ"ן ✉️ למנחה עד 2.6.2023	פרק 9	19.5.2023–14.5.2023	11
			26.5.2023–21.5.2023 (ו שבועות)	12
			2.6.2023–28.5.2023	13
	15 ממ"ן ✉️ למנחה עד 16.6.2023	פרק 10	9.6.2023–4.6.2023	14
			16.6.2023–11.6.2023	15

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

תנאים לקבלת נקודות זכות

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס הם :

(1) עליכם להגיש מטלות שמשקלן הכולל לפחות 15 נקודות.

(2) עליכם לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

(3) עליכם לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

**אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית
למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.**

מטלת אופל 01

סמסטר : 2023ב

הקורס : 2024 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

פרקים 1–3 : חומר הלימוד למטלה :

מועד אחרון להגשה : 31.3.2023

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס.

כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו את ההוראות בגוף המטלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 31.3.2023
 משקל המטלה: 5 נקודות
 סמסטר: 2023ב

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $\varepsilon > 0$ ותהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$. נסמן $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k \mid A \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon) \neq \emptyset\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A היא קבוצה פתוחה אז A_ε היא קבוצה פתוחה.

ב. אם A היא קבוצה סגורה אז A_ε היא קבוצה סגורה.

ג. אם A היא קבוצה קמורה אז A_ε היא קבוצה קמורה.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו $a, k \geq 2$, נקודה ב- $\mathbb{R}^k$, α מספר ממשי ו- $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbb{R}^k$. הוכיחו שאם $\{x \mid f(x) = \alpha\} = \{a\}$ אז תמונת הפונקציה f היא קרן או קטע שאחד מקצותיו הוא α .

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ שרציפה ב-0 ולכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ מקיימת: $f(x) = x_1 \cdots x_k \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|)$. יהי $a \in \mathbb{R}^k$. הוכיחו ש- f אינה גזירה ב- a אם ורק אם $k=1$ ו- $a=0$.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי k מספר טבעי ו- $a \in \mathbb{R}^k$. עבור $i=1, \dots, k$ נניח ש- f_i היא פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה בנקודה a , שמתקיים $f_i(a) = 0$, ושהגרדיאנטים $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_k(a)$ הם וקטורים בלתי תלויים לינאריים. הראו שיש סביבה נקובה של הנקודה a שבה הפונקציה החלקית המוגדרת על ידי

$$g: x \mapsto \frac{|x-a|^2}{\sum_{i=1}^k f_i(x)^2}$$

חסומה (ובפרט שהפונקציה g מוגדרת באותה סביבה נקובה של a).

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי A קבוצה פתוחה וקשורה מסילתית ב- $\mathbf{R}^k$. תהי $f: A \rightarrow \mathbf{R}^l$ פונקציה שגזירה ב- A ואינה פונקציה קבועה. נתון שלכל $a \in A$ הוקטור $f'(a)$ מאונך לכל עמודות מטריצת היעקוביאן Jf_a , ובמילים אחרות מתקיים $f'(a) \cdot Jf_a = 0$. הוכיחו שיש $r > 0$ כך שתמונת הפונקציה f מוכלת בספירה $S^{l-1}(0^{[l]}; r)$. (מומלץ להיעזר בפונקציה מדוגמה 3.א.5).

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת אופל 02

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
חומר הלימוד למטלה : פרקים 4–7
סמסטר : 2023
משקל המטלה : 2 נקודות
מועד אחרון להגשה : 28.4.2023

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס.

כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו את ההוראות בגוף המטלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–7
 מספר השאלות: 5
 סמסטר: 2023
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 2.5.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונגדיר פונקציה:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y \mapsto \int_a^b \max\{x, y\} \cdot f(x) dx$$

הוכיחו ש- g גזירה פעמיים ב- (a, b) ומתקיים $g''(t) = f(t)$ לכל $t \in (a, b)$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה ברציפות בנקודה $a \in \mathbb{R}^k$ וכך ש- $f(a) = 0$.

תהי g הפונקציה המוגדרת על ידי $x \mapsto f(x)^2$.

הוכיחו ש- g גזירה פעמיים בנקודה a ושמתקיים $Hg_a = 2\nabla f(a)^T \nabla f(a)$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה פעמיים ברציפות בנקודה a , שהיא נקודה קריטית

של f . הוכיחו שאם מטריצת ההסיאן Hf_a הפיכה אז יש סביבה של a שבה אין אף נקודה

קריטית של f . פרט לנקודה a עצמה. (רמז: מה אומרים הנתונים על הפונקציה $x \mapsto \nabla f(x)$?)

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $a \in \mathbb{R}^k$ עם $k \geq 3$. תהיינה S_1 ו- S_2 יריעות חלקות ב- $\mathbb{R}^k$, שממדיהן d_1 ו- d_2 , בהתאמה.

א. הוכיחו שאם $d_1 = d_2 = k - 1$ ו- $S_1 \cap S_2 = \{a\}$ אז $T_a(S_1) = T_a(S_2)$.

ב. הראו על ידי דוגמה, שעבור $k = 5$ ו- $d_1 = d_2 = 3$ יתכן $S_1 \cap S_2 = \{a\}$ וגם $T_a(S_1) \neq T_a(S_2)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו את כל נקודות הקיצון וערכי הקיצון של הפונקציה

$$f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in (0, \infty)^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 2 \end{array} \right\}$$

בקבוצה:

שימו לב: אם אין מינימום או מקסימום עליכם להוכיח שאין. אם יש עליכם להוכיח שיש, ולמצוא אותם במפורש.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2023
 חומר הלימוד למטלה: פרק 8
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 14.5.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ מסילה שאורכה סופי, ונניח שלכל $t \in [\alpha, \beta]$ המטריצה $\varphi(t)$ הפיכה. הוכיחו או הפריכו: הפונקציה $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ שלכל $t \in [\alpha, \beta]$ מתאימה את המטריצה ההפוכה $\psi(t) = \varphi(t)^{-1}$ היא מסילה שאורכה סופי. (אנו מזהים בין $M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$ ל- $\mathbb{R}^4$ כפי שמוסבר בהערה 1.א.1 בספר).

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ מסילה שאורכה סופי. תהי $\Lambda: (\alpha, \beta) \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת כך: $t \mapsto L(\varphi|_{[\alpha, t]})$ וכן $\Lambda(\alpha) = 0$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם Λ גזירה ברציפות ב- $[\alpha, \beta]$ אז φ גזירה ברציפות ב- $[\alpha, \beta]$.

ב. אם φ גזירה ברציפות ב- $[\alpha, \beta]$ אז Λ גזירה ברציפות ב- $[\alpha, \beta]$.

שאלה 3 (20 נקודות)

קבעו עבור אילו ערכים של α יש לולאה שאורכה סופי, שמספר הליפוף שלה סביב ראשית הצירים אינו 0 ושתמונתה מוכלת בקבוצה:

$$\{(x, y) \mid x^4 + y^4 > 17, y - 8x > \alpha\}$$

מומלץ לצייר איור של הקבוצה עם ערכים שונים של הפרמטר, ולחשוב על ערכי הביטוי $y - 8x$ כאשר $x^4 + y^4 \leq 17$. הקפידו לנמק היטב את טיעוניכם ובפרט לרשום הוכחות מלאות ומדוייקות המבוססות על הגדרות וטענות המוכחות בספרי הלימוד.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נתונה מסילה: $\gamma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$t \mapsto (\cos t, \tan t)$$

חשבו את האינטגרל המסילתי:

$$\int_{\gamma} x f(x^2 - y^2) dx - y f(x^2 - y^2) dy$$

שאלה 5 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל המסילתי

$$\int_{\varphi} \frac{2y}{3x^2 + 4y^2} dx - \frac{2x}{3x^2 + 4y^2} dy$$

$$t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$$

כאשר המסילה $\varphi: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ נתונה על ידי:

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3 סמסטר: 2023

חומר הלימוד למטלה: פרק 9 משקל המטלה: 6 נקודות

מספר השאלות: 5 מועד אחרון להגשה: 2.6.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הפונקציה החלקית f מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $(x, y) \mapsto x^{\lfloor \frac{\ln y}{\ln x} \rfloor}$.

הוכיחו ש- f אינטגרלית בקבוצה $A = (0, 1) \times (0, 1)$ ושמתקיים: $\iint_A f(x, y) dx dy = \ln 2$

$\lfloor z \rfloor$ הוא הערך השלם של z , דהיינו $\lfloor z \rfloor$ הוא המספר השלם היחיד המקיים $\lfloor z \rfloor \leq z < \lfloor z \rfloor + 1$.

תוכלו להיעזר בנוסחה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ (דוגמה 6.24 בקורס חשבון אינפיניטסימלי 2).

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

הוכיחו את השוויון: $\int_{\Delta_k(\alpha)} f(x_1 + \dots + x_k) dx_1 \dots dx_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\alpha f(t) t^{k-1} dt$

הערה: נפח הסימפלקס $\Delta_k(\alpha) = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k \leq \alpha\}$ מחושב בספר בשאלה 32.1.9.

רשות, ולא להגשה: הוכיחו את השוויון גם עבור f אינטגרלית שאינה רציפה.

שאלה 3 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל $\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ בקבוצה $D = B((0, 0, 0); 1) \setminus B((0, 0, 1); 1)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי K סביבה של $0^{[k]}$ שהיא קבוצה סגורה וחסומה ובעלת נפח k -ממדי. נניח ש- $k = 3$.

תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, הומוגנית חיובית ממעלה α , שהיא גם חיובית, כלומר

$f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$. הראו ש- f אינטגרלית בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ אם ורק אם $\alpha \geq 0$,

ושהאינטגרל המוכלל של f בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ מתכנס אם ורק אם $-k < \alpha < 0$.

הערה: הטענה נכונה לכל מספר טבעי k , וניתן לפתור אותה בכלים מפרק 9. ל- $k > 3$ נוח להיעזר בכלי מפרק 10.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי φ לולאה פשוטה שתמונתה $\{(x, y) \in [0, \infty)^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = 2xy\}$, שמקיפה קבוצה סגורה

וחסומה השוכנת לשמאלה של φ . בעזרת משפט גרין הראו ש: $\int_{\varphi} (10x^2y^3 + 3y^5)dx - 3x^5dy = -\frac{5}{3}$

הצעה: בשלב כלשהו כדאי להשתמש בשיעורים קוטביים.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2023
 חומר הלימוד למטלה: פרק 10
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 16.6.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $S = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2)(z^4 + 1) = 1\}$ היא משטח חלק, ושהיא קבוצה בעלת שטח מוכלל. (אינכם נדרשים לחשב את השטח שלה).

שאלה 2 (20 נקודות)

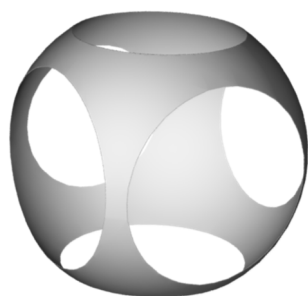
א. תהי $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ שגזירה פעמיים בנקודה a . הוכיחו ש- $\nabla \cdot \nabla f(a) = \text{tr } Hf(a)$.
 ב. יהי $k \geq 2$. יהי n מספר טבעי אי-זוגי. תהי $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה הרמונית ב- $\mathbf{R}^k$, דהיינו גזירה פעמיים ברציפות ומתקיים $\text{tr } Hf(a) = 0$ לכל $a \in \mathbf{R}^k$.
 הוכיחו שהקבוצה $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k \mid (x_1^n, \dots, x_k^n) \cdot \nabla f(x_1, \dots, x_k) = 0\}$ אינה חסומה.
 עצה: היעזרו בקבוצה $\{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1^{n+1} + \dots + x_k^{n+1} \leq C\}$ עם קבוע כלשהו C ובמשפט הדיברגנץ.

שאלה 3 (20 נקודות)

בשאלה זאת תחשבו בשתי דרכים את האינטגרל המשטחי $\iint_S (x, y, z) \cdot (\nabla \times F) d\sigma_2$,
 כאשר $S = S^2(0^{[3]}; r) \cap [0, \infty)^3$, $r > 0$, ו- $F: (x, y, z) \mapsto (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$.
 א. בעזרת משפט סטוקס-קלויין.
 ב. בעזרת משפט הדיברגנץ עם הקבוצה $K = \bar{B}^3(0^{[3]}; r) \cap [0, \infty)^3$.

שאלה 4 (20 נקודות)

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $F: (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$ דרך החלק של שפת הכדור ברדיוס 5 סביב ראשית הצירים שבתוך הקובייה $[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-4, 4]$ כלפי חוץ,



כלומר את האינטגרל המשטחי $\iint_S F \cdot N d\sigma_2$

כאשר $S = [-4, 4]^3 \cap S^2(0^{[3]}; 5)$

ו- N הוא נורמל יחידה רציף שפונה החוצה מהכדור $B^3(0^{[3]}; 5)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתונה מטריצה הפיכה $A \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$ והפונקציה האפינית:
 $F: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$
 $x \mapsto xA^T$

נתון מספר חיובי ε והקבוצה:
 $S = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \mid \|xA^T\| = \varepsilon \right\}$

חשבו את האינטגרל $\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1}$ כאשר N הוא נורמל היחידה הרציף למשטח על S שפונה

החוצה מהקבוצה:
 $K = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \mid \|xA^T\| \leq \varepsilon \right\}$

▶▶▶ סוף המטלה