

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2023
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 משקל המטלה: 6 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 2.6.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

הפונקציה החלקית f מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $(x, y) \mapsto x^{\lfloor \frac{\ln y}{\ln x} \rfloor}$.
 הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקבוצה $A = (0, 1) \times (0, 1)$ ושמתקיים:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \ln 2$$

 $\lfloor z \rfloor$ הוא הערך השלם של z , דהיינו $\lfloor z \rfloor$ הוא המספר השלם היחיד המקיים $\lfloor z \rfloor \leq z < \lfloor z \rfloor + 1$.
 תוכלו להיעזר בנוסחה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ (דוגמה 6.24 בקורס חשבון אינפיניטסימלי 2).

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
 הוכיחו את השוויון:

$$\int_{\Delta_k(\alpha)} f(x_1 + \dots + x_k) dx_1 \dots dx_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\alpha f(t) t^{k-1} dt$$

 הערה: נפח הסימפלקס $\Delta_k(\alpha) = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k \leq \alpha\}$ מחושב בספר בשאלה 32.1.9.
 רשות, ולא להגשה: הוכיחו את השוויון גם עבור f אינטגרבילית שאינה רציפה.

שאלה 3 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל $\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ בקבוצה $D = B((0, 0, 0); 1) \setminus B((0, 0, 1); 1)$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי K סביבה של $0^{[k]}$ שהיא קבוצה סגורה וחסומה ובעלת נפח k -ממדי. נניח ש- $k = 3$.
 תהי $f: \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, הומוגנית חיובית ממעלה α , שהיא גם חיובית, כלומר $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$. הראו ש- f אינטגרבילית בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ אם ורק אם $\alpha \geq 0$, ושהאינטגרל המוכלל של f בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ מתכנס אם ורק אם $-k < \alpha < 0$.
 הערה: הטענה נכונה לכל מספר טבעי k , וניתן לפתור אותה בכלים מפרק 9. ל- $k > 3$ נוח להיעזר בכלי מפרק 10.

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי φ לולאה פשוטה שתמונתה $\{(x, y) \in [0, \infty)^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = 2xy\}$, שמקיפה קבוצה סגורה

וחסומה השוכנת לשמאלה של φ . בעזרת משפט גרין הראו ש: $\int_{\varphi} (10x^2y^3 + 3y^5)dx - 3x^5dy = -\frac{5}{3}$

הצעה: בשלב כלשהו כדאי להשתמש בשיעורים קוטביים.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2014\15\4. מתקיים $\lfloor \log_x y \rfloor = \left\lfloor \frac{\ln y}{\ln x} \right\rfloor = n$ אם ורק אם $x^n < y \leq x^{n+1}$. מכאן אפשר

לקבל שבכל נקודה שאינה על אחד הגרפים $y = x^n$ הפונקציה f רציפה, ומכאן שקבוצת נקודות האירציונות שלה מוכלת באיחוד בן מניה של הגרפים האלה שהם קבוצות צנומות, ולכן האיחוד קבוצה צנומה, וממשפט לבג f אינטגרלית ב- A . לחישוב אפשר לבדוק עבור $A_n = \{(x, y) \in A \mid y > x^n\}$ שזאת סדרה שעולה לקבוצה A ושהאינטגרל על A_n הוא סכום חלקי של הטור מהרמו. את האינטגרל על $A_n \setminus A_{n-1}$ מקבלים משימוש פשוט במשפט פוביני.

לשאלה 2: 2022\23\5. בבחינה אפשר היה להשתמש בנוסחת Coarea. מי שעדיין לא למד אותה לא יכול להשתמש בממ"ן אבל יכול די בקלות לחשב את הנדרש תוך שימוש במשפט פוביני ואיזושהי החלפת משתנים. הפונקציה האפינית ההפיכה

$$\varphi: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha - x_1 - \dots - x_k)$$

מעתיקה את $\Delta_k(\alpha)$ על עצמו, ו- $\det J\varphi = -1$. אז מנוסחת החלפת משתנים מקבלים:

$$\int_{\Delta_k(\alpha)} f(x_1 + \dots + x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_{\Delta_k(\alpha)} f(\alpha - x_k) dx_1 \dots dx_k$$

עכשיו אפשר לקבל מאחת ממסקנות משפט פוביני:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k(\alpha)} f(\alpha - x_k) dx_1 \dots dx_k &= \int_0^\alpha f(\alpha - x_k) \left(\int_{\Delta_{k-1}(\alpha - x_k)} 1 dx_1 \dots dx_{k-1} \right) dx_k \\ &= \int_0^\alpha f(\alpha - x_k) \text{vol}_{k-1}(\Delta_{k-1}(\alpha - x_k)) dx_k \\ &= \int_0^\alpha f(t) \text{vol}_{k-1}(\Delta_{k-1}(t)) dx_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\alpha f(t) t^{k-1} dx_k \end{aligned}$$

כאשר במעבר בין השורה השניה והשלישית יש החלפת משתנה $t = \alpha - x_k$, ובסוף

שימוש בנוסחת נפח הסימפלקס משאלה 32.1.9.

פתרון בעזרת נוסחת coarea: ניקח $q(x) = x_1 + \dots + x_k$.

$$K_{q,t} = \left\{ x \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k = t \right\} \quad \text{אז } |\nabla q| = \sqrt{k} \text{ וכן}$$

ואם $F(\alpha)$ הוא אגף שמאל, אז:

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \left(\int_{K_{q,t}} \frac{1}{\sqrt{k}} f(t) d\sigma_{k-1} \right) dt = \int_0^\alpha \left(f(t) \frac{1}{\sqrt{k}} \sigma_{k-1}(K_{q,t}) \right) dt$$

ונותר למצוא את $\sigma_{k-1}(K_{q,t})$. יש מגוון דרכים פשוטות לעשות זאת, ואפשר גם כך:

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \left(\sigma_{k-1}(K_{q,t}) \right) dt \quad \text{עבור הפונקציה הקבועה } f(t) = \sqrt{k} \text{ נקבל:}$$

$$F'(\alpha) = \sigma_{k-1}(K_{q,\alpha}) \quad \text{לכן:}$$

$$F(\alpha) = \int_{\Delta_k(\alpha)} \sqrt{k} dx_1 \dots dx_k = \sqrt{k} \text{vol}_k(\Delta_k(\alpha)) \quad \text{מצד שני עבור הפונקציה הזאת}$$

$$F(\alpha) = \sqrt{k} \frac{1}{k!} \alpha^k \quad \text{ולפי שאלה 32.1.9}$$

$$F'(\alpha) = \sqrt{k} \frac{1}{k!} k \alpha^{k-1} = \sqrt{k} \frac{1}{(k-1)!} \alpha^{k-1} \quad \text{ולכן}$$

$$\sigma_{k-1}(K_{q,\alpha}) = \sqrt{k} \frac{1}{(k-1)!} \alpha^{k-1} \quad \text{ומצאנו שלכל } \alpha \text{ מתקיים:}$$

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \left(f(t) \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{k} \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} \right) dt = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\alpha f(t) t^{k-1} dt \quad \text{ובחזרה ל- } f \text{ כללית נקבל:}$$

לשאלה 3: 2019\6\85. מעבר לקואורדינטות כדוריות (טענה 42.1.9).

לשאלה 4: 2022\184. לפי משפט ווירשטראס f בעלת מינימום ומקסימום בספירת היחידה,

ולכן יש $0 < \beta \leq \gamma$ כאלה ש- $\beta \leq f(x) \leq \gamma$ אם $|x| = 1$. מהנתון על ההומוגניות מקבלים

שלכל $x \neq 0$ מתקיים $\beta |x|^\alpha \leq f(x) \leq \gamma |x|^\alpha$. עכשיו רואים שאם $\alpha \geq 0$ אז

חסומה ב- $K \setminus \{0^{[k]}\}$, והיא גם רציפה שם ולכן אינטגרלית. לכן נוכל בהמשך להניח ש-

$\alpha < 0$. בהנחה זאת רואים ש- f אינה חסומה בסביבת 0, ולכן אינה חסומה ב-

$K \setminus \{0^{[k]}\}$, ולכן עלינו להראות שהאינטגרל מתכנס אם $\alpha > -k$ ומתבדר אם $\alpha \leq -k$.

נבחר למשל את סדרת הקבוצות $A_n = K \setminus B(0^{[k]}; \frac{1}{n})$. זאת סדרה של קבוצות סגורות,

חסומות ובעלות נפח שעולה לקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$. אם האינטגרל שלנו מתכנס אז

הסדרה $\left(\int_{A_n} f \right)_{n=1}^\infty$ מתכנסת אליו ובפרט היא חסומה, ולהיפך, לפי מסקנה 7.ח.9, אם

היא חסומה האינטגרל מתכנס. אם כך, די להראות (עבור $\alpha < 0$) שסדרה זאת חסומה

אם ורק אם מתקיים $\alpha > -k$. מאחר ש- K היא סביבה חסומה של $0^{[k]}$ הרי יש

$0 < r \leq R$ כך ש- $\bar{B}(0^{[k]}; r) \subseteq K \subseteq B(0^{[k]}; R)$ ולכן:

$$\beta \int_{\bar{B}(0^{[k]}; r) \setminus B(0^{[k]}; \frac{1}{n})} |x|^\alpha \leq \beta \int_{A_n} f \leq \gamma \int_{A_n} |x|^\alpha \leq \gamma \int_{\bar{B}(0^{[k]}; R) \setminus B(0^{[k]}; \frac{1}{n})} |x|^\alpha$$

את האינטגרלים מימין ומשמאל נוכל לחשב בעזרת נוסחת coarea לפיה:

$$\begin{aligned} \int_{\bar{B}(0^{[k]};r) \setminus B(0^{[k]};\frac{1}{n})} |x|^\alpha &= \int_{\frac{1}{n}}^r \left(\int_{S^{k-1}(0^{[k]};t)} t^\alpha d\sigma_{k-1} \right) dt = \int_{\frac{1}{n}}^r \left(\int_{S^{k-1}(0^{[k]};t)} 1 d\sigma_{k-1} \right) t^\alpha dt \\ &= \int_{\frac{1}{n}}^r \left(\sigma_{k-1} \left(S^{k-1}(0^{[k]};t) \right) \right) t^\alpha dt = \sigma_{k-1} \left(S^{k-1}(0^{[k]};1) \right) \int_{\frac{1}{n}}^r t^{\alpha+k-1} dt \end{aligned}$$

$$\int_{\frac{1}{n}}^\rho t^{\alpha+k-1} dt = \int_{\frac{1}{n}}^\rho t^{-1} dt = \ln \rho - \ln \frac{1}{n} = \ln \rho + \ln n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{אם } \alpha = -k \text{ אז}$$

ולכן במקרה זה הסדרה לא חסומה. אחרת

$$\int_{\frac{1}{n}}^r t^{\alpha+k-1} dt = \frac{\rho^{\alpha+k} - n^{-\alpha-k}}{\alpha+k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \begin{cases} \frac{\rho^{\alpha+k}}{\alpha+k} & \alpha > -k \\ \infty & \alpha < -k \end{cases}$$

ובהצבה של $\rho = R$ או $\rho = r$, ויחד עם האישויונות לעיל, נקבל שהסדרה חסומה אם ורק אם $\alpha > -k$.

במקום חישוב האינטגרל לעיל בעזרת נוסחת Coarea אפשר גם להשתמש בהחלפת משתנים לשיעורים קוטביים, וזה נוח במיוחד במקרים $k=2$ ו- $k=3$ שלהם הספר מספק נוסחה מוכנה (במקרה $k=1$ קל לחשב את האינטגרל ישירות).

$$\begin{aligned} \int_{\bar{B}^3(0^{[3]};\gamma) \setminus B(0^{[3]};\beta)} |x|^\alpha &= \int_{[\beta,\gamma] \times [0,2\pi] \times [0,\pi]} r^\alpha r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\ &= \int_{\beta}^{\gamma} r^{\alpha+2} dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \phi d\phi = 4\pi \int_{\beta}^{\gamma} r^{\alpha+2} dr \end{aligned} \quad \text{ובכן:}$$

$$\int_{\beta}^{\gamma} r^{\alpha+2} dr = \int_{\beta}^{\gamma} \frac{dr}{r} = \ln \gamma - \ln \beta \xrightarrow{\beta \rightarrow 0^+} \infty \quad \text{וכאן עבור } \alpha = -3 \text{ מקבלים:}$$

$$\int_{\beta}^{\gamma} r^{\alpha+2} dr = \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_{\beta}^{\gamma} = \frac{\gamma^{\alpha+3} - \beta^{\alpha+3}}{\alpha+3} \quad \text{ועבור } \alpha \neq -3:$$

$$\int_{\beta}^{\gamma} r^{\alpha+2} dr \xrightarrow{\beta \rightarrow 0^+} \infty \quad \text{ולכן אם } \alpha < -3 \text{ אז}$$

$$\int_{\beta}^{\gamma} r^{\alpha+2} dr \xrightarrow{\beta \rightarrow 0^+} \frac{\gamma^{\alpha+3}}{\alpha+3} \quad \text{ואם } \alpha > -3 \text{ אז}$$

ולכן במקרה האחרון האינטגרל הנתון מתכנס, ובשאר המקרים הוא מתבדר.

שאלה 5: על-פי 2014ב\16.5.

הקו הנתון הוא $r^2 = \sin 2\theta$ ולכן התחום לאינטגרל הכפול הוא $0 \leq r \leq \sqrt{\sin 2\theta}$.

מקבלים $Q_x - P_y = -15(x^2 + y^2)^2$ ולכן האינטגרל הכפול הוא $-15 \iint r^5 dr d\theta$ ומזה

$$-\frac{5}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta d\theta \quad \text{(דומה ל-2009ב-90 שאלה ב2: אותו קו, שדה וקטורי שונה.)}$$

לשאלה 6:

לשאלה 7: