

מתווה לפתרון ממ"ן 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2023
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 משקל המטלה: 6 נקודות

לרוב השאלות כמה וכמה דרכי פתרון.
 מובאת כאן בדרך כלל דרך אחת, שאינה בהכרח הדרך הטובה ביותר.
 לא כל המעברים והחישובים מפורטים. השלימו את הפרטים היכן שחסר.

שאלה 1 (20 נקודות)

הפונקציה החלקית f מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $(x, y) \mapsto x^{\lfloor \frac{\ln y}{\ln x} \rfloor}$.
 הוכיחו ש- f אינטגרבילית בקבוצה $A = (0, 1) \times (0, 1)$ ושמתקיים:

$$\iint_A f(x, y) dx dy = \ln 2$$

 $\lfloor z \rfloor$ הוא הערך השלם של z , דהיינו $\lfloor z \rfloor$ הוא המספר השלם היחיד המקיים $\lfloor z \rfloor \leq z < \lfloor z \rfloor + 1$.
 תוכלו להיעזר בנוסחה $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln 2$ (דוגמה 6.24 בקורס חשבון אינפיניטסימלי 2).

פתרון

אם $(x, y) \in A$ אז $0 < x < 1$ ולכן $\ln x < 0$ ובדומה $\ln y < 0$ ולכן $\frac{\ln y}{\ln x} > 0$ ולכן $\lfloor \frac{\ln y}{\ln x} \rfloor$ הוא מספר שלם אי-שלילי. לכל מספר שלם n מתקיים $\lfloor \log_x y \rfloor = \lfloor \frac{\ln y}{\ln x} \rfloor = n$ אם ורק אם $n \leq \log_x y < n+1$.
 וזה שקול ל- $x^n \leq x^{\log_x y} < x^{n+1}$ כלומר $x^{n+1} < y \leq x^n$ (הפונקציה $t \mapsto x^t$ יורדת כי $0 < x < 1$).
 נסמן:

$$A_n = \left\{ (x, y) \in A \mid x^{n+1} < y \leq x^n \right\}$$

 אלה בבירור קבוצות זרות זו לזו ולפי האמור לעיל מתקיים:

$$A = \bigcup_{n=0}^{\infty} A_n$$

 אם $(x, y) \in A$ אז יש שלם אי-שלילי n כך ש- $(x, y) \in A_n$, ולכן $0 < f(x, y) = x^n \leq 1$, ואם כן f פונקציה חסומה בקבוצה A ובכל אחת מהקבוצות A_n .
 לפי שאלה 19.ד.9 הקבוצה A_n חסומה ובעלת שטח. כמוכן מתקיים $f(x, y) = x^n$ לכל $(x, y) \in A_n$.
 ולכן f רציפה ב- A_n וכאמור היא חסומה בה ולפי מסקנה 10.ו.9 f אינטגרבילית ב- A_n ומתקיים:

$$\begin{aligned} \iint_{A_n} f &= \int_0^1 \left(\int_{x^{n+1}}^{x^n} x^n dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^n \int_{x^{n+1}}^{x^n} dy \right) dx = \int_0^1 \left(x^n (x^n - x^{n+1}) \right) dx \\ &= \int_0^1 (x^{2n} - x^{2n+1}) dx = \left[\frac{x^{2n+1}}{2n+1} - \frac{x^{2n+2}}{2n+2} \right]_0^1 = \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} \end{aligned}$$

$$B_n = \bigcup_{m=0}^n A_m \quad \text{נסמן:}$$

אז בבירור $(B_n)_{n=1}^\infty$ היא סדרה עולה של קבוצות ומתקיים: $\bigcup_{n=1}^\infty B_n = \bigcup_{n=1}^\infty \bigcup_{m=0}^n A_m = \bigcup_{m=0}^\infty A_m = A$

משאלה 8.ג.9 (אדיטיביות האינטגרל) נקבל (על ידי אינדוקציה) שמתקיים:

$$\iint_{B_n} f = \sum_{m=0}^n \iint_{A_m} f = \sum_{m=0}^n \left(\frac{1}{2m+1} - \frac{1}{2m+2} \right) = \sum_{l=1}^{2n+2} \frac{(-1)^{l+1}}{l} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{l=1}^\infty \frac{(-1)^{l+1}}{l} = \ln 2$$

אם נראה ש- f אינטגרלית ב- A אז לפי מסקנה 9.ה.33

$$\iint_{B_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iint_A f$$

ולכן (מיחידות הגבול של סדרת מספרים) מתקיים:

$$\iint_A f = \ln 2$$

נותר אם כן להראות ש- f אינטגרלית ב- A . אנו כבר יודעים שהיא חסומה ב- A וכמובן A היא קבוצה בעלת שטח (למשל לפי טענה 9.ג.26, אבל כמובן יש עוד הרבה דרכים להצדיק זאת). לכן לפי מסקנה 9.ה.28 די להראות ש- $f \in \text{cont}(A)$ היא קבוצה צנומה.

נסמן:

$$U_n = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1, x^{n+1} < y < x^n \right\}$$

זאת קבוצה פתוחה (לפי חלק א של מסקנה 23.ד.2 וחלק ב של טענה 24.א.2).

לכל שלם אישילי n הפונקציה f רציפה ב- A_n ומאחר ש- $U_n \subseteq A_n$ הפונקציה f רציפה ב- U_n .

לכל $(x, y) \in U_n$ הקבוצה U_n היא סביבה של (x, y) שבה f רציפה ולכן f רציפה ב- (x, y) ,

ובפרט $(x, y) \in \text{cont}(f)$. לכן:

$$A \setminus \text{cont}(f) \subseteq A \setminus \bigcup_{n=0}^\infty U_n = \bigcup_{n=0}^\infty A_n \setminus \bigcup_{n=0}^\infty U_n \subseteq \bigcup_{n=0}^\infty (A_n \setminus U_n)$$

כעת:

$$A_n \setminus U_n = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \mid 0 < x < 1, y = x^n \right\}$$

אז $A_n \setminus U_n$ היא הגרף של הפונקציה $x \mapsto x^n$ המצומצמת לקטע $(0, 1)$. זה גרף של פונקציה

אינטגרלית ולכן זאת קבוצה בעלת נפח אפס לפי טענה 9.ד.11. לפי אבחנה 9.ה.7 היא צנומה,

ולפי חלק ב של טענה 9.ה.17 גם האיחוד $\bigcup_{n=0}^\infty (A_n \setminus U_n)$ הוא קבוצה צנומה, ולפי אבחנה 9.ה.6 גם

כל תת-קבוצה שלו, ובפרט הקבוצה $A \setminus \text{cont}(f)$ היא קבוצה צנומה, ובזאת סיימנו.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי $f: [0, \alpha] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה.

$$\int_{\Delta_k(\alpha)} f(x_1 + \dots + x_k) dx_1 \dots dx_k = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\alpha f(t) t^{k-1} dt$$

הוכיחו את השוויון :

הערה: נפח הסימפלקס $\Delta_k(\alpha) = \{(x_1, \dots, x_k) \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k \leq \alpha\}$ מחושב בספר בשאלה 32.1.9.

רשות, ולא להגשה: הוכיחו את השוויון גם עבור f אינטגרלית שאינה רציפה.

פתרון

$$\varphi: (x_1, \dots, x_k) \mapsto (x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha - x_1 - \dots - x_k)$$

הפונקציה האפינית ההפיכה

מעתיקה את $\Delta_k(\alpha)$ על עצמו:

$$\begin{aligned} \varphi(x_1, \dots, x_k) \in \Delta_k(\alpha) &\Leftrightarrow (x_1, \dots, x_{k-1}, \alpha - x_1 - \dots - x_k) \in \Delta_k(\alpha) \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 \geq 0, \dots, x_{k-1} \geq 0, \alpha - x_1 - \dots - x_k \geq 0, \\ x_1 + \dots + x_{k-1} + (\alpha - x_1 - \dots - x_k) \leq \alpha \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \{x_1 \geq 0, \dots, x_{k-1} \geq 0, \alpha \geq x_1 + \dots + x_k, x_k \geq 0\} \Leftrightarrow (x_1, \dots, x_k) \in \Delta_k(\alpha) \end{aligned}$$

$$J\varphi = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & & 1 & 0 \\ -1 & -1 & \dots & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

כמוכן

ולכן $\det J\varphi = -1$ ו- $|\det J\varphi| = 1$. אז מנוסחת החלפת משתנים מקבלים:

$$\int_{\Delta_k(\alpha)} f(x_1 + \dots + x_k) dx_1 \dots dx_k = \int_{\Delta_k(\alpha)} f(\alpha - x_k) dx_1 \dots dx_k$$

עכשיו נשתמש באחת ממסקנות משפט פוביני: במסקנה 26.1.9 עם $l=1$ ועם $k-1$ במקום k . עם

$A = \Delta_k(\alpha)$, ועם הפונקציה $(x_1, \dots, x_k) \mapsto f(\alpha - x_k)$ במקום f שבסימוני מסקנה 26.1.9.

בסימוני אותה מסקנה נוכל לקחת $\Lambda = [0, \alpha]$ ו- $A_y = \Delta_{k-1}(\alpha - y)$, וכן נסמן x_k במקום y ,

ונקבל:

$$\begin{aligned} \int_{\Delta_k(\alpha)} f(\alpha - x_k) dx_1 \dots dx_k &= \int_0^\alpha f(\alpha - x_k) \left(\int_{\Delta_{k-1}(\alpha - x_k)} 1 dx_1 \dots dx_{k-1} \right) dx_k \\ &= \int_0^\alpha f(\alpha - x_k) \text{vol}_{k-1}(\Delta_{k-1}(\alpha - x_k)) dx_k \\ &= \int_0^\alpha f(t) \text{vol}_{k-1}(\Delta_{k-1}(t)) dt = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\alpha f(t) t^{k-1} dt \end{aligned}$$

כאשר במעבר בין השורה השניה והשלישית יש החלפת משתנה $t = \alpha - x_k$, ובסוף שימוש בנוסחת

נפח הסימפלקס משאלה 32.1.9.

אחרי שלומדים את פרק 10, **דרך נוספת** לפתרון שאלה זאת היא על ידי שימוש בנוסחת Coarea (טענה 10.ג.20):

נסמן ב- $F(\alpha)$ את אגף שמאל של הנוסחה שיש להוכיח. נסמן גם:

$$q(x) = x_1 + \dots + x_k \quad K_{q,t} = \left\{ x \in [0, \infty)^k \mid x_1 + \dots + x_k = t \right\} \quad \text{אז } |\nabla q| = \sqrt{k} \text{ וכן}$$

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \left(\int_{K_{q,t}} \frac{1}{\sqrt{k}} f(t) d\sigma_{k-1} \right) dt = \int_0^\alpha \left(f(t) \frac{1}{\sqrt{k}} \sigma_{k-1}(K_{q,t}) \right) dt \quad \text{אז:}$$

ונותר למצוא את $\sigma_{k-1}(K_{q,t})$. יש מגוון דרכים פשוטות לעשות זאת, ואפשר גם כך:

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \left(\sigma_{k-1}(K_{q,t}) \right) dt \quad \text{עבור הפונקציה הקבועה } f(t) = \sqrt{k} \text{ נקבל:}$$

$$F'(\alpha) = \sigma_{k-1}(K_{q,\alpha}) \quad \text{לכן:}$$

$$F(\alpha) = \int_{\Delta_k(\alpha)} \sqrt{k} dx_1 \dots dx_k = \sqrt{k} \text{vol}_k(\Delta_k(\alpha)) \quad \text{מצד שני עבור הפונקציה הזאת}$$

$$F(\alpha) = \sqrt{k} \frac{1}{k!} \alpha^k \quad \text{ולפי שאלה 32.1.9}$$

$$F'(\alpha) = \sqrt{k} \frac{1}{k!} k \alpha^{k-1} = \sqrt{k} \frac{1}{(k-1)!} \alpha^{k-1} \quad \text{ולכן}$$

$$\sigma_{k-1}(K_{q,\alpha}) = \sqrt{k} \frac{1}{(k-1)!} \alpha^{k-1} \quad \text{ומצאנו שלכל } \alpha \text{ מתקיים:}$$

$$F(\alpha) = \int_0^\alpha \left(f(t) \frac{1}{\sqrt{k}} \sqrt{k} \sigma_{k-1}(K_{q,t}) \right) \frac{1}{(k-1)!} t^{k-1} dt = \frac{1}{(k-1)!} \int_0^\alpha f(t) t^{k-1} dt \quad \text{ובחזרה ל- } f \text{ כללית נקבל:}$$

שאלה 3 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל $\iiint_D \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} dx dy dz$ בקבוצה $D = B((0,0,0);1) \setminus \bar{B}((0,0,1);1)$.

פתרון

כדורים הם קבוצות בעלות נפח (דוגמה 9.16). מטענה 9.18 ג. נובע שגם D בעלת נפח. נרצה להשתמש בטענה 9.42, אלא ש- D אינה קבוצה סגורה ושם נחוצה קבוצה סגורה. יש דרכים שונות להתגבר על המגבלה הזאת. דרך אחת היא להרחיב את הפונקציה למישור כולו על ידי הגדרת ערכה ב- $(0,0,0)$ באופן כלשהו, ולחשב את האינטגרל בקבוצה הסגורה $D \cup \partial D$, שנבדלת מ- D ב- ∂D , שהיא קבוצה בעלת נפח אפס. אחשב בדרך אחרת:

$$D_n = \bar{B}\left((0,0,0);1-\frac{1}{n}\right) \setminus B\left((0,0,1);1+\frac{1}{n}\right) \quad \text{נסמן:}$$

זאת קבוצה סגורה (חיתוך בין שתי קבוצות סגורות: כדור סגור והמשלימה של כדור פתוח). היא גם בעלת נפח כהפרש בין שני כדורים שהם קבוצות בעלות נפח.

$$D = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \quad \text{אפשר לבדוק שאם } n_1 < n_2 \text{ אז } D_{n_1} \subseteq D_{n_2} \text{ ושמתקיים}$$

ולכן $(D_n)_{n=1}^{\infty}$ היא סדרת קבוצות סגורות ובעלות נפח שעולה לקבוצה D .

$$\text{נסמן } f: (x,y,z) \mapsto \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}. \text{ זאת פונקציה יסודית שמוגדרת ולכן גם רציפה ב-} D. \text{ היא}$$

$$|f(x,y,z)| = \frac{|z|}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \leq \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = 1 \quad \text{גם חסומה כי:}$$

אז לפי טענה 9.23 ג. הפונקציה f אינטגרלית בקבוצה D ולפי מסקנה 9.33 מתקיים:

$$\iiint_{D_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iiint_D f$$

לכל n טבעי הקבוצה D_n סגורה וחסומה ובעלת נפח, ונרצה לישם את טענה 9.42 עם קבוצה

זאת. לשם כך נגדיר קבוצה $A_n \subseteq [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ כך שיתקיים:

$$D_n = \left\{ (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \mid (r, \theta, \phi) \in A_n \right\}$$

אם כך מה שנדרש לנו שעבור $(r, \theta, \phi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ יתקיים $(r, \theta, \phi) \in A_n$ אם ורק אם

$$(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \in D_n$$

$$\left| (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) \right| \leq 1 - \frac{1}{n} \quad \text{זה שקול לכך שמתקיים}$$

$$\left| (r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) - (0,0,1) \right| \geq 1 + \frac{1}{n} \quad \text{וגם:}$$

$$\begin{aligned}
|(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi)|^2 &= r^2 |(\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)|^2 && \text{מתקיים} \\
&= r^2 (\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi) \\
&= r^2 (\sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + \cos^2 \phi) \\
&= r^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) = r^2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
|(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) - (0, 0, 1)|^2 &= |(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi - 1)|^2 && \text{וגם} \\
&= r^2 \sin^2 \phi \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \phi \sin^2 \theta + (r \cos \phi - 1)^2 \\
&= r^2 \sin^2 \phi (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) + r^2 \cos^2 \phi - 2r \cos \phi + 1 \\
&= r^2 \sin^2 \phi + r^2 \cos^2 \phi - 2r \cos \phi + 1 \\
&= r^2 (\sin^2 \phi + \cos^2 \phi) - 2r \cos \phi + 1 = r^2 - 2r \cos \phi + 1
\end{aligned}$$

$$r \leq 1 - \frac{1}{n} \quad \text{אם } (r, \theta, \phi) \in A_n \text{ יתקיים } (r, \theta, \phi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$$

$$r^2 - 2r \cos \phi + 1 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \quad \text{וגם}$$

$$A_n = \left\{ (r, \theta, \phi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mid r \leq 1 - \frac{1}{n}, r^2 - 2r \cos \phi + 1 \geq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2 \right\} \quad \text{כלומר:}$$

$$\begin{aligned}
A &= \left\{ (r, \theta, \phi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mid r < 1, r^2 - 2r \cos \phi > 0 \right\} && \text{נסמן } A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ ואז} \\
&= \left\{ (r, \theta, \phi) \in [0, \infty) \times [0, 2\pi] \times [0, \pi] \mid 2 \cos \phi < r < 1 \right\}
\end{aligned}$$

$$\text{כעת אנו יודעים ש-} \iiint_{D_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iiint_D f \quad \text{וגם}$$

$$\begin{aligned}
\iiint_{D_n} f &= \iiint_{A_n} f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \\
&\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \iiint_A f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi
\end{aligned}$$

$$\iiint_D f = \iiint_A f(r \sin \phi \cos \theta, r \sin \phi \sin \theta, r \cos \phi) r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi \quad \text{ולכן:}$$

$$\begin{aligned}
&= \iiint_A \frac{r \cos \phi}{r} r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi = \iiint_A r^2 \sin \phi \cos \phi dr d\theta d\phi \\
&= \int_0^{\pi} \left(\int_{2 \cos \phi}^1 \left(\int_0^{2\pi} r^2 \sin \phi \cos \phi d\theta \right) dr \right) d\phi = \int_0^{\pi} \left(\sin \phi \cos \phi \int_{2 \cos \phi}^1 \left(r^2 \int_0^{2\pi} d\theta \right) dr \right) d\phi
\end{aligned}$$

נמשיך בחישוב:

$$\begin{aligned}
\iiint_{D_n} f &= \int_0^{\pi} \left(\sin \phi \cos \phi \int_{2 \cos \phi}^1 (2\pi r^2) dr \right) d\phi = 2\pi \int_0^{\pi} \left(\sin \phi \cos \phi \left[\frac{1}{3} r^3 \right]_{2 \cos \phi}^1 \right) d\phi \\
&= \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} (\sin \phi \cos \phi (1 - 8 \cos^3 \phi)) d\phi = \frac{2}{3} \pi \int_0^{\pi} \sin \phi \cos \phi d\phi - \frac{16}{3} \pi \int_0^{\pi} \sin \phi \cos^4 \phi d\phi \\
&= \frac{1}{3} \pi [\sin^2 \phi]_0^{\pi} + \frac{16}{15} \pi [\cos^5 \phi]_0^{\pi} = 0 + \frac{16}{15} \pi ((-1)^5 - 1^5) = -\frac{32}{15} \pi
\end{aligned}$$

סיימנו. האמנם? ובכן, נעשה בדרך שימוש במסקנה 9.ה.33 עם סדרת הקבוצות $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ שעולה לקבוצה A , ויש לבדוק שאלה קבוצות בעלות נפח. אפשר לבדוק זאת באמצעות שאלה 9.ד.20, ולא אפרט.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי K סביבה של $0^{[k]}$ שהיא קבוצה סגורה וחסומה ובעלת נפח k -ממדי. נניח ש- $k=3$.
 תהי $f: \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\} \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה רציפה, הומוגנית-חיובית ממעלה α , שהיא גם חיובית, כלומר
 $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$. הראו ש- f אינטגרבילית בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ אם ורק אם $\alpha \geq 0$,
 ושהאינטגרל המוכלל של f בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ מתכנס אם ורק אם $-k < \alpha < 0$.
 הערה: הטענה נכונה לכל מספר טבעי k , וניתן לפתור אותה בכלים מפרק 9. ל- $k > 3$ נוח להיעזר בכלי מפרק 10.

פתרון

הפונקציה f רציפה ב- $\mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ ולכן היא רציפה בקבוצה הסגורה והחסומה $S^{k-1}(0^{[k]}; 1)$,
 ולפי משפט וויירשטראס (משפט 4.א.6) יש לה ערך מזערי וערך מרבי בקבוצה זאת.
 נסמן $\beta = \min f(S^{k-1}(0; 1))$ ו- $\gamma = \max f(S^{k-1}(0; 1))$. אלה מספרים חיוביים לפי הנתון
 שמתקיים $f(x) > 0$ לכל $x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$, כלומר $0 < \beta \leq \gamma$.
 אם $x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0^{[k]}\}$ אז $\frac{1}{|x|}x \in S^{k-1}(0; 1)$ ולכן:

$$\beta \leq f\left(\frac{1}{|x|}x\right) \leq \gamma$$
 לפי הנתון f היא פונקציה הומוגנית-חיובית ממעלה α ולכן

$$f\left(\frac{1}{|x|}x\right) = \left(\frac{1}{|x|}\right)^\alpha f(x) = \frac{f(x)}{|x|^\alpha}$$
 ולכן $\beta \leq \frac{f(x)}{|x|^\alpha} \leq \gamma$ ומכאן:

$$\beta|x|^\alpha \leq f(x) \leq \gamma|x|^\alpha$$
 אם $\alpha \geq 0$ אז הפונקציה $x \mapsto \gamma|x|^\alpha$ רציפה בכל המרחב, ובפרט בקבוצה הסגורה והחסומה K ,
 ולכן היא חסומה ב- K כלומר יש מספר ממשי μ כך ש- $\gamma|x|^\alpha \leq \mu$ לכל $x \in K$.
 לכן לכל $x \in K \setminus \{0\}$ מתקיים $0 < f(x) \leq \gamma|x|^\alpha \leq \mu$ ולכן f חסומה ב- $K \setminus \{0\}$.
 הקבוצות K ו- $\{0\}$ בעלות נפח ולכן גם $K \setminus \{0\}$ בעלת נפח. הפונקציה f רציפה וחסומה ב-
 $K \setminus \{0\}$ ולכן לפי טענה 23.ג.9 היא אינטגרבילית ב- $K \setminus \{0\}$.
 מצד שני, אם f אינטגרבילית ב- $K \setminus \{0\}$ אז היא חסומה ב- $K \setminus \{0\}$. אז יש μ ממשי כך ש-
 $f(x) \leq \mu$ לכל $x \in K \setminus \{0\}$, ולכן $\beta|x|^\alpha \leq f(x) \leq \mu$ כלומר $|x|^\alpha \leq \frac{\mu}{\beta}$ לכל $x \in K \setminus \{0\}$. אם נניח
 בשלילה ש- $\alpha < 0$ אז $\frac{\beta}{\mu} \leq |x|^{-\alpha}$ ולכן $\left(\frac{\beta}{\mu}\right)^{-\frac{1}{\alpha}} \leq |x|$ לכל $x \in K \setminus \{0\}$.
 אז $\{0\} = \bigcap_{k=1}^{\infty} B^k\left(0; \left(\frac{\beta}{\mu}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}\right)$ ובפרט לא יתכן ש- K מכילה כדור שמרכזו בראשית, ולכן היא אינה
 סביבה של הראשית, בניגוד לנתון. לכן אם f אינטגרבילית ב- $K \setminus \{0\}$ אז $\alpha \geq 0$.

נבחן כעת מתי האינטגרל המוכלל של f בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ מתכנס. לפי הגדרה 5.נ.9 מונח זה

מוגדר רק בתנאי שהגרף $G(f|_{K \setminus \{0\}})$ הוא קבוצה שאינה חסומה, וכיוון שהקבוצה K חסומה

תנאי זה פירושו ש- f אינה חסומה ב- $K \setminus \{0\}$. ראינו ש- f חסומה אם ורק אם $\alpha \geq 0$, ולכן נותר לבחון את האפשרות $\alpha < 0$. בתנאי זה עלינו להראות שהאינטגרל מתכנס אם $\alpha > -k$ ומתבדר אם $\alpha \leq -k$.

נבחר למשל את סדרת הקבוצות $A_n = K \setminus B^k(0; \frac{1}{n})$. זאת סדרה של קבוצות סגורות, חסומות

ובעלות נפח שעולה לקבוצה $K \setminus \{0\}$. אם האינטגרל המוכלל של f בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ מתכנס

אז לפי הגדרה 5.נ.9 סדרת הקירוב $\left(\int_{A_n} f \right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת אליו ובפרט היא חסומה. מצד שני,

מאחר שהפונקציה f חיובית, מסקנה 7.נ.9 אומרת שאם סדרה זאת חסומה אז האינטגרל

המוכלל של f בקבוצה $K \setminus \{0^{[k]}\}$ מתכנס. אם כך, די להראות (עבור $\alpha < 0$) שסדרה זאת חסומה אם ורק אם מתקיים $\alpha > -k$.

מאחר ש- K היא סביבה חסומה של $0^{[k]}$ הרי יש $0 < r \leq R$ כך ש- $\bar{B}(0^{[k]}; R) \subseteq K \subseteq \bar{B}(0^{[k]}; r)$.

$$\bar{B}(0^{[k]}; r) \setminus B^k(0; \frac{1}{n}) \subseteq A_n = K \setminus B^k(0; \frac{1}{n}) \subseteq \bar{B}(0^{[k]}; R) \setminus B^k(0; \frac{1}{n}) \quad \text{אז}$$

$$\beta \int_{\bar{B}(0^{[k]}; r) \setminus B(0^{[k]}; \frac{1}{n})} |x|^\alpha \leq \beta \int_{A_n} |x|^\alpha \leq \int_{A_n} f \leq \gamma \int_{A_n} |x|^\alpha \leq \gamma \int_{\bar{B}(0^{[k]}; R) \setminus B(0^{[k]}; \frac{1}{n})} |x|^\alpha \quad \text{ולכן:}$$

$$I_{\alpha, a, b} = \int_{\bar{B}(0^{[k]}; b) \setminus B(0^{[k]}; a)} |x|^\alpha \quad \text{נסמן:}$$

$$\beta I_{\alpha, \frac{1}{n}, r} \leq \int_{A_n} f \leq \gamma I_{\alpha, \frac{1}{n}, R} \quad \text{קיבלנו}$$

נחשב את $I_{\alpha, a, b}$ ונראה שעבור כל קבוע חיובי b הסדרה $\left(I_{\alpha, \frac{1}{n}, b} \right)_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת (ובפרט חסומה)

אם $-k < \alpha < 0$, ואילו אם $\alpha \leq -k$ אז $I_{\alpha, \frac{1}{n}, b} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$. מכך ומהאישוויון $0 \leq \int_{A_n} f \leq \gamma I_{\alpha, \frac{1}{n}, R}$

ינבע שאם $-k < \alpha < 0$ אז סדרת הקירוב $\int_{A_n} f$ חסומה ולכן לפי מסקנה 7.נ.9 האינטגרל המוכלל

של f בקבוצה $K \setminus \{0\}$ מתכנס, ומהאישוויון $\beta I_{\alpha, \frac{1}{n}, r} \leq \int_{A_n} f$ ינבע שאם $\alpha \leq -k$ אז

$$\beta I_{\alpha, \frac{1}{n}, r} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{ולכן גם} \quad \int_{A_n} f \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{ולכן סדרת הקירוב} \quad \int_{A_n} f \quad \text{אינה מתכנסת ולפי}$$

הגדרה 5.נ.9 האינטגרל המוכלל של f בקבוצה $K \setminus \{0\}$ אינו מתכנס.

נחשב את $I_{\alpha, a, b}$, כאשר עכשיו ננצל גם את הנתון $k = 3$.

נסמן $A = [a, b] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ ולפי טענה 42.9.1 נקבל :

$$I_{\alpha, a, b} = \int_{\bar{B}(0^{[3]}; b) \setminus \bar{B}(0^{[3]}; a)} |x|^\alpha = \int_A r^\alpha r^2 \sin \phi dr d\theta d\phi = \int_a^b r^{\alpha+2} dr \cdot \int_0^{2\pi} 1 d\theta \cdot \int_0^\pi \sin \phi d\theta = 4\pi \int_a^b r^{\alpha+2} dr$$

$$I_{\alpha, a, b} = 4\pi \int_a^b r^{-1} dr = 4\pi (\ln b - \ln a) \quad \text{כעת אם } \alpha = -k = -3 \text{ נקבל}$$

$$I_{\alpha, \frac{1}{n}, b} = 4\pi \left(\ln b - \ln \frac{1}{n} \right) = 4\pi (\ln b + \ln n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{ובפרט:}$$

אחרת, כלומר אם $\alpha < 0$ וגם $\alpha \neq -3$ אז :

$$I_{\alpha, a, b} = 4\pi \int_a^b r^{\alpha+2} dr = 4\pi \left[\frac{r^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right]_a^b = 4\pi \left(\frac{b^{\alpha+3} - a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right)$$

$$I_{\alpha, \frac{1}{n}, b} = 4\pi \left(\frac{n^{-(\alpha+3)} - a^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty \quad \text{אם } \alpha < -k = -3 \text{ או } \alpha+3 < 0 \text{ ולכן}$$

$$I_{\alpha, \frac{1}{n}, b} = 4\pi \left(\frac{b^{\alpha+3} - \left(\frac{1}{n}\right)^{\alpha+3}}{\alpha+3} \right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 4\pi \frac{b^{\alpha+3}}{\alpha+3} \quad \text{ואם } \alpha > -k = -3 \text{ או } \alpha+3 > 0 \text{ ולכן}$$

ובפרט הסדרה מתכנסת.

זה מסיים את פתרון השאלה (עם הנתון $k=3$).

ניתן לפתור אותה גם ל- k טבעי כלשהו בכלים שיש לנו.

עבור $k=1$ (וגם $a < b$) מתקיים $I_{\alpha, a, b} = 2 \int_a^b x^\alpha dx$ ואת זה קל לחשב בכלים של אינפי 2.

עבור $k=2$ החישוב דומה לחישוב לעיל עם טענה 36.9.1 במקום 42.9.1.

עבור $k > 3$ עם החלפת משתנים שמקבלים מההצגה בשיעורים קוטביים מטענה 1.1.1.

אבל נוח יותר להשתמש בכלים מפרק 10 : נוסחת coarea (טענה 20.1.1), ונוסחת הנפח ה- $k-1$.

ממדי של ספירה במרחב אוקלידי k -ממדי (דוגמה 22.10.1) בעזרתן מקבלים :

$$I_{\alpha, a, b} = \int_{\bar{B}(0^{[k]}; b) \setminus \bar{B}(0^{[k]}; a)} |x|^\alpha = \int_a^b \left(\int_{S^{k-1}(0^{[k]}; t)} t^\alpha d\sigma_{k-1} \right) dt = \int_a^b \left(\int_{S^{k-1}(0^{[k]}; t)} 1 d\sigma_{k-1} \right) t^\alpha dt$$

$$= \int_a^b \left(\sigma_{k-1} \left(S^{k-1}(0^{[k]}; t) \right) \right) t^\alpha dt = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot \int_a^b t^{\alpha+k-1} dt = \begin{cases} \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} (\ln b - \ln a), & \alpha = -k \\ \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \cdot \frac{b^{\alpha+k} - a^{\alpha+k}}{\alpha+k}, & \alpha \neq -k \end{cases}$$

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי φ לולאה פשוטה שתמונתה $\{(x, y) \in [0, \infty)^2 \mid (x^2 + y^2)^2 = 2xy\}$, שמקיפה קבוצה סגורה וחסומה השוכנת לשמאלה של φ . בעזרת משפט גרין הראו ש: $\int_{\varphi} (10x^2y^3 + 3y^5)dx - 3x^5dy = -\frac{5}{3}$.
 הצעה: בשלב כלשהו כדאי להשתמש בשיעורים קוטביים.

פתרון

כדי להבין איך נראות הקבוצות הנתונות נציג נקודה כללית של המישור בשיעורים קוטביים (דוגמה 4.1.1): $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. אז $x^2 + y^2 = r^2$ ונקודה (x, y) נמצאת בתמונת הלולאה φ אם ורק אם $(x^2 + y^2)^2 = 2xy$ כלומר $(r^2)^2 = 2r^2 \cos \theta \sin \theta$ ובאופן שקול $r^2 = \sin 2\theta$. המגבלה $(x, y) \in [0, \infty)^2$ שקולה לדרישה $\theta \in [0, \frac{\pi}{2}]$ וזה מבטיח ש- $\sin 2\theta \geq 0$. עבור $\theta = 0$ ועבור $\alpha = \frac{\pi}{2}$ הנקודה $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ נמצאת בתמונת φ רק אם $r = 0$. כלומר זאת הנקודה $(0, 0)$.
 עבור $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ יש $r > 0$ יחיד עבורו הנקודה $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ נמצאת בתמונת φ והוא נקבע על ידי הנוסחה $r^2 = \sin 2\theta$ כלומר $r = \sqrt{\sin 2\theta}$. זאת נקודה על הקרן $\{t(\cos \theta, \sin \theta) \mid t > 0\}$ והיא מחלקת את הקרן לשני חלקים $\{t(\cos \theta, \sin \theta) \mid 0 < t < \sqrt{\sin 2\theta}\}$ שהוא קטע ו- $\{t(\cos \theta, \sin \theta) \mid \sqrt{\sin 2\theta} < t\}$ שהיא קרן ואינה חסומה. הקבוצה הסגורה והחסומה K ששוכנת משמאל למסילה φ לא יכולה להכיל את הקבוצה הלא חסומה, ולכן היא מכילה את הקטע, ונקבל ש- $K = \{t(\cos \theta, \sin \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq t \leq \sqrt{\sin 2\theta}\}$ היא קבוצה סגורה וחסומה שמוקפת על-ידי הלולאה φ ושוכנת לשמאלה.

אז הלולאה φ והקבוצה K מקיימות יחד את הנחות משפט גרין ולכן לכל שתי פונקציות סקלריות P ו- Q שגזירות ברציפות בכל נקודה ב- K מתקיים $\int_{\varphi} Pdx + Qdy = \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$. בפרט עבור הפונקציות הפולינומיות $P: (x, y) \mapsto 10x^2y^3 + 3y^5$ ו- $Q: (x, y) \mapsto -3x^5$ נקבל:

$$\begin{aligned} \int_{\varphi} Pdx + Qdy &= \iint_K \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = \iint_K (-15x^4 - 30x^2y^2 - 15y^4) dx dy \\ &= -15 \iint_K (x^4 + 2x^2y^2 + y^4) dx dy = -15 \iint_K (x^2 + y^2)^2 dx dy \end{aligned}$$

את האינטגרל הזה נוכל לחשב בעזרת טענה 36.9. זעם הקבוצה הסגורה:

$$A = \{(r, \theta) \mid 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq r \leq \sqrt{\sin 2\theta}\}$$

$$\iint_K (x^2 + y^2)^2 dx dy = \iint_A (r^2)^2 r dr = \iint_A r^5 dr d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\int_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} r^5 dr \right) d\theta \quad \text{נחשב:}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{6} r^6 \right]_0^{\sqrt{\sin 2\theta}} d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{6} \sqrt{\sin 2\theta}^6 d\theta = \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta d\theta$$

$$\int_{\varphi} P dx + Q dy = -15 \cdot \frac{1}{6} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta d\theta = -\frac{5}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3 2\theta d\theta \quad \text{נא:}$$

$$= -\frac{5}{4} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos^2 2\theta) 2 \sin 2\theta d\theta = \frac{5}{4} \int_1^{-1} (1 - c^2) dc$$

$$= \frac{5}{4} \int_{-1}^1 (c^2 - 1) dc = \frac{5}{2} \int_0^1 (c^2 - 1) dc = \frac{5}{2} \cdot \left[\frac{1}{3} c^3 - c \right]_0^1 = \frac{5}{2} \cdot \left(\frac{1}{3} - 1 \right) = -\frac{5}{3}$$