

מתווה לפתרון ממ"ן 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
סמסטר: 2023
חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
משקל המטלה: 5 נקודות

לרוב השאלות כמה וכמה דרכי פתרון.
מובאת כאן בדרך כלל דרך אחת, שאינה בהכרח הדרך הטובה ביותר.
לא כל המעברים והחישובים מפורטים. השלימו את הפרטים היכן שחסר.

שאלה 1 (20 נקודות)

יהי $\varepsilon > 0$ ותהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$. נסמן $A_\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^k \mid A \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon) \neq \emptyset\}$. הוכיחו או הפריכו:

א. אם A היא קבוצה פתוחה אז A_ε היא קבוצה פתוחה.

ב. אם A היא קבוצה סגורה אז A_ε היא קבוצה סגורה.

ג. אם A היא קבוצה קמורה אז A_ε היא קבוצה קמורה.

פתרון

שלוש הטענות נכונות. נוכיח את שלושתן.

ראשית נשים לב ש- $x \in A_\varepsilon$ אם ורק אם יש $a \in A$ כך ש- $a \in \bar{B}^k(x; \varepsilon)$ כלומר כך ש- $|x - a| \leq \varepsilon$ וזה

שקול ל- $x \in \bar{B}^k(a; \varepsilon)$, לכן:

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \bar{B}^k(a; \varepsilon)$$

פתרון סעיף א

אם $x \in A_\varepsilon$ אז יש $a \in A$ כך ש- $x \in \bar{B}^k(a; \varepsilon)$ וכיוון ש- A פתוחה יש $B^k(a; r) \subseteq A$ ואז:

$$A_\varepsilon = \bigcup_{b \in A} \bar{B}^k(b; \varepsilon) \supseteq \bigcup_{b \in B^k(a; r)} \bar{B}^k(b; \varepsilon) = \bar{B}^k(a; r + \varepsilon) \supseteq B^k(x; r)$$

כאשר משתמשים בדרך בשאלה 5.ה.1, למשל, או בחישובים ישירים.

פתרון סעיף ב

סעיף ב דורש מעט יותר תחכום מהסעיפים האחרים. צריך להראות ש- $(A_\varepsilon)^c$ פתוחה. כלומר לכל

$x \notin A_\varepsilon$ יש להראות כדור סביבו שזר ל- A_ε .

זה ש- $x \notin A_\varepsilon$ פירושו ש- $A \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon) = \emptyset$ כלומר:

$$\bar{B}^k(x; \varepsilon) \subseteq A^c$$

זה כדור סגור שמוכל בקבוצה הפתוחה A^c . נראה שיש כדור סגור בעל אותו מרכז ורדיוס קצת

יותר גדול שמוכל בה:

$$\bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta) \subseteq A^c$$

מזה נוכל להסיק ש- $\bar{B}^k(x; \delta) \subseteq A_\varepsilon^c$:

לכל $a \in A$ מתקיים $|x - a| > \varepsilon + \delta$ ולפי סעיף ד של שאלה 5.ה.1:

$$\bar{B}^k(a; \delta) \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon) = \emptyset$$

$$\bar{B}^k(a; \delta) \cap A_\varepsilon = \bar{B}^k(a; \delta) \cap \bigcup_{a \in A} \bar{B}^k(a; \varepsilon) = \bigcup_{a \in A} (\bar{B}^k(a; \delta) \cap \bar{B}^k(a; \varepsilon)) = \emptyset \quad \text{אז:}$$

ולכן $\bar{B}^k(x; \delta) \subseteq A_\varepsilon^c$ ובכך הוכח ש- $(A_\varepsilon)^c$ פתוחה כלומר A_ε סגורה.

נותר להראות שיש $\delta > 0$ כך ש- $\bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta) \subseteq A^c$.

$$A \subseteq \bar{B}^k(x; \varepsilon)^c = \bigcup_{\delta > 0} \bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta)^c \quad \text{ידוע:}$$

ניקח $K = A \cap \bar{B}^k(x; \varepsilon + 1)$. זאת קבוצה סגורה כחיתוך קבוצות סגורות אבל היא גם חסומה כי היא מוכלת בכדור, ולכן היא קומפקטית לפי משפט היינה-בורל.

$$K \subseteq \bigcup_{\delta > 0} \bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta)^c \quad \text{כמוכן מתקיים}$$

וזה כיסוי של קבוצה קומפקטית בקבוצות פתוחות ולכן יש לו תת-כיסוי סופי:

$$K \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta_i)^c$$

נוכל להניח גם ללא הגבלת הכלליות ש- $1 \in \{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ (אם הוא איננו נוסף אותו).

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^n \bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta_i)^c \quad \text{כיוון שבבירור } A \subseteq K \cup \bar{B}^k(x; \varepsilon + 1)^c \text{ נקבל:}$$

$$A \subseteq \bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta)^c \quad \text{עבור } \delta = \min\{\delta_1, \dots, \delta_n\} \text{ נקבל}$$

$$\bar{B}^k(x; \varepsilon + \delta) \subseteq A^c \quad \text{ולכן:}$$

פתרון סעיף ג

$$A_\varepsilon = \bigcup_{a \in A} \bar{B}^k(a; \varepsilon) = \left\{ a + u \mid a \in A, u \in \bar{B}^k(0; \varepsilon) \right\} = \varphi(A \times \bar{B}^k(0; \varepsilon)) \quad \text{אפשר לרשום}$$

כאשר $\varphi: \mathbf{R}^k \times \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^k$ היא הפונקציה האפינית שמוגדרת על ידי $(a, u) \mapsto a + u$.

הקבוצות A ו- $\bar{B}^k(0; \varepsilon)$ קמורות (ראו טענה 7.ה.1) ולפי שאלה 16.ג.1 גם מכפלתן $A \times \bar{B}^k(0; \varepsilon)$

קמורה וכך גם תמונתה עלידי הפונקציה האפינית φ .

נראה שתמונת קבוצה קמורה על ידי פונקציה אפינית היא קבוצה קמורה:

תהי A קבוצה קמורה ב- $\mathbf{R}^k$ ותהי $\varphi: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}^l$ פונקציה אפינית. תהיינה $a, b \in \varphi(A)$. אז יש

$$a' = \varphi(a), b' = \varphi(b) \text{ ו-} b = \varphi(b') \text{ לפי טענה 16.ב.1 לכל } \lambda \in [0, 1] \text{ מתקיים:}$$

$$(1 - \lambda)a + \lambda b = (1 - \lambda)\varphi(a') + \lambda\varphi(b') = \varphi((1 - \lambda)a' + \lambda b')$$

לפי טענה 10.ג.1 מתקיים $(1 - \lambda)a' + \lambda b' \in A$ ולכן $(1 - \lambda)a + \lambda b \in \varphi(A)$ ובכך הראינו, לפי טענה

10.ג.1, שהקבוצה $\varphi(A)$ קמורה.

שאלה 2 (20 נקודות)

יהיו $k \geq 2$, a נקודה ב- $\mathbb{R}^k$, α מספר ממשי ו- $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbb{R}^k$. הוכיחו שאם $\{x \mid f(x) = \alpha\} = \{a\}$ אז תמונת הפונקציה f היא קרן או קטע שאחד מקצותיו הוא α .

פתרון

ברור ש- $f(a) = \alpha$ נמצא בתמונת f . לפי טענה 2.ט.2 תמונת f היא תת־קבוצה קשורה־מסילתית של הישר הממשי, לפי טענה 1.ט.2 היא קמורה, ולפי הערה 15.ג.1 היא קטע או קרן או כל הישר.

נניח בשלילה ש- α אינו אחד הקצוות של אותו קטע או קרן.

אז יש נקודות b ו- c ב- $\mathbb{R}^k \setminus \{a\}$ כך ש- $f(b) < \alpha < f(c)$.

הקבוצה הסופית $\{a, b, c\}$ חסומה ולכן יש כדור פתוח B שמכיל אותה. לפי שאלה 13.ט.2

הקבוצה $B \setminus \{a\}$ קשורה־מצולעית ולפי טענה 8.ט.2 היא גם קשורה־מסילתית ולכן יש מסילה

$$\varphi: [\beta, \gamma] \rightarrow B \setminus \{a\} \text{ כל ש-} \varphi(\beta) = b \text{ ו-} \varphi(\gamma) = c.$$

הפונקציה $g = f \circ \varphi: [\beta, \gamma] \rightarrow \mathbb{R}$ רציפה ב- $[\beta, \gamma]$ לפי טענה 13.ה.2, ומתקיים:

$$g(\beta) = f(\varphi(\beta)) = f(b) < \alpha < f(c) = g(\varphi(\gamma)) = g(\gamma)$$

לפי משפט ערך הביניים מאינפי 1 יש $\xi \in (\beta, \gamma)$ כזה ש- $g(\xi) = \alpha$.

אז $f(\varphi(\xi)) = \alpha$ ולכן $\varphi(\xi) \in \{x \mid f(x) = \alpha\} = \{a\}$ כלומר $\varphi(\xi) = a$.

אבל $\varphi(\xi) \in \varphi([\beta, \gamma]) \subseteq B \setminus \{a\}$ וקיבלנו סתירה.

לכן בניגוד להנחה a היא אחד הקצוות של אותו קטע או קרן.

הערה: בפרק 8, שאלה 26.א.8 כתוב שהקבוצה $\mathbb{R}^k \setminus \{a\}$ קשורה־מסילתית וכשנדע את זה נוכל לקצר את ההוכחה.

שאלה 3 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbf{R}^k \rightarrow \mathbf{R}$ שרציפה ב-0 ולכל $x \in \mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ מקיימת: $f(x) = x_1 \cdots x_k \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|)$.
יהי $a \in \mathbf{R}^k$. הוכיחו ש- f אינה גזירה ב- a אם ורק אם $k=1$ ו- $a=0$.

פתרון

עבור $k=1$:

מדובר ב- $f(x) = x \ln|x|$ ואז $f'(x) = 1 + \ln|x|$ עבור $x \neq 0$.

אפשר להראות שהפונקציה לא גזירה ב-0 בשימוש ישיר בהגדרת הנגזרת. נראה זאת בדרך אחרת:

נניח בשלילה שהיא גזירה ב-0. מתקיים

$$f'(x) = 1 + \ln|x| \xrightarrow{x \rightarrow 0^+} -\infty$$

ולכן יש $\delta > 0$ כל שאם $0 < x < \delta$ אז $f'(x) < f'(0)$. יהי $b \in (0, \delta)$ כלשהו. אז $f'(b) < f'(0)$.

יהי $(f'(b), f'(0))$. לפי משפט דארבו (משפט 8.10 באינפי 1) יש $c \in (0, b)$ כך ש- $f'(c) = t$.

אז $t = f'(c) = 1 + \ln c < 1 + \ln b = f'(b) < t$ וקיבלנו סתירה.

עבור $k > 1$:

יש להראות שהפונקציה גזירה בכל נקודה במרחב.

בנקודה $x \neq 0$ נראה שכל הנגזרות החלקיות רציפות ולכן לפי משפט 2.ד.3 היא גזירה שם.

לצורך חישוב הנגזרות החלקיות נשתמש בסימון שדומה לסימון מוכר מאלגברה לינארית: את

המכפלה של כל המשתנים $x_1, \dots, x_n$ למעט x_i נסמן ב- $\widehat{x}_i$.

נסמן גם $g: x \mapsto x_1 \cdots x_k$ ו- $h: x \mapsto f(x) = \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|)$. הצמצום של הפונקציה f

לקבוצה $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$ הוא המכפלה של הפונקציות g ו- h , ולכן את הנגזרת החלקית של f בנקודה

בקבוצה זאת נוכל לקבל בעזרת כלל הגזירה של מכפלה מאינפי 1:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = g \frac{\partial h}{\partial x_i} + h \frac{\partial g}{\partial x_i}$$

הפונקציה g היא פונקציה פולינומית ולכן גם נגזרותיה החלקיות פולינומיות. בפרט הן רציפות.

יתר על כן:

$$\frac{\partial g}{\partial x_i}: x \mapsto \widehat{x}_i \cdots x_k$$

הפונקציה h היא הרכבה של $\ln$ על הפונקציה $|x_1| + \cdots + |x_k|$. הפונקציה האחרונה גזירה לפי

$x_i \neq 0$ כאשר $x_i \neq 0$ ונגזרתה לפי x_i היא 1 או -1 בהתאם לסימן x_i , כלומר היא $\frac{|x_i|}{x_i}$. לכן לפי כלל

השרשרת (מאינפי 1) נקבל:

$$\frac{\partial h}{\partial x_i}: x \mapsto \frac{1}{|x_1| + \cdots + |x_k|} \cdot \frac{|x_i|}{x_i}$$

לכן כאשר $x_i \neq 0$ נקבל:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i} &= g \frac{\partial h}{\partial x_i} + h \frac{\partial g}{\partial x_i} = x_1 \cdots x_k \cdot \frac{1}{|x_1| + \cdots + |x_k|} \cdot \frac{|x_i|}{x_i} + \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|) \cdot x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_k \\ &= x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_k \left(\frac{|x_i|}{|x_1| + \cdots + |x_k|} + \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|) \right)\end{aligned}$$

כאשר $x_i = 0$ (ור- $x \neq 0$) הפונקציה h אינה גזירה לפי x_i אבל במקרה זה נוכל לחשב את $\frac{\partial f}{\partial x_i}$

ישירות. מדובר בנגזרת הכיוונית $\partial_{e_i} f(x)$ שהיא הנגזרת של הפרוסה $f|_{x, e_i}$ בנקודה 0.

$$f|_{x, e_i}(t) = f(x + te_i) = x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_k t \ln(|x_1| + \cdots + |x_k| + |t|) \quad \text{מתקיים}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = \partial_{e_i} f(x) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f|_{x, e_i}(t) - f|_{x, e_i}(0)}{t} \quad \text{ולכן:}$$

$$= \lim_{t \rightarrow 0} x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_k \ln(|x_1| + \cdots + |x_k| + |t|) = x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_k \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|)$$

מאחר שבמקרה זה $x_i = 0$ קיבלנו שגם במקרה זה נכונה הנוסחה:

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} = x_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_k \left(\frac{|x_i|}{|x_1| + \cdots + |x_k|} + \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|) \right)$$

אם כך נוסחה זאת נכונה עבור כל $x \neq 0$, וכיוון שזאת פונקציה יסודית, היא פונקציה רציפה,

כלומר כל הנגזרות החלקיות של f רציפות בכל נקודה ב- $\mathbf{R}^k \setminus \{0\}$, ולכן f גזירה בכל נקודה כזאת.

נותר להראות שהיא גזירה ב-0. נראה ישירות מהגדרת הגזירות (הגדרה 2.א.3) ש- f גזירה ב-0

$$\text{ושי- } \nabla f(0) = 0.$$

לפי הנתון f רציפה ב-0 ובפרט $0 = f(te_1) \xrightarrow{t \rightarrow 0} f(0)$ ולכן בהכרח $f(0) = 0$.

מסיבות של נוחיות בגבול שבהגדרת הגזירות נשתמש באות x במקום h , וכן בעובדה הפשוטה

שפונקציה שואפת לאפס אם ורק אם ערכה המוחלט שואף לאפס:

$$\begin{aligned}\frac{|f(0+x) - f(0) - 0 \cdot x|}{|x|} &= \frac{|f(x)|}{|x|} = \frac{|x_1 \cdots x_k \ln(|x_1| + \cdots + |x_k|)|}{|x|} \\ &= \frac{|x_1|}{|x|} \cdot |x_2| \cdots |x_k| |\ln(|x_1| + \cdots + |x_k|)| \\ &\leq 1 \cdot (|x_1| + \cdots + |x_k|)^{k-1} |\ln(|x_1| + \cdots + |x_k|)| = \varphi(|x_1| + \cdots + |x_k|)\end{aligned}$$

עם הפונקציה $\varphi: t \mapsto t^{k-1} |\ln t|$ את הגבול של הפונקציה הזאת כאשר $t \rightarrow 0^+$ נוכל לחשב בעזרת

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \varphi(t) = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-\ln t}{t^{1-k}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{-t^{-1}}{(1-k)t^{-k}} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{t^{k-1}}{k-1} = \frac{0^{k-1}}{k-1} = 0 \quad \text{כלל לופיטל:}$$

$$\frac{|f(0+x)-f(0)-0\cdot x|}{|x|} \leq \varphi(|x_1|+\dots+|x_k|) \xrightarrow{x\rightarrow 0} 0$$

לכן

$$\frac{f(0+x)-f(0)-0\cdot x}{|x|} \xrightarrow{x\rightarrow 0} 0$$

ובעזרת כלל הכריך

ולפי הגדרה 2.א.3 f גזירה ב- $0^{[k]}$ והגרדיאנט הוא $\nabla f(0)=0^{[k]}$.

שאלה 4 (20 נקודות)

יהי k מספר טבעי ו- $a \in \mathbb{R}^k$. עבור $i=1, \dots, k$ נניח ש- f_i היא פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה בנקודה a , שמתקיים $f_i(a)=0$, ושהגרדיאנטים $\nabla f_1(a), \dots, \nabla f_k(a)$ הם וקטורים בלתי-תלויים לינארית. הראו שיש סביבה נקובה של הנקודה a שבה הפונקציה החלקית המוגדרת על ידי

$$g: x \mapsto \frac{|x-a|^2}{\sum_{i=1}^k f_i(x)^2}$$

חסומה (ובפרט שהפונקציה g מוגדרת באותה סביבה נקובה של a).

פתרון

לפי שאלה 11.1.3 פונקציית האיסוף $f = (f_1, \dots, f_k)$ גזירה ב- a והגרדיאנטים הנתונים הם שורות מטריצת היעקוביאן $J_a f$. זאת מטריצה הפיכה כי היא ריבועית ושורותיה בלתי-תלויות לינארית. כמובן $f(0)=0$. לנוחיות הסימון נסמן $A = J_a f^T$. זאת מטריצה הפיכה.

$$\frac{f(x)}{|x-a|} - \frac{x-a}{|x-a|} A = \frac{f(x) - f(0) - (x-a)A}{|x-a|} \xrightarrow{x \rightarrow a} 0$$

לפי אבחנה 9.1.3 מתקיים:

$$g: x \mapsto \frac{|x-a|^2}{|f(x)|^2} = \left(\frac{|f(x)|}{|x-a|} \right)^{-2} = \left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right|^{-2}$$

נשים לב ש- $\sum_{i=1}^k f_i(x)^2 = |f(x)|^2$ כלומר:

$$\left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right| > \delta$$

אם יש $\delta > 0$ וסביבה נקובה U של a כך שלכל $x \in U$ מתקיים

אז גם $0 < g(x) < \delta^{-2}$ כלומר g חסומה בסביבה הנקובה U . נותר להראות שיש כאלה δ ו- U .

$$\left| \frac{f(x)}{|x-a|} - \frac{x-a}{|x-a|} A \right| < \varepsilon$$

לכל $\varepsilon > 0$ יש סביבה נקובה U של a כך שלכל $x \in U$ מתקיים:

$$\left| \frac{f(x)}{|x-a|} - \frac{x-a}{|x-a|} A \right| \geq \left| \frac{x-a}{|x-a|} A \right| - \left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right|$$

מתקיים

$$\left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right| > \left| \frac{x-a}{|x-a|} A \right| - \varepsilon$$

ולכן לכל $x \in U$ מתקיים $\left| \frac{x-a}{|x-a|} A \right| - \varepsilon > \left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right|$ ומכאן:

את ε עדיין לא קבענו, ונרצה לקבוע אותו באופן שאגף שמאל יהיה גדול מאיזשהו δ חיובי.

נשים לב ש- $\frac{x-a}{|x-a|}$ הוא וקטור יחידה, כלומר איבר של $S^{k-1}(0;1)$, וזאת קבוצה קומפקטית.

הפונקציה $x \mapsto xA$ רציפה בכל המרחב (פונקציה לינארית) ולכן לפי טענה 29.ד.2 מעבירה את

ספירת היחידה לקבוצה קומפקטית. הקבוצה הקומפקטית הזאת אינה מכילה את 0 כי A

הפיכה. קבוצה קומפקטית היא סגורה ולכן משלימתה פתוחה ולכן יש כדור ברדיוס כלשהו r

$$\left| \frac{x-a}{|x-a|} A \right| \geq r$$

שכולו מחוץ לאותה תמונה. נסיק מכך שלכל $x \in \mathbb{R}^k$ מתקיים:

נבחר עתה $\varepsilon = \frac{1}{2}r$ ואת הסביבה הנקובה המתאימה U של a ונסמו גם $\delta = \frac{1}{2}r$ ונקבל:

$$\left| \frac{f(x)}{|x-a|} \right| > \left| \frac{x-a}{|x-a|} A \right| - \varepsilon \geq r - \varepsilon = \delta$$

וכאמור קודם זה מבטיח ש- g חסומה בסביבה הנקובה U של a .

שאלה 5 (20 נקודות)

תהי A קבוצה פתוחה וקשורה-מסילתית ב- $\mathbf{R}^k$. תהי $f: A \rightarrow \mathbf{R}^l$ פונקציה שגזירה ב- A ואינה פונקציה קבועה. נתון שלכל $a \in A$ הוקטור $f(a)$ מאונך לכל עמודות מטריצת היעקוביאן Jf_a , ובמילים אחרות מתקיים $f(a) \cdot Jf_a^T = 0$. הוכיחו שיש $r > 0$ כך שתמונת הפונקציה f מוכלת בספירה $S^{l-1}(0^{[l]}; r)$. (מומלץ להיעזר בפונקציה מדוגמה 5.א.3).

פתרון

נשתמש בפונקציה $g: \mathbf{R}^l \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת עלידי $x \mapsto |x|^2$. לפי דוגמה 5.א.3 היא גזירה בכל המרחב ו- $\nabla g(x) = 2x$ לכל $x \in \mathbf{R}^l$. לכן מכלל השרשרת $g \circ f$ גזירה בכל נקודה ב- A ומתקיים:

$$\nabla g \circ f(a) = \nabla g(f(a)) \cdot Jf_a^T = 2f(a) \cdot Jf_a^T = 0$$

כעת לפי טענה 19.ב.3 $g \circ f$ קבועה בקבוצה A . אז יש c ממשי כך ש- $g \circ f(a) = c$ לכל $a \in A$, כלומר לכל $a \in A$ מתקיים $|f(a)|^2 = c$. בפרט $c \geq 0$ (למעט אם A ריקה, אבל אז הטענה טריוויאלית, ולמעשה גם f "קבועה באופן ריק"). נסמן $r = \sqrt{c}$. אז לכל $a \in A$ מתקיים $|f(a)| = r$. לא יתכן ש- $r = 0$ כי אז $f(a) = 0$ לכל $a \in A$ בניגוד לנתון ש- f אינה קבועה, ולכן $r > 0$ ולכל $a \in A$ מתקיים $f(a) \in S^{l-1}(0^{[l]}; r)$.