

האוניברסיטה הפתוחה

20224

חשבון אינפיניטסימלי 3

חוברת הקורס - אביב 2022ב

כתב: ד"ר עופר הדס

פברואר 2022 - סמסטר אביב - תשפ"ב

פנימי – לא להפצה.

© כל הזכויות שמורות לאוניברסיטה הפתוחה.

תוכן העניינים

א	אל הסטודנטים
ב	לוח זמנים ופעילויות
ג	התנאים לקבלת נקודות זכות
1	ממ"ח 01
2	ממ"ן 11
4	ממ"ח 02
5	ממ"ן 12
7	ממ"ן 13
9	ממ"ן 14
11	ממ"ן 15

אל הסטודנטים,

אנו שמחים לקדם את פניכם עם הצטרפותכם אל לומדי הקורס חשבון אינפיניטסימלי 3.

חוברת זאת כוללת פרטים שעליכם לדעת, כדי שתוכלו לבצע את המוטל עליכם בלימוד קורס זה. פרטים חשובים נוספים כלולים בחוברת "השלמות לחוברת הקורס", שניתן לצפות בתוכנה באתר הקורס באינטרנט.¹

עם קבלת חומר הלימוד בקורס עליכם להתחיל בלימוד עצמי, בקצב המותאם ללוח הזמנים שבהמשך חוברת זאת. בזמנים המומלצים בלוח הזמנים ללימוד יחידות הלימוד כלול גם הזמן הנדרש לפתרון והגשת המטלות. תכננו את זמנכם באופן שיאפשר לכם להגיש את המטלות במועדי ההגשה שנקבעו. מפגשי ההנחיה מתוכננים לפי לוח הזמנים ובהנחה שעיינתם בחומר הלימוד המתאים לפני כל מפגש.

לקורס אתר אינטרנט. חלק מהמטלות להגשה יש לפתור באתר הקורס באינטרנט ("מטלות אופל"). מטלות המנחה (הממ"נים) נמצאות בחוברת זאת (שגם עותק שלה נמצא באתר הקורס).

אתר הקורס מהווה עבורכם גם ערוץ תקשורת עיקרי עם צוות ההוראה ועם סטודנטים אחרים בקורס. כאשר יהיו לכם רעיונות או שאלות בנושאי הלימוד, **העלו אותם לדיון בפורום שבאתר הקורס.**

הודעות, עדכונים ותיקונים למטלות, אם יהיו כאלה, יתפרסמו באתר הקורס.

צוות הקורס מעוניין לעזור לכם בלימודים. לכן, אם התעוררה בעיה או שאלה במהלך הלימוד, אל תהססו לפנות אלינו בהקדם. עומדות לרשותכם דרכי ההתקשרות הבאות:

- קבוצת דיון באתר הקורס.
- דואר אלקטרוני למרכז ההוראה בכתובת oferh@openu.ac.il.
- טלפון למרכז ההוראה בקורס, ד"ר עופר הדס, בימי ב' בין השעות 11:00-13:00.
- טלפון למנחי הקבוצות בשעות ההנחיה הטלפונית המפורטות יחד עם לוח המפגשים.
- פניה למנחה בדואר אלקטרוני.
- פניה למנחה במפגש ההנחיה.

אנו מאחלים לכם לימוד מהנה ומוצלח.

בברכה, צוות הקורס.

¹ פרטים על למידה מתוקשבת ואתר הקורס תמצאו באתר שה"ם בכתובת <http://telem.openu.ac.il>. מידע על שירותי הספרייה ומקורות מידע שהאוניברסיטה מעמידה לרשותכם תמצאו באתר הספרייה בכתובת

<http://www.openu.ac.il/Library>

לוח זמנים ופעילויות (2022 \ 2024 ב)

שבוע לימוד	תאריכי שבוע הלימוד	יחידת הלימוד המומלצת (כולל פתרון המטלות בנושא)	מועדי משלוח המטלות	מפגשי הנחיה *
1	4.3.2022–27.2.2022	פרק 1	הגישו את מטלה 01 באתר הקורס עד 25.3.2022 הגישו את ממ"ן 11 למנחה עד 25.3.2022	
2	11.3.2022–6.3.2022	פרק 2		
3	18.3.2022–13.3.2022	פרק 3		
4	25.3.2022–20.3.2022			
5	1.4.2022–27.3.2022	פרק 4	הגישו את מטלה 02 באתר הקורס עד 20.4.2022 הגישו את ממ"ן 12 למנחה עד 20.4.2022	
6	8.4.2022–3.4.2022	פרק 5		
7	15.4.2022–10.4.2022	פרק 6		
8	22.4.2022–17.4.2022 (א–ו פסח)	פרק 7		
9	29.4.2022–24.4.2022 (ה יום הזכרון לשואה)	פרק 8	הגישו את ממ"ן 13 למנחה עד 3.5.2022	
10	6.5.2022–1.5.2022 (ד יום הזכרון, ה יום העצמאות)	פרק 9	הגישו את ממ"ן 14 למנחה עד 25.5.2022	
11	13.5.2022–8.5.2022			
12	20.5.2022–15.5.2022 (ה ל"ג בעומר)			
13	27.5.2022–22.5.2022			
14	3.6.2022–29.5.2022	פרק 10	הגישו את ממ"ן 15 למנחה עד 10.6.2022	
15	10.6.2022–5.6.2022 (א שבועות)			

מועדי בחינות הגמר יפורסמו בנפרד

* התאריכים המדויקים של המפגשים הקבוצתיים, מופיעים ב"לוח מפגשים ומנחים".

תנאים לקבלת נקודות זכות

התנאים לקבלת נקודות זכות בקורס הם :

(1) עליכם להגיש מטלות שמשקלן הכולל לפחות 15 נקודות.

(2) עליכם לקבל בבחינת הגמר ציון 60 לפחות.

(3) עליכם לקבל בציון הסופי 60 נקודות לפחות.

הערות חשובות לתשומת לבכם!

פתרון המטלות הוא מרכיב מרכזי בתהליך הלמידה, לכן מומלץ שתשתדלו להגיש מטלות רבות ככל האפשר, כולל מטלות שעליהן אתם מצליחים להשיב רק באופן חלקי.

כדי לעודדכם להגיש לבדיקה מספר רב של מטלות הנהגנו הקלה כדלהלן:

בחישוב הציון הסופי נשקלל את כל המטלות שציוניהן גבוהים מהציון בבחינת הגמר. ציוני מטלות כאלה תורמים לשיפור הציון הסופי.

ליתר המטלות נתייחס במידת הצורך בלבד. מתוכן נבחר רק את הטובות ביותר עד להשלמת המינימום ההכרחי לעמידה בתנאי הגשת מטלות. משאר המטלות נתעלם.

זכרו! ציון סופי מחושב רק לסטודנטים שעברו את בחינת הגמר בציון 60 ומעלה והגישו מטלות כנדרש באותו קורס.

מותר, ואפילו מומלץ לדון עם עמיתים, ועם סגל ההוראה של הקורס על נושאי הלימוד ועל השאלות המופיעות במטלות. עם זאת, מטלה שסטודנט מגיש לבדיקה אמורה להיות פרי עמלו. הגשת מטלה שפתרונה אינו עבודה עצמית, או שלא נוסחה אישית על-ידי המגיש היא עבירת משמעת.

עליכם להשאיר לעצמכם העתק של המטלה.

אין האוניברסיטה הפתוחה אחראית

למטלה שתאבד בשל תקלות בדואר.

מטלת אופל 01

סמסטר : 2022ב

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3

משקל המטלה : 2 נקודות

חומר הלימוד למטלה : פרקים 1–3

מועד אחרון להגשה : 25.3.2022

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס.

כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו את ההוראות בגוף המטלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 11

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 1–3
 מספר השאלות: 6
 מועד אחרון להגשה: 25.3.2022
 סמסטר: 2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (16 נקודות)

תהי $A \subseteq \mathbb{R}^k$. הוכיחו או הפריכו כל אחת מהטענות:

א. אם A קמורה אז $A \cup \partial A$ קמורה.
 ב. אם $A \cup \partial A$ קמורה אז A קמורה.
 ג. אם A קמורה אז $A \setminus \partial A$ קמורה.
 ד. אם $A \setminus \partial A$ קמורה אז A קמורה.

שאלה 2 (16 נקודות)

יהי $k \geq 2$ ו- $a \in \mathbb{R}^k$. תהי $f: \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה שרציפה ב- $\mathbb{R}^k$.
 הוכיחו שיש $u \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ כך שהפרוסה $f|_{a,u}$ אינה פונקציה חד-חד-ערכית.

שאלה 3 (20 נקודות)

הוכיחו שהקבוצה $\left\{ (x_1, \dots, x_k) \mid \sum_{i=1}^k x_i^{2i} = 1 \right\}$ היא משטחעל ב- $\mathbb{R}^k$.
 המלצה: במקום להוכיח זאת ישירות מההגדרה, כדאי לנסות להיעזר במשטחיעל מוכרים.

שאלה 4 (16 נקודות)

יהי $k > 1$ מספר איזוגי. תהי φ פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה ב-0.
 תהי f הפונקציה החלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ שמוגדרת כך: $f: (x_1, \dots, x_k) \mapsto \varphi(\sqrt[k]{x_1 \cdots x_k})$
 חשבו את כל הנגזרות הכיווניות של f ב- $0^{[k]}$ והוכיחו ש- f גזירה ב- $0^{[k]}$ אם ורק אם $\varphi'(0) = 0$.

שאלה 5 (16 נקודות)

תהי $B \in M_{k \times k}(\mathbb{R})$ ותהי $f: M_{k \times k}(\mathbb{R}) \rightarrow M_{k \times k}(\mathbb{R})$ שמוגדרת כך: $A \mapsto \sum_{m=1}^{2022} (A^m B^m - B^m A^m)$
 הראו ש- f גזירה ב-0 ומצאו את הפונקציה הלינארית Df_0 . (ראו הגדרה 1.1.3 והערה 1.1.1.)
 אוסף המטריצות $M_{k \times k}(\mathbb{R})$ מזוהה עם המרחב $\mathbb{R}^{k^2}$ וב-0 הכוונה היא למטריצת האפס.

שאלה 6 (16 נקודות)

תהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^2$ ל- $\mathbb{R}$ שגזירה בסביבה של הנקודה $(1,1)$ ובעלת התכונות:

• יש סביבה של $(1,1)$ שלכל (x,y) בה מתקיים: $y^2 \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + y \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) + 2f(x,y) = 0$

• יש סביבה של 1 שלכל t שנמצא בה מתקיים: $f(t^2, t) = \cos t$

הוכיחו שיש סביבה של $(1,1)$ ופונקציה יסודית ששווה ל- f בסביבה זאת, ומצאו נוסחה ל- f

שנכונה בסביבה זאת. (הדרכה: היעזרו בנגזרות החלקיות של הפונקציה $\varphi: (s,t) \mapsto t^2 f(s + 2t^2, 2t)$).

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת אופל 02

הקורס : 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
חומר הלימוד למטלה : פרקים 4–7
סמסטר : 2022
משקל המטלה : 2 נקודות
מועד אחרון להגשה : 20.4.2022

מטלת אופל נמצאות באתר הקורס.

כדי להגיש מטלת אופל היכנסו אליה באתר הקורס, ומלאו את ההוראות בגוף המטלה.

מטלת מנחה (ממ"ן) 12

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 חומר הלימוד למטלה: פרקים 4–7
 מספר השאלות: 6
 סמסטר: 2022
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מועד אחרון להגשה: 20.4.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")

- באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
- באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (15 נקודות)

תהי $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} x(y-1) & x \leq y \\ (x-1)y & x > y \end{cases}$$

תהי $v: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ פונקציה רציפה, ונגדיר פונקציה $u: [0,1] \rightarrow \mathbb{R}$ על ידי:

$$t \mapsto \int_0^1 g(x, t) v(x) dx$$

הוכיחו ש- u גזירה פעמיים בקטע $(0,1)$ ומתקיים $u''(t) = v(t)$ לכל $t \in (0,1)$.

שאלה 2 (15 נקודות)

בשאלה זאת נשתמש בעובדה אחת שמוכחת בקורס אלגברה לינארית 2: מטריצה ממשית סימטרית היא לכסינה, ובעובדה נוספת מהקורס אלגברה לינארית 1: למטריצות דומות אותה עקבה. הראו שמעובדות אלה נובע שאם A היא מטריצה סימטרית חיובית ו- $\text{tr } A = 0$ אז $A = 0$. נעבור לעיקר השאלה:

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$. פונקציה חלקית מ- $\mathbb{R}^k$ ל- $\mathbb{R}$ נקראת פונקציה הרמונית בקבוצה

הפתוחה U אם היא גזירה פעמיים ברציפות ב- U ומתקיים $\sum_{i=1}^k \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(a) = 0$ לכל $a \in U$.

הוכיחו שאם f פונקציה הרמונית ב- U ובנוסף לכל $a \in U$ מתקיים $\nabla f(a) \neq 0$ או $Hf_a \neq 0$ אז

$f(A)$ היא קבוצה פתוחה.

הערה: אפשר להוכיח שאם f הרמונית ואינה קבועה אז $f(U)$ פתוחה, גם ללא ההנחות הנוספות שהנחנו כאן, באמצעים שנלמדים בקורס משוואות דיפרנציאליות חלקיות, או באמצעים שנלמדים בקורס פונקציות מרוכבות.

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $k \geq 3$, ונסמן $x = (x_1, \dots, x_k)$.

קבעו עבור אילו זוגות של אינדקסים i ו- j המשוואה $|x| - \cos(x_j) = 0$ מגדירה באופן סתום

את x_i כפונקציה של שאר רכיבי x בסביבה של הנקודה $e_1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^k$.

נמקו היטב מדוע עבור זוגות אלה המשוואה מגדירה פונקציה, ומדוע בכל שאר המקרים היא אינה מגדירה פונקציה.

שאלה 4 (15 נקודות)

תהיינה S_1 ו- S_2 יריעות חלקות ב- $\mathbb{R}^k$. תהי $a \in S_1 \cap S_2$.

הוכיחו שאם $T_a(S_1) \cap T_a(S_2) = \{0\}$ אז יש סביבה U של a כך ש- $U \cap S_1 \cap S_2 = \{a\}$.

הפריכו את הטענה ההפוכה בעזרת דוגמה נגדית.

שאלה 5 (15 נקודות)

למטריצה A מסדר $(k-1) \times k$ נסמן ב- A_i את המטריצה מסדר $(k-1) \times (k-1)$ שמתקבלת

ממחיקת העמודה ה- i של המטריצה A . נסמן: $\xi(A) = (\det A_1, -\det A_2, \dots, (-1)^{k-1} \det A_k)$

תהי U קבוצה פתוחה ב- $\mathbb{R}^k$. תהי $f: U \rightarrow \mathbb{R}$ שגזירה ב- U ותהי $\varphi: U \rightarrow \mathbb{R}^{k-1}$ שגזירה

ברציפות ב- U . הוכיחו שאם a היא נקודת קיצון של f בקבוצה $\{x \in U \mid \varphi(x) = 0^{[k-1]}\}$ אז

הוקטור $\nabla f(a)$ ניצב לוקטור $\xi(J\varphi_a)$. (היזכרו בנוסחת הפיתוח של דטרמיננטה).

שאלה 6 (20 נקודות)

תהי $f: (0, \infty)^3 \rightarrow \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי: $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{x^2 y^3 z^5}$

הראו שיש ל- f ערך מזערי בקבוצה $D = \{(x, y, z) \in (0, \infty)^3 \mid x \geq y, x^4 + y^4 + z^4 \leq 1\}$

ומצאו אותו.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 13

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרק 8
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 3.5.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ ו- $\mu: [\alpha, \beta] \rightarrow M_{k \times l}(\mathbb{R})$ מסילות שאורכן סופי. תהי: $\psi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^l$
 $t \mapsto \varphi(t)\mu(t)$

- הוכיחו כי ψ היא מסילה שאורכה סופי. (מומלץ להיעזר במגוון משפטים).
- אם φ ו- μ הן מסילות סדירות, האם גם ψ היא מסילה סדירה?
- מרחב המטריצות $M_{k \times l}(\mathbb{R})$ מזוהה כרגיל עם המרחב האוקלידי $\mathbb{R}^{kl}$. ראו הערה 1.א.ג.

שאלה 2 (20 נקודות)

- תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}^k$ פונקציה בעלת התכונה: אם $\alpha \leq x < y \leq \beta$ אז $|\varphi(y) - \varphi(x)| < y - x$.
- הוכיחו ש- φ היא מסילה ושאורכה סופי, ומתקיים $L(\varphi) \leq \beta - \alpha$.
 - הוכיחו שאם $L(\varphi) = \beta - \alpha$ ו- $[x, y] \subseteq [\alpha, \beta]$ אז $L(\varphi|_{[x, y]}) = y - x$.
 - הסיקו שאם $L(\varphi) = \beta - \alpha$ אז אין קטע $[x, y] \subseteq [\alpha, \beta]$ עבורו $\varphi|_{[x, y]}$ שקולה למסילה אפינית. (מסילה אפינית: כזאת שהיא צמצום של פונקציה אפינית).
 - הדגימו מסילה המקיימת את הנחות והשאלה ושעבורה $L(\varphi) = \beta - \alpha$.

שאלה 3 (20 נקודות)

- הגרף של הפונקציה $f: [\alpha, \beta] \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ הוא תמונת מסילה פשוטה וסדירה במישור. מצאו את המרכז הגיאומטרי של מסילה זאת.
- הערה: הפונקציה הזאת נקראת קוסינוס היפרבולי, ונהוג לסמן $\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$.
- נגזרתה נקראת פונקציית הסינוס ההיפרבולי ומסומנת $\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$.
- כל אחת משתי הפונקציות האלה היא הנגזרת של האחרת, ויש ביניהן קשרים רבים, כגון $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

תהי $f: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה הומוגנית חיובית ממעלה -2 ותהי $F: \mathbf{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \rightarrow \mathbf{R}^2$ המוגדרת על ידי:

$$F(x, y) \mapsto f(x, y) \cdot (-y, x)$$

לכל מספר שלם n תהי φ_n לולאה בעלת מספר ליפוף n סביב הראשית. הוכיחו:

$$\oint_{\varphi_n} F(x, y) \cdot d(x, y) = n \int_{-\pi}^{\pi} f(\cos \theta, \sin \theta) d\theta$$

שאלה 5 (20 נקודות)

הראו כי הפונקציה

$$(x, y) \mapsto \frac{e^x}{x^2 + y^2} (x \sin y - y \cos y, y \sin y + x \cos y)$$

אינה שדה משמר בקבוצה: $((-2021, 2021) \times (-2021, 2021)) \setminus ([-2020, 2020] \times [-2020, 2020])$

המלצה: ראשית כדאי להראות שהפונקציה היא שדה משמר בכל קבוצה פתוחה ופשוטת־קשר בה היא מוגדרת.

▶▶▶ סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 משקל המטלה: 6 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 25.5.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")	
•	באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
•	באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה אינטגרבילית ב- $[0,1]$. הוכיחו שהפונקציה $g: \bar{B}^k(0^{[k]};1) \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי $g(x) = f(|x|)$ אינטגרבילית ב- $\bar{B}^k(0^{[k]};1)$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה בעלת נפח ב- $\mathbf{R}^k$ ותהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbf{R}^k$ ל- $\mathbf{R}$ שרציפה בסביבה של $0^{[k]}$.
 לכל $\lambda > 0$ נסמן $\lambda A = \{ \lambda a \mid a \in A \}$. הוכיחו ש- λA היא קבוצה בעלת נפח וש- $\text{vol}_k(A) \neq 0$.
 אז:
$$\frac{1}{\lambda^k \text{vol}_k(A)} \int_{\lambda A} f \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} f(0^{[k]})$$

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $\varphi: B(0^{[k]};1) \rightarrow \mathbf{R}^k$ דיפאומורפיזם ונניח שמתקיים $\varphi(B(0^{[k]};1)) = B(0^{[k]};1)$.
 הראו שיש $x \in B(0^{[k]};1)$ כך ש- $|\det J\varphi_x| = 1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תהי A קבוצה בעלת נפח ב- $\mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי:

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) + \sin^2(\pi z)}$$

הוכיחו ש- f אינטגרלית בקבוצה $A \setminus \mathbb{Z}^3$ או לחילופין האינטגרל המוכלל של f בקבוצה

$$A \setminus \mathbb{Z}^3 \text{ מתכנס. (מומלץ לבחון קודם סביבה נחמדה של הראשית כגון } B^3(0;1) \text{ או } [-1,1]^3).$$

ב. תהי A קבוצה בעלת שטח ב- $\mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי:

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)}$$

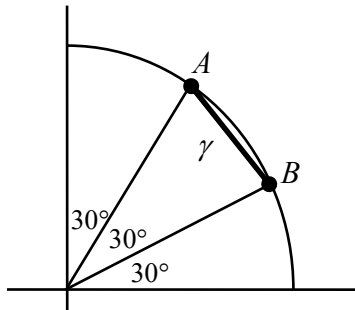
הוכיחו שאם A היא סביבה של $(0,0)$ אז האינטגרל המוכלל של f בקבוצה $A \setminus \mathbb{Z}^2$ אינו מתכנס.

שאלה 5 (20 נקודות)

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad Q(x, y) = \frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{נסמן:}$$

חשבו את $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$ כאשר φ היא מסילה פשוטה

שתמונתה הקטע הישר AB באיור שלפניכם (עם התחלה ב- A וסיום ב- B). היעזרו במשפט גרין כדי להמיר את החישוב בחישוב אינטגרל לאורך קשת המעגל (רדיוס המעגל הוא R).



►►► סוף המטלה

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרק 10
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 10.6.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה f ו- g הפונקציות המוגדרות בשאלה 1 בממ"ן 14.

$$\int_{\bar{B}^k(0;1)} g = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^1 f(t) t^{k-1} dt$$

הוכיחו ש:

רעיון: אם f רציפה זה (כמעט) מוכח בספר. אחרת נצלו את מונוטוניות האינטגרל וסכומי דרךבו מתאימים.

שאלה 2 (20 נקודות)

$$\sigma_2(S) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4} + \sin t \right)^{\frac{3}{2}} dt - \frac{\pi}{12}$$

תהי $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, x + y + z \leq 0\}$. הוכיחו ש:

מומלץ להיעזר בשיעורים קוטביים.

שאלה 3 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל $\iint_S x \cdot N(x) d\sigma_2$ כאשר S כמו בשאלה 2 ו- N הוא נורמל היחידה למשטח

חלק המכיל את S הפונה "כלפי מעלה", כלומר הרכיב השלישי שלו חיובי.

הערה: אפשר לחשב ישירות, או לנצל את משפט הדיברגנץ עם קבוצה מתאימה.

שאלה 4 (20 נקודות)

$$\iint_S x e^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz + e^z dx \wedge dy$$

יהי $r > 0$. חשבו את האינטגרל

$$S = \{(x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x e^z + y e^{-z} + z = 1\}$$

כאשר

והאוריינטציה של משטח שמכיל את S מתאימה לנורמל יחידה רציף שכל רכיביו אישיליים.

המלצה: במקום לחשב את האינטגרל באופן ישיר, מומלץ לנצל את משפט הדיברגנץ.

שאלה 5 (20 נקודות)

יהי (Ω, h) מיפוי מ- $\mathbf{R}^2$ ל- $\mathbf{R}^3$ כך ששלושת רכיבי הפונקציה h הם פונקציות גזירות פעמיים ברציפות בקבוצה הפתוחה Ω , ויהי N נורמל היחידה הרציף שמשרה מיפוי זה. תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ לולאה פשוטה וסדירה שתמונתה היא ∂K ואשר K שוכנת לשמאלה.

יהי $u \in \mathbf{R}^3$ וקטור קבוע. הוכיחו:

$$\iint_{h(K)} u \cdot N d\sigma_2 = \frac{1}{2} \int_{h \circ \varphi} (u \times x) \cdot dx$$

▶▶▶ סוף המטלה