

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2023
 חומר הלימוד למטלה: פרק 10
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 16.6.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $S = \{(x, y, z) \mid (x^2 + y^2)(z^4 + 1) = 1\}$ היא משטח חלק, ושהיא קבוצה בעלת שטח מוכלל. (אינכם נדרשים לחשב את השטח שלה).

שאלה 2 (20 נקודות)

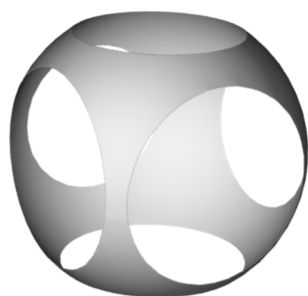
א. תהי $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ שגזירה פעמיים בנקודה a . הוכיחו ש- $\nabla \cdot \nabla f(a) = \text{tr } Hf(a)$.
 ב. יהי $k \geq 2$. יהי n מספר טבעי אי-זוגי. תהי $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה הרמונית ב- $\mathbf{R}^k$, דהיינו גזירה פעמיים ברציפות ומתקיים $\text{tr } Hf(a) = 0$ לכל $a \in \mathbf{R}^k$.
 הוכיחו שהקבוצה $\{(x_1, \dots, x_k) \in \mathbf{R}^k \mid (x_1^n, \dots, x_k^n) \cdot \nabla f(x_1, \dots, x_k) = 0\}$ אינה חסומה.
 עצה: היעזרו בקבוצה $\{(x_1, \dots, x_k) \mid x_1^{n+1} + \dots + x_k^{n+1} \leq C\}$ עם קבוע כלשהו C ובמשפט הדיברגנץ.

שאלה 3 (20 נקודות)

בשאלה זאת תחשבו בשתי דרכים את האינטגרל המשטחי $\iint_S (x, y, z) \cdot (\nabla \times F) d\sigma_2$,
 כאשר $S = S^2(0^{[3]}; r) \cap [0, \infty)^3$, $r > 0$, ו- $F: (x, y, z) \mapsto (y^2 - z^2, z^2 - x^2, x^2 - y^2)$.
 א. בעזרת משפט סטוקס-קלויין.
 ב. בעזרת משפט הדיברגנץ עם הקבוצה $K = \bar{B}^3(0^{[3]}; r) \cap [0, \infty)^3$.

שאלה 4 (20 נקודות)

חשבו את השטף של השדה הוקטורי $F: (x, y, z) \mapsto (x^3, y^3, z^3)$ דרך החלק של שפת הכדור ברדיוס 5 סביב ראשית הצירים שבתוך הקובייה $[-4, 4] \times [-4, 4] \times [-4, 4]$ כלפי חוץ,



כלומר את האינטגרל המשטחי $\iint_S F \cdot N d\sigma_2$

כאשר $S = [-4, 4]^3 \times S^2(0^{[3]}; 5)$

ו- N הוא נורמל יחידה רציף שפונה החוצה מהכדור $B^3(0^{[3]}; 5)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

נתונה מטריצה הפיכה $A \in M_{k \times k}(\mathbf{R})$ והפונקציה האפינית:
 $F: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$
 $x \mapsto xA^T$

נתון מספר חיובי ε והקבוצה:

$$S = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \mid \|xA^T\| = \varepsilon \right\}$$

חשבו את האינטגרל $\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1}$ כאשר N הוא נורמל היחידה הרציף למשטח על S שפונה

החוצה מהקבוצה:

$$K = \left\{ x \in \mathbf{R}^k \mid \|xA^T\| \leq \varepsilon \right\}$$

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2022\ב\936.

אחת הדרכים לראות שהקבוצה היא משטח חלק היא לפי מסקנה 13.ג.7 עם הפונקציה:

$$f: (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2)(z^4 + 1)$$

הקבוצה היא גוף סיבוב סביב ציר z ואת זה שהיא משטח חלק אפשר להסיק גם בעזרת טענה 9.ג.10, שממילא נעזר בה.

נגדיר $K_n = S \cap (\mathbf{R}^2 \times [-n, n])$. זאת סדרת קבוצות שעולה לקבוצה

לפי שאלה 10 ב.28 די שנראה שהסדרה $\sigma_2(K_n)$ חסומה, וכיוון שהיא אישלילית די

להראות שהיא חסומה מלעיל. את הקבוצה S נוכל להציג בצורה:

$$S = \left\{ (r \cos \theta, r \sin \theta, t) \mid r^2(1 + t^4) = 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\} \\ = \left\{ \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{t^4 + 1}}, \frac{\sin \theta}{\sqrt{t^4 + 1}}, t \right) \mid t \in \mathbf{R}, 0 \leq \theta \leq 2\pi \right\}$$

ולכן עם המסילה $\varphi: [-n, n] \rightarrow (0, \infty) \times \mathbf{R}$

$$t \mapsto \left(\frac{1}{\sqrt{t^4 + 1}}, t \right)$$

נקבל $K_n = \left\{ ([\varphi]_1 \cos(t), [\varphi]_1(t) \sin t, [\varphi]_2(t)) \mid 0 \leq \theta \leq 2\pi, -n \leq t \leq n \right\}$

ומחלק א של טענה 9.ג.10:

$$\begin{aligned}
\sigma_2(K_n) &= 2\pi \int_{-n}^n [\varphi]_1(t) |\dot{\varphi}(t)| dt = 2\pi \int_{-n}^n \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \sqrt{\left(-\frac{2t^3}{(t^4+1)^{\frac{3}{2}}}\right)^2 + 1} dt \\
&= 2\pi \int_{-n}^n \frac{1}{\sqrt{t^4+1}} \sqrt{\frac{4t^6}{(t^4+1)^3} + 1} dt = 2\pi \int_{-n}^n \frac{\sqrt{4t^6 + (t^4+1)^3}}{(t^4+1)^2} dt \\
&= 4\pi \int_0^n \frac{\sqrt{4t^6 + (t^4+1)^3}}{(t^4+1)^2} dt \\
&= 4\pi \int_0^1 \frac{\sqrt{4t^6 + (t^4+1)^3}}{(t^4+1)^2} dt + 4\pi \int_1^n \frac{\sqrt{4t^6 + (t^4+1)^3}}{(t^4+1)^2} dt \\
&\leq 4\pi \sqrt{4 + (1+1)^3} + 4\pi \int_1^n \frac{\sqrt{4t^6 + (2t^4)^3}}{(t^4)^2} dt \\
&= 16\pi\sqrt{3} + 4\pi \int_1^n \frac{\sqrt{4t^6 + 8t^{12}}}{t^8} dt \leq 16\pi\sqrt{3} + 4\pi \int_1^n \frac{\sqrt{16t^{12}}}{t^8} dt \\
&= 16\pi\sqrt{3} + 16\pi \int_1^n t^{-2} dt = 16\pi\sqrt{3} + 16\pi(-n^{-1} + 1) \leq 48\pi
\end{aligned}$$

ובזאת הראינו שהסדרה חסומה, וסיימנו (לאו דוקא על ידי חסם אופטימלי).

לשאלה 2: סעיף א הוא מעין רמז.

סעיף ב הוא 2020\2015 עם n איזוגי כללי. ניתנה גם בממ"ן ב-2019 בסימונים של

הקורס הישן ובמימד 3:

על-פי שאלה ממבחן של לב בוחבסקי מאוני' ת"א (יולי 2018, עם 2019 במקום 3).
אם מניחים בשלילה שהקבוצה חסומה אז אפשר לבחור תחום כמו בהדרכה שהקבוצה מוכלת בפנימו. נסמן $v(x, y, z) = x^{2020} + y^{2020} + z^{2020}$. אז על שפת התחום מתקיים $\nabla u \cdot \nabla v \neq 0$. מזה מקבלים ש- $\nabla u \cdot \mathbf{n} \neq 0$ על שפת התחום ולכן בה"כ $\nabla u \cdot \mathbf{n} > 0$ (כי השפה קשירה). ואז ממשפט גאוס $\iiint \Delta u = 0 = \iiint \nabla \cdot \nabla u = \iint \nabla u \cdot \mathbf{n} d\mu > 0$ וזאת סתירה.

לשאלה 3: מבוסס על 2018\2017=2017\6\90=2003\6\98.

בעזרת משפט סטוקס והמסילה מורכבת משלוש קשתות מעגל על מישורי הצירים.
בעזרת משפט הדיברגנץ $\nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$ ממירים בחישוב האינטגרל המשטחי על שלושה רבעי עיגול על מישורי הצירים (ואז קואורדינטות קטביות).

לשאלה 4: 2019\3\17.

לשאלה 5: הפונקציה F היא פונקציה אפינית הפיכה. נסמן את ההופכית שלה ב- φ .

$$K = \{x \in \mathbf{R}^k \mid |F(x)| \leq \varepsilon\} = F^{-1}(\bar{B}^k(0; \varepsilon)) = \varphi(\bar{B}^k(0; \varepsilon)) \quad \text{רואים ש-}$$

$$S = \{x \in \mathbf{R}^k \mid |F(x)| = \varepsilon\} = F^{-1}(S^{k-1}(0; \varepsilon)) = \varphi(S^{k-1}(0; \varepsilon)) \quad \text{ו-}$$

מהידע שלנו על כדורים ושפותיהם, ועל כך שפונקציות אפיניות הפיכות הן

הומאומורפיזמים, נוכל מיד להסיק ש- S היא משטח על חלק ו- $S = \partial K = \partial(K \setminus \partial K)$,

$$\int_S F \cdot N d\sigma_{k-1} = \int_K \nabla \cdot F \quad \text{ולכן: (12.10.12)} \quad \text{וכן שמתקיימים כל תנאי משפט הדיברגנץ (12.10.12) ולכן:}$$

לחישוב האינטגרל הימני נוכל להשתמש בהחלפת משתנים. אפשר ראשית:

$$\nabla \cdot F = \operatorname{tr} JF = \operatorname{tr} A$$

$$\det JF = \det A \Rightarrow \det J\varphi = \det(Jf)^{-1} = \frac{1}{\det A} \quad \text{כמוכן:}$$

ועכשיו, בעזרת משפט 23.9.2 (החלפת משתנים באינטגרל) ודוגמה 31.9.1 (נפח כדור):

$$\int_K \nabla \cdot F = \int_{\varphi^{-1}(K)} ((\nabla \cdot F) \circ \varphi) |\det J\varphi| = \frac{\operatorname{tr} A}{\det A} \operatorname{vol}_k(\bar{B}^k(0; \varepsilon)) = \frac{\operatorname{tr} A}{\det A} \cdot \frac{\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2} + 1)} \cdot \varepsilon^k$$

לשאלה 6:

לשאלה 7: