

מטלת מנחה (ממ"ן) 15

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרק 10
 משקל המטלה: 5 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 10.6.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה") - באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן). - באמצעות מערכת המטלות המקוונת.
--

שאלה 1 (20 נקודות)

תהינה f ו- g הפונקציות המוגדרות בשאלה 1 בממ"ן 14.

$$\int_{\bar{B}^k(0;1)} g = \frac{2\pi^{\frac{k}{2}}}{\Gamma(\frac{k}{2})} \int_0^1 f(t) t^{k-1} dt$$

הוכיחו ש:

רעיון: אם f רציפה זה (כמעט) מוכח בספר. אחרת נצלו את מונוטוניות האינטגרל וסכומי דרךבו מתאימים.

שאלה 2 (20 נקודות)

$$\sigma_2(S) = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4} + \sin t \right)^{\frac{3}{2}} dt - \frac{\pi}{12}$$

תהי $S = \{(x, y, z) \mid z = x^2 + y^2, x + y + z \leq 0\}$. הוכיחו ש:

מומלץ להיעזר בשיעורים קוטביים.

שאלה 3 (20 נקודות)

חשבו את האינטגרל $\iint_S x \cdot N(x) d\sigma_2$ כאשר S כמו בשאלה 2 ו- N הוא נורמל היחידה למשטח

חלק המכיל את S הפונה "כלפי מעלה", כלומר הרכיב השלישי שלו חיובי.

הערה: אפשר לחשב ישירות, או לנצל את משפט הדיברגנץ עם קבוצה מתאימה.

שאלה 4 (20 נקודות)

$$\iint_S x e^y dy \wedge dz + e^y dx \wedge dz + e^z dx \wedge dy$$

יהי $r > 0$. חשבו את האינטגרל

$$S = \{(x, y, z) \in [0, \infty)^3 \mid x e^z + y e^{-z} + z = 1\}$$

כאשר

והאוריינטציה של משטח שמכיל את S מתאימה לנורמל יחידה רציף שכל רכיביו אישיליים.

המלצה: במקום לחשב את האינטגרל באופן ישיר, מומלץ לנצל את משפט הדיברגנץ.

שאלה 5 (20 נקודות)

יהי (Ω, h) מיפוי מ- $\mathbf{R}^2$ ל- $\mathbf{R}^3$ כך ששלושת רכיבי הפונקציה h הם פונקציות גזירות פעמיים ברציפות בקבוצה הפתוחה Ω , ויהי N נורמל היחידה הרציף שמשרה מיפוי זה. תהי $\varphi: [\alpha, \beta] \rightarrow \Omega$ לולאה פשוטה וסדירה שתמונתה היא ∂K ואשר K שוכנת לשמאלה.

יהי $u \in \mathbf{R}^3$ וקטור קבוע. הוכיחו:

$$\iint_{h(K)} u \cdot N d\sigma_2 = \frac{1}{2} \int_{h \circ \varphi} (u \times x) \cdot dx$$

▶▶▶ סוף המטלה

הערות

שאלה 1: אפשר לחסום את f בין שתי פונקציות שקבועות על קטעי חלוקה, וכך לקבל הערכות ל- g בעזרת הנוסחה משאלה 10.ג.23. בעיקרון צריך גם להפריד סביבה קטנה של הראשית.

שאלה 2: אפשר לבדוק ש- $S = G\left(g \mid \bar{B}^2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)$ עם: $g: (x, y) \mapsto x^2 + y^2$

$$\sigma_2(S) = \iint_{\bar{B}^2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \sqrt{1 + |\nabla g(x, y)|^2} dx dy \quad \text{אז:}$$

$$= \iint_{\bar{B}^2\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy = \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int_0^{-\cos\theta - \sin\theta} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr \right) d\theta$$

מחשבים:

$$\int \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr = \frac{1}{12} (1 + 4r^2)^{\frac{3}{2}} \\ \int_0^{-\cos\theta - \sin\theta} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr = \frac{1}{12} \left(1 + 4(\cos\theta + \sin\theta)^2 \right)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12} = \frac{1}{12} (5 + 4\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}$$

מציבים חזרה:

$$\begin{aligned} \sigma_2(S) &= \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int_0^{-\cos\theta - \sin\theta} \sqrt{1 + 4r^2} \cdot r dr \right) d\theta = \frac{1}{12} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} (5 + 4\sin 2\theta)^{\frac{3}{2}} d\theta - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \frac{1}{12} d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\frac{5}{4} + \sin 2\theta \right)^{\frac{3}{2}} d\theta - \frac{\pi}{12} \stackrel{[t=2\theta]}{=} \frac{1}{3} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{2}\pi} \left(\frac{5}{4} + \sin t \right)^{\frac{3}{2}} dt - \frac{\pi}{12} \\ &= \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \left(\frac{5}{4} + \sin t \right)^{\frac{3}{2}} dt - \frac{\pi}{12} \end{aligned}$$

שאלה 3: חישוב ישיר עובד. נורמל היחידה למשטח $z = g(x, y) = x^2 + y^2$ הוא

$$N = \frac{(-\nabla g, 1)}{\sqrt{1 + |\nabla g|^2}} = \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}}$$

$$x \cdot N(x) = (x, y, z) \cdot \frac{(-2x, -2y, 1)}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} = \frac{-2x^2 - 2y^2 + z}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} = \frac{-x^2 - y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \quad \text{ואז:}$$

אז:

$$\begin{aligned}
\iint_S x \cdot N(x) d\sigma_2 &= \iint_{\bar{B}^2\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \frac{-x^2 - y^2}{\sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2}} \cdot \sqrt{1 + 4x^2 + 4y^2} dx dy \\
&= \iint_{\bar{B}^2\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} (-x^2 - y^2) dx dy \\
&= - \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} \left(\int_0^{-\cos\theta - \sin\theta} r^3 dr \right) d\theta \\
&= -\frac{1}{4} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} (\cos\theta + \sin\theta)^4 d\theta = -\frac{1}{4} \int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{7}{4}\pi} (1 + \sin 2\theta)^2 d\theta \\
&= -\frac{1}{8} \int_{\frac{3}{2}\pi}^{\frac{7}{2}\pi} (1 + \sin t)^2 dt = -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 + \sin t)^2 dt \\
&= -\frac{1}{8} \int_0^{2\pi} (1 + 2\sin t + \sin^2 t) dt = -\frac{1}{8} (2\pi + 0 + \pi) = -\frac{3}{8}\pi
\end{aligned}$$

דרך אחרת היא להשתמש במשפט הדיברגנץ עם $K = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 \leq z \leq -x - y\}$ ואז האינטגרל המשטחי מתאפס על $\partial K \setminus S$ והדיברגנץ קבוע ולכן האינטגרל המשולש הוא $\text{vol}_3(K) = 3$. כיוון שהנורמל הנתון פונה פנימה הסימן הפוך מסימן הנפח כלומר שלילי. חישוב הנפח אפשרי בשיעורים קוטביים (מקבלים בערך אותו חישוב) אבל אפשר גם אחרת:

$$\begin{aligned}
\text{vol}_3(K) &= \iint_{\bar{B}^2\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \left((-x - y) - (x^2 + y^2) \right) dx dy \\
&= \iint_{\bar{B}^2\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \left(\int_{-x-y-x^2-y^2}^{-x-y} 1 \cdot dz \right) dx dy \\
&= \iint_{\bar{B}^2\left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right); \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} \left(\int_0^{-x-y-x^2-y^2} 1 \cdot dz \right) dx dy \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \text{vol}_2 \left(\left\{ (x, y) \mid z \leq -x - y - x^2 - y^2 \right\} \right) dz \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \text{vol}_2 \left(\bar{B}^2 \left(\left(-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \sqrt{\frac{1}{2} - z} \right) \right) dz \\
&= \int_0^{\frac{1}{2}} \pi \left(\frac{1}{2} - z \right) dz = \frac{1}{2} \pi \int_0^{\frac{1}{2}} (1 - 2z) dz = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2}\right)^2 \right) = \frac{1}{8} \pi
\end{aligned}$$

לשאלה 4: 2021\ב\93=53.

שאלה שהייתי בעבר פותר במפגשי הנחיה, בעזרת משפט הדיברגנץ על הקבוצה שתחומה על ידי המשטח ושלושת מישורי הצירים.

משפט קלויין-סטוקס עם הפונקציה $F: x \mapsto u \times x$. מחשבים ומקבלים $\nabla \times F = 2u$.