

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 31.3.2023
 סמסטר: 2023

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $\varepsilon > 0$ ותהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$. נסמן $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k \mid A \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon) \neq \emptyset\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A היא קבוצה פתוחה אז A_ε היא קבוצה פתוחה.

ב. אם A היא קבוצה סגורה אז A_ε היא קבוצה סגורה.

ג. אם A היא קבוצה קמורה אז A_ε היא קבוצה קמורה.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו $a, k \geq 2$, נקודה ב- $\mathbb{R}^k$, α מספר ממשי ו- $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbb{R}^k$. הוכיחו שאם $\{x \mid f(x) = \alpha\} = \{a\}$ אז תמונת הפונקציה f היא קרן או קטע שאחד מקצותיו הוא α .

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ שרציפה ב-0 ולכל $x \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ מקיימת: $f(x) = x_1 \cdots x_k \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|)$. יהי $a \in \mathbb{R}^k$. הוכיחו ש- f אינה גזירה ב- a אם ורק אם $k=1$ ו- $a=0$.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי k מספר טבעי ו- $a \in \mathbb{R}^k$. עבור $i=1, \dots, k$ נניח ש- f_i היא פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה בנקודה a , שמתקיים $f_i(a) = 0$, ושהגרדיאנטים $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_k(a)$ הם וקטורים בלתי תלויים לינאריים. הראו שיש סביבה נקובה של הנקודה a שבה הפונקציה החלקית המוגדרת על ידי

$$g: x \mapsto \frac{|x-a|^2}{\sum_{i=1}^k f_i(x)^2}$$

חסומה (ובפרט שהפונקציה g מוגדרת באותה סביבה נקובה של a).

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי A קבוצה פתוחה וקשורה מסילתית ב- $\mathbf{R}^k$. תהי $f: A \rightarrow \mathbf{R}^l$ פונקציה שגזירה ב- A ואינה פונקציה קבועה. נתון שלכל $a \in A$ הוקטור $f'(a)$ מאונך לכל עמודות מטריצת היעקוביאן Jf_a , ובמילים אחרות מתקיים $f'(a) \cdot Jf_a = 0$. הוכיחו שיש $r > 0$ כך שתמונת הפונקציה f מוכלת בספירה $S^{l-1}(0^{[l]}; r)$. (מומלץ להיעזר בפונקציה מדוגמה 3.א.5).

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

שאלה 1: שלוש הטענות נכונות. כדאי ראשית לשים לב ש- $x \in A_\varepsilon$ אם ורק אם יש $a \in A$ כך ש-

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \bar{B}^k(a; \varepsilon) \quad : \text{כלומר, } x \in \bar{B}^k(a; \varepsilon) \text{ וזה שקול ל-} |x - a| \leq \varepsilon$$

לסעיף א אפשר למשל להגיד שאם $x \in A_\varepsilon$ אז יש $a \in A$ כך ש- $x \in \bar{B}^k(a; \varepsilon)$ וכיוון ש-

פתוחה יש $B^k(a; r) \subseteq A$ ואז :

$$A_\varepsilon = \bigcup_{b \in A} \bar{B}^k(b; \varepsilon) \supseteq \bigcup_{b \in B^k(a; r)} \bar{B}^k(b; \varepsilon) = B^k(a; r + \varepsilon) \supseteq B^k(x; r)$$

כאשר משתמשים בדרך בשאלה 5.ה.1, למשל, או בחישובים ישירים.

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \bar{B}^k(a; \varepsilon) = \left\{ a + u \mid a \in A, u \in \bar{B}^k(0; \varepsilon) \right\} = \varphi(A \times \bar{B}^k(0; \varepsilon))$$

כאשר $\varphi: \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ הפונקציה האפינית שמוגדרת על ידי $(a, u) \mapsto a + u$.

הקבוצות A ו- $\bar{B}^k(0; \varepsilon)$ קמורות ולכן גם מכפלתן $A \times \bar{B}^k(0; \varepsilon)$ קמורה וכך גם תמונתה עלידי הפונקציה האפינית.

סעיף ב דורש מעט יותר תחכום אם לא משתמשים בסדרות. צריך להראות ש- $(A_\varepsilon)^c$

פתוחה. כלומר לכל $x \notin A_\varepsilon$ יש להראות כדור סביבו שזר ל- A_ε .

$$\bar{B}^k(x; \varepsilon) \subseteq A^c \quad : \text{זה ש-} x \notin A_\varepsilon \text{ פירושו ש-} A \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon) = \emptyset \text{ כלומר:}$$

זה כדור סגור שמוכל בקבוצה הפתוחה A^c . נראה שיש כדור פתוח בעל אותו מרכז

$$\bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta) \subseteq A^c \quad : \text{ורדיוס קצת יותר גדול שמוכל בה:}$$

מזה נוכל להסיק ש- $B^k(x; \delta) \subseteq A_\varepsilon^c$ בעזרת שאלה 5.ה.1, למשל: לכל $a \in A$ מתקים

$$B(a; \delta) \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon) = \emptyset \quad : |x - a| \geq \varepsilon + \delta \text{ ולפי סעיף ג של שאלה 5.ה.1:}$$

$$B^k(a; \delta) \cap A_\varepsilon = B^k(a; \delta) \cap \bigcup_{a \in A} \bar{B}^k(a; \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} (B(a; \delta) \cap \bar{B}^k(a; \varepsilon)) = \emptyset \quad : \text{אז}$$

ולכן $B^k(x; \delta) \subseteq A_\varepsilon^c$. ובכך הוכח ש- $(A_\varepsilon)^c$ פתוחה כלומר A_ε סגורה.

נותר להראות שיש $\delta > 0$ כך ש- $\bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta) \subseteq A^c$.

$$A \subseteq \bar{B}^k(x; \varepsilon)^c = \bigcup_{\delta > 0} \bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta)^c \quad : \text{ידוע:}$$

ניקח $K = A \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon + 1)$. זאת קבוצה סגורה כחיתוך קבוצות סגורות אבל היא גם

חסומה כי היא מוכלת בכדור, ולכן היא קומפקטית לפי משפט היינה-בורל.

$$K \subseteq \bigcup_{\delta > 0} \bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta)^c \quad : \text{כמוכן מתקיים}$$

וזה כיסוי של קבוצה קומפקטית בקבוצות פתוחות ולכן יש לו תת-כיסוי סופי:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(x; \varepsilon + \delta_i)^c$$

נוכל להניח גם ללא הגבלת הכלליות ש- $1 \in \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ (אם הוא איננו נוסף אותו).

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}(x; \varepsilon + \delta_i)^c \quad \text{כיוון שבבירור } A \subseteq K \cup \bar{B}^k(x; \varepsilon + 1)^c \text{ נקבל:}$$

$$A \subseteq \bar{B}(x; \varepsilon + \delta)^c \quad \text{עבור } \delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \text{ נקבל}$$

$$\bar{B}(x; \varepsilon + \delta) \subseteq A^c \quad \text{ולכן:}$$

לשאלה 2: ברור ש- $f(a) = \alpha$ נמצא בתמונת f . לפי טענה 2.ט.2 תמונת f היא תת־קבוצה

קשורה־מסילתית של הישר הממשי, ולפי טענה 1.ט.2 היא קמורה, ולפי הערה 1.ג.1 היא קטע או קרן או כל הישר. אם α אינו אחד הקצוות של אותו קטע או קרן אז יש נקודות b ו- c ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{a\}$ כך ש- $f(b) < \alpha < f(c)$.

הקבוצה $\mathbb{R}^k \setminus \{a\}$ קשורה־מסילתית, וזה כתוב בספר אבל רק בפרק 8, שאלה 26.א. אפשר להמשיך גם כך: הקבוצה הסופית $\{a, b, c\}$ חסומה ולכן יש כדור פתוח B שמכיל אותה. לפי שאלה 13.ט.2 הקבוצה $B \setminus \{a\}$ קשורה־מצולעית ולפי טענה 8.ט.2 היא גם קשורה־מסילתית ולכן יש מסילה $\varphi: [\beta, \gamma] \rightarrow B \setminus \{a\}$ כל ש- $\varphi(\beta) = b$ ו- $\varphi(\gamma) = c$. הפונקציה $g = f \circ \varphi: [\beta, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- $[\beta, \gamma]$ לפי טענה 13.ה.2, ומתקיים $g(\beta) = f(\varphi(\beta)) = f(b) < \alpha < f(c) = g(\gamma)$. מאינפי 1 יש $\xi \in (\beta, \gamma)$ כזה ש- $g(\xi) = \alpha$. אז $f(\varphi(\xi)) = \alpha$ ולכן $\varphi(\xi) \in \{a\}$. אבל $\varphi(\xi) \in \varphi([\beta, \gamma]) \subseteq B \setminus \{a\}$ וקיבלנו סתירה. לכן בניגוד להנחה a היא אחד הקצוות של אותו קטע או קרן.

לשאלה 3: עבור $k = 1$ מדובר ב- $f(x) = x \ln|x|$ ואז $f'(x) = 1 + \ln|x|$ עבור $x \neq 0$ ואפשר לבדוק

מההגדרה או ממשפט דארבו שהפונקציה בהכרח לא גזירה ב-0.

עבור $k > 1$ אפשר לבדוק גזירות ב-0 ישירות מההגדרה, ואפשר לבדוק שהנגזרות החלקיות רציפות על שאר המרחב.

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_k \left(\ln(|x_1| + \cdots + |x_k|) - \frac{|x_i|}{|x_1| + \cdots + |x_k|} \right)$$

$$(x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_k = x_1 \cdots x_{i-1} x_{i+1} \cdots x_k$$

לשאלה 4: פונקציית האיסוף $f = (f_1, \dots, f_k)$ גזירה ב- a והגרדיאנטים הנתונים הם שורות

מטריצת היעקוביאן $J_a f$. זאת מטריצה הפיכה כי שורותיה בלתי־תלויות לינארית.

לנוחיות הסימון נסמן $A = J_a f^T$. זאת מטריצה הפיכה. לפי אבחנה 9.ו.3 מתקיים:

$$\frac{f(x)}{|x-a|} - \frac{x-a}{|x-a|} A = \frac{f(x) - (x-a)A}{|x-a|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

לכן לכל $\varepsilon > 0$ יש סביבה נקובה U של a כך שלכל $x \in U$ מתקיים:

$$\left| \frac{f(x)}{|x-a|} - \frac{x-a}{|x-a|} A \right| < \varepsilon$$

הפונקציה $x \mapsto xA$ רציפה בכל המרחב (פונקציה לינארית) ולכן לפי טענה 29.ד.2

מעבירה את ספירת היחידה $S^{k-1}(0;1)$ לקבוצה קומפקטית. הקבוצה הקומפקטית

הזאת אינה מכילה את 0 כי A הפיכה. קבוצה קומפקטית היא סגורה ולכן משלימתה

פתוחה ולכן יש כדור ברדיוס כלשהו r שכולו מחוץ לאותה תמונה. נסיק מכך שלכל

$$\left| \frac{x-a}{|x-a|} A \right| \geq r \quad x \in \mathbf{R}^k \text{ מתקיים:}$$

נבחר עתה $\varepsilon = \frac{1}{2}r$ ואת הסביבה הנקובה המתאימה U של a

$$r - \left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right| \leq \left| \frac{x-a}{|x-a|} A \right| - \left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right| \leq \left| \frac{f(x)}{|x-a|} - \frac{x-a}{|x-a|} A \right| < \frac{1}{2}r \quad \text{ונקבל:}$$

$$\frac{1}{2}r < \left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right| = \frac{|f(x)|}{|x-a|} \Rightarrow \frac{1}{4}r^2 < \frac{|f(x)|^2}{|x-a|^2}$$

$$\sum_{i=1}^k f_i(x)^2 = |f(x)|^2 \neq 0 \quad \text{בפרט לכל } x \in U \text{ מתקיים}$$

ולכן הפונקציה g מוגדרת בסביבה הנקובה U , ולכל $x \in U$ מתקיים

$$|g(x)| = \frac{|x-a|^2}{|f(x)|^2} < \frac{4}{r^2}$$

ולכן g חסומה בסביבה הנקובה U .

לשאלה 5: נשתמש ב- $g: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת עלידי $x \mapsto |x|^2$. לפי דוגמה 5.א.3 היא גזירה בכל

המרחב ו- $\nabla g(x) = 2x$ לכל $x \in \mathbf{R}^l$. לכן מכלל השרשרת $g \circ f$ גזירה בכל נקודה ב- A

$$\nabla g \circ f(a) = \nabla g(f(a)) Jf_a = 2f(a) Jf_a = 0 \quad \text{ומתקיים:}$$

כעת לפי טענה 19.ב.3 $g \circ f$ קבועה בקבוצה A . אז יש c ממשי כך ש- $g \circ f(a) = c$ לכל

$a \in A$. כלומר לכל $a \in A$ מתקיים $|f(a)|^2 = c$ בפרט $c \geq 0$ (למעט אם A ריקה, אבל

אז הטענה טריוויאלית, ולמעשה גם f "קבועה באופן ריק"). נסמן $r = \sqrt{c}$. אז לכל

$a \in A$ מתקיים $|f(a)| = r$. לא יתכן ש- $r = 0$ כי אז $f(a) = 0$ לכל $a \in A$ בניגוד לנתון

ש- f אינה קבועה, ולכן $r > 0$ ולכל $a \in A$ מתקיים $f(a) \in S^{l-1}(0^l; r)$.