

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–7
 מספר השאלות: 5
 סמסטר: 2023
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 2.5.2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונגדיר פונקציה:

$$g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R} \quad y \mapsto \int_a^b \max\{x, y\} \cdot f(x) dx$$

הוכיחו ש- g גזירה פעמיים ב- (a, b) ומתקיים $g''(t) = f(t)$ לכל $t \in (a, b)$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה ברציפות בנקודה $a \in \mathbb{R}^k$ וכך ש- $f(a) = 0$.

תהי g הפונקציה המוגדרת על ידי $x \mapsto f(x)^2$.

הוכיחו ש- g גזירה פעמיים בנקודה a ושמתקיים $Hg_a = 2\nabla f(a)^T \nabla f(a)$.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה פעמיים ברציפות בנקודה a , שהיא נקודה קריטית

של f . הוכיחו שאם מטריצת ההסיאן Hf_a הפיכה אז יש סביבה של a שבה אין אף נקודה

קריטית של f פרט לנקודה a עצמה. (רמז: מה אומרים הנתונים על הפונקציה $x \mapsto \nabla f(x)$?)

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $a \in \mathbb{R}^k$ עם $k \geq 3$. תהיינה S_1 ו- S_2 יריעות חלקות ב- $\mathbb{R}^k$, שממדיהן d_1 ו- d_2 , בהתאמה.

א. הוכיחו שאם $d_1 = d_2 = k - 1$ ו- $S_1 \cap S_2 = \{a\}$ אז $T_a(S_1) = T_a(S_2)$.

ב. הראו על ידי דוגמה, שעבור $k = 5$ ו- $d_1 = d_2 = 3$ יתכן $S_1 \cap S_2 = \{a\}$ וגם $T_a(S_1) \neq T_a(S_2)$.

שאלה 5 (20 נקודות)

מצאו את כל נקודות הקיצון וערכי הקיצון של הפונקציה

$$f: \mathbf{R}^4 \rightarrow \mathbf{R}$$

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \mapsto x_1 x_2 x_3 x_4$$

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in (0, \infty)^4 \mid \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9 \\ \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_4} = 2 \end{array} \right\}$$

בקבוצה:

שימו לב: אם אין מינימום או מקסימום עליכם להוכיח שאין. אם יש עליכם להוכיח שיש, ולמצוא אותם במפורש.

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

שאלה 1: מחלקים את האינטגרל לקטעים $[a, y]$ ו- $[y, b]$ וגוזרים את כל אחד מהמחברים בעזרת נוסחת לייבניץ. גזירה שניה לפי המשפט היסודי של החדו"א. למעשה אפשר די בקלות להסתדר גם בלי נוסחת לייבניץ.

שאלה 2: מיחזור של 2021 ב-2021 ו-2020 ב-2021. צריך רק להשתמש בהגדרת הגזירות עבור ∇g . הדרישה להראות מה ההסיאן נועדה להקל (אחרת הסטודנט צריך למצוא אותו בעצמו. אולי בממ"ן בעתיד זה יהיה בלי הרמז).

שאלה 3: 2022 ב-191. לפי שאלה 2.2.5 ב-Berkeley Problems in Mathematics. נתון אחד הוא ש- $Hf_a = J(\nabla f)_a$ היא מטריצה הפיכה, ולכן $D(\nabla f)_a$ היא פונקציה לינארית הפיכה. הנתון על גזירות פעמיים ברציפות ב- a פירושו:

$$Hf_x \xrightarrow{x \rightarrow a} Hf_a \quad \text{כלומר:}$$

$$J(\nabla f)_x \xrightarrow{x \rightarrow a} J(\nabla f)_a$$

אז הפונקציה $\nabla f: x \mapsto \nabla f(x)$ גזירה ברציפות ב- a .
אם כך מתקיימים תנאי משפט הפונקציה ההופכית (4.א.7) עבור הפונקציה ∇f בנקודה a ולכן יש סביבה B של a כך ש- $\nabla f|_B$ חד-חד ערכית. בפרט אם $x \in B \setminus \{a\}$ אז $\nabla f(x) \neq \nabla f(a) = 0$ ולכן x אינה נקודה קריטית באף נקודה של הסביבה B פרט לנקודה a עצמה.

שאלה 4: 2023 ב-191. חלק א מתקבל בקלות כמסקנה משאלה 17.ד.7: היריעות הן משטחיות. אם $T_a(S_1) \neq T_a(S_2)$ אז יש להן מישוריות שונים בנקודה, ואז בסביבת הנקודה החיתוך הוא יריעה $k-2$ ממדית, שאינה מוכלת בנקודה. בחלק ב צריך לאמץ טיפה את התאים האפורים. אפשר למשל להתחיל בשני תת-מרחבים אפייניים תלת-ממדיים שנחתכים בודאי ביותר מנקודה, ואז לעוות קצת אחד מהם כדי להשאיר רק נקודה אחת.

אז לדוגמה $a = 0^{[5]}$, $S_1 = \mathbf{R}^3 \times \{(0,0)\}$ ו- $S_2 = \{0\} \times G((x,y,z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2)$.
אז $T_a(S_1) = S_1$ ובפרט $e_1 \in T_a(S_1)$ ולעומת זאת $S_2 \subseteq \{0\} \times \mathbf{R}^4$ ולכן $T_a(S_1) \neq T_a(S_2)$ ולכן $e_1 \notin T_a(S_2)$.
אם $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in S_1 \cap S_2$ אז $x_1 = x_4 = x_5 = 0$ וגם $x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = x_5 = 0$ ולכן $x_2 = x_3 = 0$ ולכן $S_1 \cap S_2 = \{0^{[5]}\} = \{a\}$.
יש עוד דרכים לבנות דוגמאות. למשל $S_{\pm} = S^4(\pm e_1; 1)$ זה משטחיות זה משטחיות.

$T_0(S_{\pm}) = \{0\} \times \mathbf{R}^4$. ברור גם ש- $S_+ \cap S_- = \{0\}$. כעת משאלה 17.7.7 נקבל

$$\begin{aligned} T_0(S_+ \cap (\mathbf{R}^4 \times \{0\})) &= T_0(S_+) \cap T_0(\mathbf{R}^4 \times \{0\}) \\ &= (\{0\} \times \mathbf{R}^4) \cap (\mathbf{R}^4 \times \{0\}) = \{0\} \times \mathbf{R}^3 \times \{0\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T_0(S_- \cap (\mathbf{R}^3 \times \{0\} \times \mathbf{R})) &= T_0(S_-) \cap T_0(\mathbf{R}^3 \times \{0\} \times \mathbf{R}) \\ &= (\{0\} \times \mathbf{R}^4) \cap (\mathbf{R}^3 \times \{0\} \times \mathbf{R}) = \{0\} \times \mathbf{R}^2 \times \{0\} \times \mathbf{R} \end{aligned}$$

וכן

ולכן $S_1 = S_+ \cap (\mathbf{R}^4 \times \{0\})$ ו- $S_1 = S_- \cap (\mathbf{R}^3 \times \{0\} \times \mathbf{R})$ מהווים דוגמה מתאימה.

ואולי אני סתם מסתבך: גרף של פונקציה גזירה ברציפות מ- $\mathbf{R}^3$ ל- $\mathbf{R}^2$ זאת יריעה חלקה תלת-ממדית. אז ניקח למשל $S_i = G(f_i)$ עם:

$$f_i : (x_1, x_2, x_3) \mapsto (x_1, x_2, x_3, x_i, (-1)^i (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2))$$

$$\text{אז } T_0(S_i) \text{ הוא מרחב השורות של המטריצה } J(f_i)_{0[3]}^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \delta_{i1} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \delta_{i2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \delta_{i3} & 0 \end{pmatrix} \text{ ואלה}$$

מטריצות מדרגות קנוניות שונות ולכן יש להן מרחבי שורות שונים. כמוכן די קל לבדוק

$$\text{ש- } S_1 \cap S_2 = \{0^{[5]}\} \text{ כי מהשיעור החמישי מקבלים } x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0.$$

נראה שאפשר פשוט לקחת שני משטחיעל שמשיקים בנקודה, ולחתוך אותם עם שני מישוריעל ששונים זה מזה וממישור העל המשיק לשני משטחי העל.

לשאלה 5: מיחזור של 2020ב\12\6.

הקבוצה סגורה וחסומה כי היא:

$$\left\{ (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \left[\frac{1}{2}, \infty\right)^4 \mid \begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 9 \\ &x_2 x_3 x_4 + x_1 x_3 x_4 + x_1 x_2 x_4 + x_1 x_2 x_3 = 2x_1 x_2 x_3 x_4 \end{aligned} \right\}$$

הנקודות החשודות מתקבלות מכופלי לגרנז' והן התמורות של:

$$(2, 2, 2, 2), (3, 3, \frac{3}{2}, \frac{3}{2}), \left(\frac{13 \pm \sqrt{7}}{6}, \frac{13 \pm \sqrt{7}}{6}, \frac{13 \pm \sqrt{7}}{6}, \frac{5 \mp \sqrt{7}}{2}\right)$$