

מטלת מנחה (ממ"ן) 14

הקורס: 20224 – חשבון אינפיניטסימלי 3
 סמסטר: 2022
 חומר הלימוד למטלה: פרק 9
 משקל המטלה: 6 נקודות
 מספר השאלות: 5
 מועד אחרון להגשה: 25.5.2022

קיימות שתי חלופות להגשת מטלות למנחה (הסבר מפורט ב"נוהל הגשת מטלות מנחה")	
•	באמצעות הדואר או ישירות למנחה במפגשי ההנחיה (במעטפה בצרוף טופס מלווה ממ"ן).
•	באמצעות מערכת המטלות המקוונת.

שאלה 1 (20 נקודות)

תהי $f: [0,1] \rightarrow \mathbf{R}$ פונקציה אינטגרבילית ב- $[0,1]$. הוכיחו שהפונקציה $g: \bar{B}^k(0^{[k]};1) \rightarrow \mathbf{R}$ שמוגדרת על ידי $g(x) = f(|x|)$ אינטגרבילית ב- $\bar{B}^k(0^{[k]};1)$.

שאלה 2 (20 נקודות)

תהי A קבוצה בעלת נפח ב- $\mathbf{R}^k$ ותהי f פונקציה חלקית מ- $\mathbf{R}^k$ ל- $\mathbf{R}$ שרציפה בסביבה של $0^{[k]}$.
 לכל $\lambda > 0$ נסמן $\lambda A = \{\lambda a \mid a \in A\}$. הוכיחו ש- λA היא קבוצה בעלת נפח וש- $\text{vol}_k(A) \neq 0$.
 אז:
$$\frac{1}{\lambda^k \text{vol}_k(A)} \int_{\lambda A} f \xrightarrow{\lambda \rightarrow 0^+} f(0^{[k]})$$

שאלה 3 (20 נקודות)

יהי $\varphi: B(0^{[k]};1) \rightarrow \mathbf{R}^k$ דיפאומורפיזם ונניח שמתקיים $\varphi(B(0^{[k]};1)) = B(0^{[k]};1)$.
 הראו שיש $x \in B(0^{[k]};1)$ כך ש- $|\det J\varphi_x| = 1$.

שאלה 4 (20 נקודות)

א. תהי A קבוצה בעלת נפח ב- $\mathbb{R}^3$ ותהי $f: \mathbb{R}^3 \setminus \mathbb{Z}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי:

$$(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y) + \sin^2(\pi z)}$$

הוכיחו ש- f אינטגרלית בקבוצה $A \setminus \mathbb{Z}^3$ או לחילופין האינטגרל המוכלל של f בקבוצה

$$A \setminus \mathbb{Z}^3 \text{ מתכנס. (מומלץ לבחון קודם סביבה נחמדה של הראשית כגון } B^3(0;1) \text{ או } [-1,1]^3).$$

ב. תהי A קבוצה בעלת שטח ב- $\mathbb{R}^2$ ותהי $f: \mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ הפונקציה המוגדרת על ידי:

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{\sin^2(\pi x) + \sin^2(\pi y)}$$

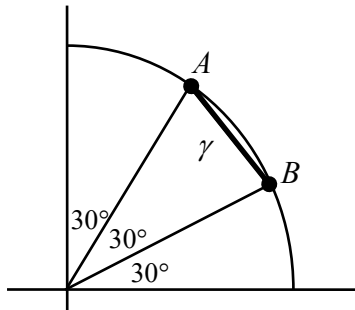
הוכיחו שאם A היא סביבה של $(0,0)$ אז האינטגרל המוכלל של f בקבוצה $A \setminus \mathbb{Z}^2$ אינו מתכנס.

שאלה 5 (20 נקודות)

$$P(x, y) = -\frac{y}{x^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad Q(x, y) = \frac{x}{y^2 \sqrt{x^2 + y^2}} \quad \text{נסמן:}$$

חשבו את $\int_{\gamma} Pdx + Qdy$ כאשר φ היא מסילה פשוטה

שתמונתה הקטע הישר AB באיור שלפניכם (עם התחלה ב- A וסיום ב- B). היעזרו במשפט גרין כדי להמיר את החישוב בחישוב אינטגרל לאורך קשת המעגל (רדיוס המעגל הוא R).



▶▶▶ סוף המטלה

הערות

לשאלה 1: 2021\53\5

למשל f רציפה פרט לקבוצה צנומה ואפשר להסיק מזה אותו דבר ל- g .
 אולי אפשר לעשות משהו עם שיעורים קוטביים ומשפט פוביני, אבל מסופקני.
 אפשר לראות שאם f רציפה בנקודה r אז g רציפה בכל הנקודות על $S^{k-1}(0^{[k]}; r)$,
 ולכן $B^k(0^{[k]}; 1) \setminus \text{cont}(g) \subseteq \bigcup_{r \in [0,1] \setminus \text{cont}(f)} S^{k-1}(0^{[k-1]}; r)$ ויש להראות שהקבוצה מימין
 צנומה, כאשר ידוע ש- $[0,1] \setminus \text{cont}(f)$ צנומה.
 מכסים אותה באיחוד בן מניה של קטעים שסכום אורכיהם קטן מ- ε . אם I הוא אחד
 מהם אפשר להניח שהוא מוכל ב- $[0,1]$ ואז $B_I = \bigcup_{r \in I} S^{k-1}(0^{[k]}; r)$ היא קבוצה בעלת נפח
 שחסום על ידי גודל פרופורציוני לאורך של I כלומר $\text{vol}_k(B_I) \leq \sigma \cdot \text{vol}_1(I)$ עם σ
 מתאים, שאפשר למצוא. בעזרת סכום עליון מתאים של הפונקציה χ_{B_I} בתיבה $[-1,1]^k$
 אפשר לקבל אוסף תיבות מיושרות שסכום נפחיהם קטן מ- $\mu \cdot \text{vol}_k(B_I) = \mu \sigma \cdot \text{vol}_1(I)$
 עם $\mu > 1$ כלשהו. אז קיבלנו ביחד כיסוי של $B^k(0^{[k]}; 1) \setminus \text{cont}(g)$ באיחוד תיבות
 מיושרות שסכום נפחיהן קטן מ- $\mu \sigma \varepsilon$ וזה מספיק כדי לקבוע שהיא צנומה.

לשאלה 2: 2021\52\5

זה ש- λA בעלת נפח נובע למשל משאלה 25.ד.9 (תמונת בעלת שטח על ידי פונקציה
 אפינית). מאחר ש- A חסומה עבור λ קטן דיו λA מוכלת בסביבה שבה f רציפה ולכן
 אינטגרלית ב- λA , ומאותה סיבה עבור λ קטן דיו λA מוכלת בסביבה שבה

$$f(0) - \varepsilon \leq f(x) \leq f(0) + \varepsilon$$
 וממונוטוניות האינטגרל

$$(f(0) - \varepsilon) \text{vol}_k(\lambda A) \leq \int_{\lambda A} f \leq (f(0) + \varepsilon) \text{vol}_k(\lambda A)$$
 ונותר להגיד ש-
 $\text{vol}_k(\lambda A) = \lambda^k \text{vol}_k(A)$, למשל מנוסחת החלפת משתנים עם העתקה אפינית.

לשאלה 3: 2021\92\5 (לפי בחינה מ-2018 באוני' תל-אביב, באדיבות חזי ששלח לי את השאלה).

השאלה הכללית היא:

תהי U קבוצה לא ריקה ב- $\mathbf{R}^k$ שהיא פתוחה, קשורה מסילתית ובעלת נפח. יהי
 $\varphi: U \rightarrow \mathbf{R}^k$ דיפאומורפיזם ונניח שמתקיים $\varphi(U) = U$. הראו שיש $x \in U$ כך ש-
 $|\det J\varphi_x| = 1$.

לצורך הבחינה (ועכשיו גם לצורך הממ"ן) הגבלתי ל- $U = B(0^{[k]}; 1)$.

תמונת $|\det J\varphi|$ היא קטע ואם 1 לא נמצא בו אז בה"כ (על ידי החלפת φ ב- φ^{-1} לפי

הצורך) כל איבריו גדולים מ-1. לכל $K \subseteq U$ סגורה, חסומה ובעלת נפח חיובי יש מינימום גדול מ-1 ל- $|\det J\varphi|$ ב- K ולכן $\text{vol}_k(\varphi(K)) = \int_K |\det J\varphi| > \text{vol}_k(K)$. אז $\text{vol}_k(\varphi(U \setminus K)) < \text{vol}_k(U \setminus K)$ ועכשיו צריך לספק סתירה על ידי מציאת תת-קבוצה קומפקטית מספיק גדולה בתוך $U \setminus K$. ההגבלה ל- $U = B(0^{[k]}; 1)$ מאפשרת למשל לבחור את K כעיגול סגור קטן סביב הראשית, וב- $U \setminus K$ לבחור טבעת סגורה שממלאת כמעט הכל. עבור U כללית צריך טיעון אחר (למשל בעזרת סכומי דארבו תחתונים) לקיום קבוצה סגורה וחסומה מתאימה בתוך $U \setminus K$.

לשאלה 4: אפשר באמצעים פשוטים של אינפי 1 לראות למשל ש- $2x < \sin \pi x < \pi x$ ל- $0 < x < \frac{1}{2}$. זה מאפשר לקבוע שבסביבה נקובה מספיק קטנה של הראשית האינטגרל מתכנס אם ורק אם מתכנס האינטגרל של $x \mapsto \frac{1}{|x|^2}$. אז אם A למשל כדור מספיק קטן סביב הראשית אפשר לקחת כסדרת קירוב את $A_n = A \setminus B(0; \frac{1}{n})$ ולחשב את האינטגרל של $x \mapsto \frac{1}{|x|^2}$ בעזרת שיעורים קוטביים טענה 42.9.2 או 37.9.2 בהתאם למימד). באחד מהם מקבלים התכנסות ובאחר התבדרות. עכשיו ל- A כללית יותר מזה שהיא חסומה יש בה מספר סופי של נקודות של $\mathbb{Z}^3$ ואפשר לבדוד מספר סופי של עיגולים קטנים סביבן, שעל כל אחד מהם האינטגרל מתקבל מהזזה של האינטגרל על כדור סביב הראשית ולכן מתכנס, ונותר לחבר את החלק הנותר שבו הפונקציה בודאי אינטגרלית. אם הפונקציה חסומה אז היא בודאי אינטגרלית (יש לה קבוצה בת מניה ולכן צנומה של נקודות אירציפות).

לשאלה 5: 2019ב16.3.